1 ［北海道大］

(1)　$C_1 : y=(x-1)e^x\cdots\cdots$①，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a\cdots\cdots$②に対して，

①より，$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ となり，点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線 l は，

$$y-(t-1)e^t=te^t(x-t),\quad y=te^tx-(t^2-t+1)e^t\cdots\cdots\cdots③$$

さて，②③を連立すると，$\dfrac{1}{2e}x^2+a=te^tx-(t^2-t+1)e^t$

$$\frac{1}{2e}x^2-te^tx+a+(t^2-t+1)e^t=0$$

C_2 と l が接することより，$D=t^2e^{2t}-4\cdot\dfrac{1}{2e}\{a+(t^2-t+1)e^t\}=0$ となり，

$$t^2e^{2t+1}-2a-2(t^2-t+1)e^t=0,\quad a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t\cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$f(t)=\dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと，④より，$a=f(t)$ となり，

$$\begin{aligned}f'(t)&=te^{2t+1}+t^2e^{2t+1}-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t\\&=(t+t^2)e^{2t+1}-(t^2+t)e^t\\&=t(t+1)e^t(e^{t+1}-1)\end{aligned}$$

ここで，$f'(t)=0$ の解は $t=-1,\ 0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↘		↗

すると，$t=0$ のとき $f(t)$ すなわち a は，極小値 $f(0)=-1$ をとる。

［解　説］

微分法の基本問題です。(1)の結論がややこしい形をしており，微分するには心が重かったのですが，杞憂に終わりました。

２　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

(1)　$y=e^x+1$ に対して，$y'=e^x$ となり，点 $(t,\ e^t+1)$ における接線の方程式は，

$$y-(e^t+1)=e^t(x-t),\quad y=e^tx-(t-1)e^t+1\cdots\cdots\cdots①$$

①が $(a,\ 0)$ を通ることより，$e^ta-(t-1)e^t+1=0$ となり，

$$e^ta=(t-1)e^t-1,\quad a=-e^{-t}+t-1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(t)=-e^{-t}+t-1$ とおくと，$f'(t)=e^{-t}+1>0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+t-1)=\infty,\quad \lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}(-e^{-t}+t-1)=-\infty$$

よって，$f(t)$ は単調増加し，任意の実数値をとり得る。

すなわち，方程式②は任意の a に対してただ 1 つの実数解をもつことより，点 $(a,\ 0)$ を通る接線①は，ただ 1 つ存在する。

(2)　条件を②に適用すると，$a_n=-e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}-1$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=e^{-a_{n+1}}+1>1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$a_1=1$ から，$a_n>1+(n-1)\cdot1=n\quad(n\geqq2)$

よって，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となるので，③より，

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(e^{-a_{n+1}}+1)=1$$

［解 説］

頻出の接線の本数の問題です。(2)では，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ であることを示すのがポイントです。③の不等号に気づくかどうかだけですが。

３　　　　［東京工大］

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t^2(\cos t,\ \sin t)$

$$\frac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$$

これより，$\vec{v}=t(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$ となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=t^3(2\cos^2 t-t\cos t\sin t+2\sin^2 t+t\sin t\cos t)=2t^3$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=t^2,\ |\vec{v}|=t\sqrt{(2\cos t-t\sin t)^2+(2\sin t+t\cos t)^2}=t\sqrt{t^2+4}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\frac{2t^3}{t^3\sqrt{t^2+4}}=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$$

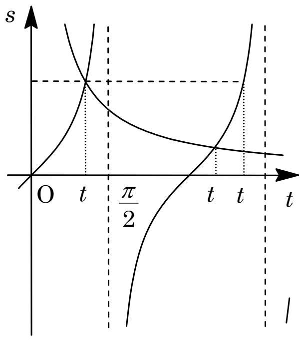
よって，$t\to\infty$ のとき $\cos\theta(t)\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$ である。

(2)　$t>0$ において，$\vec{v}$ が y 軸に平行なるのは，$\dfrac{dx}{dt}=0$ から $2\cos t-t\sin t=0$

すなわち，$2\cos t=t\sin t$ から，$\cos t\neq 0$ となり，

$$\tan t=\frac{2}{t}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$の解は，$s=\tan t$ と $s=\dfrac{2}{t}$ の交点の t 座標として表せる。そして，正で最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とすると右図のようになる。



