1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大］

a は実数とし，2 つの曲線 $C_1 : y=(x-1)e^x$，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ がある。ただし，e は自然対数の底である。C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

(1)　a を t で表せ。

(2)　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ。

$\boxed{2}$ ［京都大］

(1)　a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　$a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ ［東京工大］

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

$\boxed{4}$ ［名古屋大］

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=x^{-2}2^{x}\quad(x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2) 方程式 $2^{x}=x^{2}$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3) 方程式 $2^{x}=x^{2}$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。

5 ［大阪大］

次の問いに答えよ。

(1) c を正の定数とする。正の実数 $x,\ y$ が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2) 正の実数 $x,\ y,\ z$ が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。

6 ［名古屋大］

2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を O(0, 0) とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2) (1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2)，(3)においては，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。

７　　［金沢大］

$a,\ b$ を実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし，x についての方程式 $f(x)=b$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a>0$ のとき，関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

8　　［東京大］

e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

9　　［千葉大］

以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，不等式 $\log x<x$ を示せ。

(2)　$1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3)　$x\geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。

10　　［熊本大］

半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x, y を求めよ。

11 ［千葉大］

曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

n を自然数とする。$f(x)=\sin x-nx^2+\frac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。

(3)　(2)における解を x_n とする。$\lim_{n\to\infty} x_n=0$ であることを示し，$\lim_{n\to\infty} nx_n$ を求めよ。

$\boxed{13}$ ［名古屋大］

a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3)　関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。

$\boxed{14}$ ［大阪大］

次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ の範囲で不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　x が $x>0$ の範囲を動くとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。