ここで，$t_3=t_1+\pi$ とおくと，$t_2<t_3$ となるので，

$$t_2-t_1<t_3-t_1=\pi$$

［解　説］

速度ベクトルが題材の基本的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，いちばん感覚的に理解できるもので記載しました。

$\boxed{4}$ ［名古屋大］

(1)　$f(x) = x^{-2}2^x = \dfrac{2^x}{x^2}$ に対して，

$$f'(x) = \frac{2^x\log 2\cdot x^2 - 2^x\cdot 2x}{x^4} = \frac{2^x(x\log 2 - 2)}{x^3} = \frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2 - 2}{x}$$

これより，$f'(x) > 0$ となる条件は，$\dfrac{x\log 2 - 2}{x} > 0$ すなわち $x(x\log 2 - 2) > 0$ から，$x < 0$，$\dfrac{2}{\log 2} < x$ である。

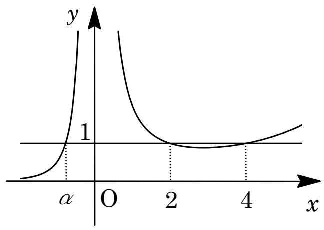
(2)　$x = 0$ は方程式 $2^x = x^2$ を満たさないので，この方程式は，$x^{-2}2^x = 1$ すなわち $f(x) = 1$ と同値である。

さて，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

さらに，$f(2) = f(4) = 1$ に注意して，$y = f(x)$ と $y = 1$ のグラフをかくと右図のようになる。



したがって，$f(x) = 1$ すなわち $2^x = x^2$ は，相異なる 3 個の実数解 $x = \alpha$，2，4 をもつ。

(3)　まず，方程式 $2^x = x^2$ の解 $x = 2$，4 は有理数なので，もう 1 つの負の解 $x = \alpha$ について有理数かどうかを調べる。

そこで，α が有理数と仮定し，$\alpha = -\dfrac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数)とおくと，

$$2^{-\frac{n}{m}} = \left(-\frac{n}{m}\right)^2,\ 2^{-n} = \left(\frac{n^2}{m^2}\right)^m,\ \frac{1}{2^n} = \frac{n^{2m}}{m^{2m}}$$

m, n は互いに素より，$n^{2m} = 1$ ……①，$m^{2m} = 2^n$ ……②

①より $n = 1$ となり，②に代入すると $m^{2m} = 2$ であるが，この式を満たす自然数 m は存在しない。これより，α は有理数でない。

以上より，方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものは $x = 2$，4 である。

［解　説］

微分の応用に関する問題です。(2)は(1)を誘導とした解法ですが，これを無視して直接的に $y = 2^x$ と $y = x^2$ のグラフを描くことによって示しても構いません。実際，$x = 2$，4 という解はこちらの方法で見つけていますので。

5 ［大阪大］

(1)　c は正の定数，$x+y=c\ (x>0,\ y>0)$ のとき，$P=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ とおくと，

$$P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$c=x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ となり，

$\dfrac{1}{xy}\geqq\dfrac{4}{c^2}$　（等号は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき成立）

よって，$P\geqq 1+\dfrac{4(c+1)}{c^2}=\dfrac{(c+2)^2}{c^2}=\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ となり，P は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき最小値 $\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ をとる。

(2)　$x+y+z=1\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ のとき，$Q=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ とおく。

ここで，$x+y=1-z$ から $0<z<1$ となり，$1-\dfrac{4}{3z}=\dfrac{3z-4}{3z}<0$

すると，(1)の結果から，

$$Q=P\left(1-\frac{4}{3z}\right)\leqq\left(\frac{1-z+2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)=\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{3z-4}{3z}$$

なお，等号は $x=y=\dfrac{1-z}{2}$ のとき成立する。

ここで，$f(z)=\left(\dfrac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}=\left(\dfrac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}$ とおくと，

$$f'(z)=2\cdot\frac{z-3}{z-1}\cdot\frac{2}{(z-1)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z}+\left(\frac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}$$

$$=\frac{4(z-3)}{3z(z-1)^2}\left(\frac{3z-4}{z-1}+\frac{z-3}{z}\right)=\frac{4(z-3)(4z^2-8z+3)}{3z^2(z-1)^3}$$

$$=\frac{4(z-3)(2z-1)(2z-3)}{3z^2(z-1)^3}$$

z	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		↗	$-\frac{125}{3}$	↘	

これより，$f(z)$ の増減は右表のようになり，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

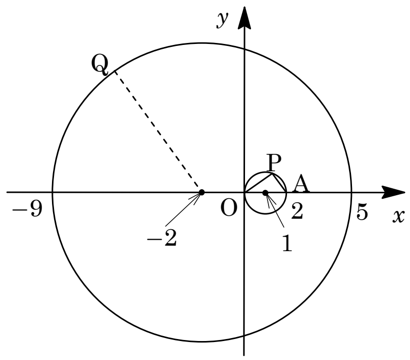
したがって，Q は $x=y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

［解 説］

条件付きの最大・最小問題です。(2)では，(1)の結果の利用するため，いったん z を固定して考えています。なお，$f'(z)$ を商の微分法を利用してまとめていくと，相当な計算量になります。

6　　［名古屋大］

(1)　$A(2,\ 0)$ とおくと，線分 OA が円 C の直径となるので，$\angle APO=\dfrac{\pi}{2}$ となる。



条件から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として $\angle AOP=\theta$ より，

$$OP=OA\cos\theta=2\cos\theta$$

また，$P(x,\ y)$ とおくと，

$$x=OP\cos\theta,\ \ y=OP\sin\theta$$

よって，$P(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)$ である。

(2)　中心 $(-2,\ 0)$ で半径 7 の円 D 上の点 Q を，$Q(-2+7\cos\varphi,\ 7\sin\varphi)\ (0\leqq\varphi<2\pi)$ とおくと，△OPQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left|2\cos^2\theta\cdot 7\sin\varphi-2\sin\theta\cos\theta(-2+7\cos\varphi)\right|$$
$$=\left|7\cos^2\theta\sin\varphi-7\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+2\sin\theta\cos\theta\right|$$
$$=\cos\theta\left|7(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)+2\sin\theta\right|=\cos\theta\left|7\sin(\varphi-\theta)+2\sin\theta\right|$$

ここで，θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，$\sin\theta>0$ で $-\theta\leqq\varphi-\theta<2\pi-\theta$ より，$\varphi-\theta=\dfrac{\pi}{2}\left(\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき S は最大になる。

このとき，$\cos\varphi=-\sin\theta$，$\sin\varphi=\cos\theta$ より，$Q(-2-7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$ である。

(3)　(2)より，S の最大値は，$S=\cos\theta\left|7+2\sin\theta\right|=\cos\theta(7+2\sin\theta)$

そこで，この φ と θ の関係を保ったまま，x 軸に関する対称性から点 P の y 座標が正，すなわち θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で動かすと，

$$S'=-\sin\theta(7+2\sin\theta)+\cos\theta\cdot 2\cos\theta=-7\sin\theta-2\sin^2\theta+2(1-\sin^2\theta)$$
$$=-4\sin^2\theta-7\sin\theta+2$$
$$=-(4\sin\theta-1)(\sin\theta+2)$$

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，S は増減が右表のようになり，$\theta=\alpha$ で最大となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

そして，点 P が O, A に一致する場合も考え合わせて，S の最大値は，

$$\cos\alpha(7+2\sin\alpha)=\sqrt{1-\frac{1}{16}}\left(7+2\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{15}$$

［解　説］

2 変数関数の最大・最小問題ですが，まず 1 文字を固定して考えるという丁寧な誘導がついています。なお，(2)は図形的な処理も可能です。

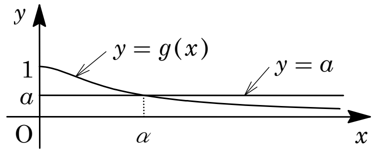
７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［金沢大］

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ に対して，$f(-x)=f(x)$ から $y=f(x)$ のグラフは y 軸対称となる。そこで，以下，$x\geqq 0$ で考える。

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-2ax=2x\Big(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\Big)$$

ここで，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し，

$$1=g(0)\geqq g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$



(i)　$0<a<1$ のとき

$g(\alpha)=a$ となる α が $\alpha>0$ でただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=a$ から $1+\alpha^2=\dfrac{1}{a^2}$ となり，$f(x)$ の最大値は,

$$f(\alpha)=2\sqrt{1+\alpha^2}-a\alpha^2=\frac{2}{a}-a\Big(\frac{1}{a^2}-1\Big)=a+\frac{1}{a}$$

(ii)　$a\geqq 1$ のとき

$x\geqq 0$ において $f'(x)\leqq 0$ となり，$f(x)$ の最大値は $f(0)=2$ である。

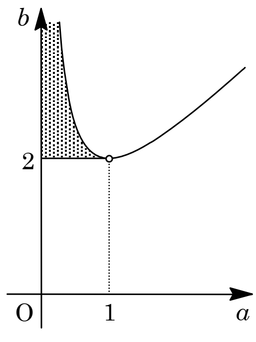
(2)　$a>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ となり，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は，$0<a<1$ のとき 4 個，$a\geqq 1$ のとき 2 個である。

$a\leqq 0$ のとき，$x\geqq 0$ において $f(x)$ は単調に増加するので，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 2 個である。

したがって，方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 4 個であり，このとき，

$$0<a<1,\ 2<b<a+\frac{1}{a}$$

そして，相加平均と相乗平均の関係から $a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$ に注意して点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解　説］

場合分けをして増減を考えるという微分の応用の典型題です。なお，(3)の領域の境界線は有名ですので，増減表などのプロセスは省略しています。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

まず，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-1=x\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $f''(x)<0$ より，$f'(x)$ は単調に減少し，

$$f'(x)>\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $f(x)$ は単調に増加し，

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right\}=\log e-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e$ ………①

また，$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}-1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $g''(x)>0$ より，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$g'(x)<\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2+\frac{1}{x}}{2(x+1)}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $g(x)$ は単調に減少し，

$$g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}=\log(e\cdot 1)-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>e$ ………②

したがって，①②より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

［解　説］

微分の不等式への応用問題です。まず，証明すべき式の各辺に対数をとって，式の同値変形をした後に，差をとって微分するという定型的な処理をしています。

9 ［千葉大］

(1)　$x>0$ において $f(x)=x-\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$f(x) \geqq 1 > 0$

よって，$x>0$ において，$\log x < x$ ………①

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘	1	↗

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{\log x}$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

ここで，$1<a<c<b$ となる c に対して，$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$ から，

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(c),\ \frac{1}{\log b}-\frac{1}{\log a}=-\frac{b-a}{c(\log c)^2}$$

これより，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}=\dfrac{b-a}{c(\log c)^2}$ ………②

また，$0<a(\log a)^2<c(\log c)^2$ から，$0<\dfrac{1}{c(\log c)^2}<\dfrac{1}{a(\log a)^2}$ ………③

②③より，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ ………④

(3)　$x \geqq e$ において，$F(x)=\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)}-\log(\log x)-\frac{1}{2(\log x)^2}+\frac{1}{2}$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{1}{x\log(x+1)}-\frac{1}{x\log x}+\frac{1}{x(\log x)^3}$$
$$=-\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{\log(x+1)}+\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}$$

④より $\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{\log(x+1)}<\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ となり，①から $\log x<x$ なので，

$$F'(x)>-\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x(\log x)^2}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}=-\frac{\log x-x}{x^2(\log x)^3}>0$$

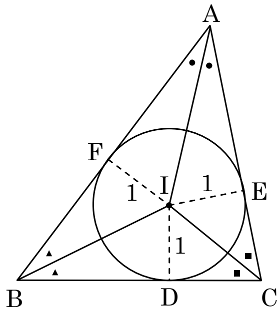
すると，$x \geqq e$ において，$F(x) \geqq F(e)=0-\log 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$ となり，

$$\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} \geqq \log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$$

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。(1)(2)の誘導で(3)の見通しは良好です。なお，(2)では，不等式の形から平均値の定理の出番です。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］



(1)　△ABC の半径 1 の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とおくと，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ から，

$$\mathrm{AF}=\mathrm{AE}=\frac{1}{\tan x},\ \ \mathrm{BD}=\mathrm{BF}=\frac{1}{\tan y}$$

$$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}=\frac{1}{\tan z}$$

そこで，△ABC の内心を I，その面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABI}+\triangle\mathrm{BCI}+\triangle\mathrm{CAI}\\&=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}\Big)\cdot 1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\Big)\cdot 1+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\tan z}+\frac{1}{\tan x}\Big)\cdot 1\\&=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\end{aligned}$$

(2)　$z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$x+y=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ となり，(1)より，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan\Big(\dfrac{\pi}{3}-x\Big)}+\frac{1}{\tan\dfrac{\pi}{6}}=\frac{1}{\tan x}+\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}+\sqrt{3}$$

ここで，$t=\tan x$ とおくと，$0<x<\dfrac{\pi}{3}$ から $0<t<\sqrt{3}$ となり，

$$S=\frac{1}{t}+\frac{1+\sqrt{3}t}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}-\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}$$

$$\begin{aligned}S'&=-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(\sqrt{3}-t)^2}=\frac{3t^2+2\sqrt{3}t-3}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\\&=\frac{(3t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}\end{aligned}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$3\sqrt{3}$	$\nearrow$	

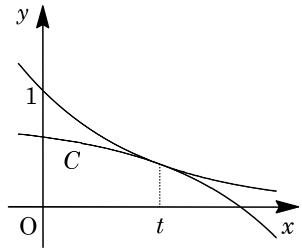
すると，S の増減は右表のようになり，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $3\sqrt{3}$ をとる。このとき，$\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ から $x=\dfrac{\pi}{6}$ であり，$y=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

［解 説］

図形がらみの微分と増減に関する問題です。(2)では絶対不等式の利用も考えましたが，結局はオーソドックスな微分法ということに落ち着きました。

11　　［千葉大］

(1)　曲線 $y=-e^x$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線 C の方程式は,



$$y=-e^{x-a}+b\cdots\cdots\cdots①$$

また, 曲線 C は曲線 $y=e^{-x}\cdots\cdots②$ と $x=t\ (t\geqq 0)$ で接するので, ①より $y'=-e^{x-a}$, ②より $y'=-e^{-x}$ から,

$$-e^{t-a}=-e^{-t}\cdots\cdots\cdots③$$

$$-e^{t-a}+b=e^{-t}\cdots\cdots\cdots④$$

③から, $t-a=-t$ より $a=2t$ となり, この式を④に代入すると, $-e^{-t}+b=e^{-t}$ から $b=2e^{-t}$ となるので, ①に代入して,

$$C: y=-e^{x-2t}+2e^{-t}\cdots\cdots\cdots⑤$$

(2)　C と x 軸との交点は, ⑤より $-e^{x-2t}+2e^{-t}=0$ から, $e^{x-2t}=2e^{-t}$

$$x-2t=\log 2e^{-t}=\log 2-t,\ \ x=t+\log 2$$

すると, C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\int_0^{t+\log 2}(-e^{x-2t}+2e^{-t})\,dx=\Big[-e^{x-2t}+2e^{-t}x\Big]_0^{t+\log 2}$$

$$=-e^{-t+\log 2}+e^{-2t}+2(t+\log 2)e^{-t}=2(t-1+\log 2)e^{-t}+e^{-2t}$$

(3)　(2)より, $S'(t)=2e^{-t}-2(t-1+\log 2)e^{-t}-2e^{-2t}=-2e^{-t}(t-2+\log 2+e^{-t})$

ここで, $f(t)=t-2+\log 2+e^{-t}$ とおくと,

$$f'(t)=1-e^{-t}$$

これより, $t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$
$f(t)$	$-1+\log 2$	$\nearrow$

すると, $f(0)=-1+\log 2<0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ から, $f(\alpha)=0$ となる $\alpha>0$ がただ 1 つ存在する。

このαを用いて $t\geqq 0$ における $S(t)$ の増減を調べると, 右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

これより, $S(t)$ は $t=\alpha$ のとき最大値をとる。

すなわち, $S(t)$ が最大となるような t の値はただ 1 つ存在する。

［解　説］

微積分の総合問題です。2 つの曲線の式が似ているので, 混乱しないように注意が必要です。

$\boxed{12}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　n を自然数とし，$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ に対して，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$f'(x)=\cos x-2nx+\frac{1}{3}x^2,\quad f''(x)=-\sin x-2n+\frac{2}{3}x,\quad f'''(x)=-\cos x+\frac{2}{3}$$

すると，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ となる $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f''(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$f''(0)=-2n<0$ であり，

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-2n+\frac{\pi}{3}\leqq-1-2+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}(-9+\pi)<0$$

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ である。

(2)　(1)より，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)$ は単調減少となり，

$$f'(0)=1>0,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-n\pi+\frac{\pi^2}{12}\leqq-\pi+\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi}{12}(-12+\pi)<0$$

すると，$f'(\beta)=0$ となる $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ここで，$f(0)=0$ から $f(\beta)>0$ であり，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{n\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}\leqq1-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}=-\frac{1}{72}\{\pi^2(18-\pi)-72\}<0$$

すると，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に $f(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する。

(3)　$f(x_n)=0\left(0<x_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$\sin x_n-nx_n{}^2+\dfrac{1}{9}x_n{}^3=0$ となり，

$$nx_n{}^2=\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3,\quad x_n{}^2=\frac{\sin x_n}{n}+\frac{1}{9}\cdot\frac{x_n{}^3}{n}$$

ここで，$0<\sin x_n<1$，$0<x_n{}^3<\dfrac{\pi^3}{8}$ より，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{\sin x_n}{n}\to0$，$\dfrac{x_n{}^3}{n}\to0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n{}^2=0$ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である。

また，$nx_n=\dfrac{\sin x_n}{x_n}+\dfrac{1}{9}x_n{}^2$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=1+\frac{1}{9}\cdot0=1$$

［解　説］

微分と増減に極限が融合した典型題です。なお，スペースの関係上，$3<\pi<4$ を利用した部分については省いています。

13　　　　［名古屋大］

(1)　$a>1$ のとき，$y=a^x$ ……①と $y=\log_a x$ ……②のグラフが，共有点$(p,\ q)$をもつとすると，①②から，$p>0$，$q>0$ で，

$$q=a^p \cdots\cdots③,\ q=\log_a p \cdots\cdots④$$

④より，$p=a^q$ となり，③と合わせて，$\dfrac{q}{p}=a^{p-q}$ ………⑤

(i)　$p>q$ のとき　$0<\dfrac{q}{p}<1$ で $a^{p-q}>1$ より，⑤は成立しない。

(ii)　$p<q$ のとき　$\dfrac{q}{p}>1$ で $a^{p-q}<1$ より，⑤は成立しない。

(iii)　$p=q$ のとき　$\dfrac{q}{p}=1$ で $a^{p-q}=1$ より，⑤は成立する。

(i)～(iii)より，①と②のグラフが共有点をもつとき，それは直線 $y=x$ 上にある。

(2)　(1)より，①と②のグラフが共有点は，②と直線 $y=x$ の共有点なので，

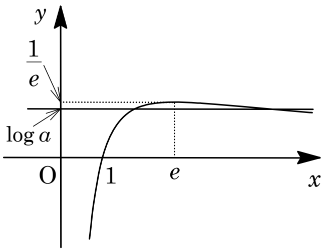
$$x=\log_a x,\ x=\frac{\log x}{\log a},\ \log a=\frac{\log x}{x} \cdots\cdots⑥$$

さて，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f(x)=\log a$ の解が①と②のグラフが共有点の x 座標に対応し，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになる。さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ から，$y=f(x)$ のグラフは右図の曲線である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘



ここで，$a>1$ から $\log a>0$ に注意すると，⑥の解は 2 個以下，すなわち①と②のグラフの共有点は 2 個以下である。

(3)　①と②のグラフの共有点が 1 個であるとき，(2)より，$x=e$ となり，共有点の座標は$(e,\ e)$である。また，このとき $\log a=\dfrac{1}{e}$ より，$a=e^{\frac{1}{e}}$ となる。

［解　説］

微分の方程式への応用問題です。(1)と(2)は，題意を考えると，グラフから明らかというわけにはいきません。また，(2)では $y=\log_a x$ と $y=x$ の組合せで処理しましたが，$y=a^x$ と $y=x$ を組合せでも構いません。対数は微分と相性良しと思い，前者を選択しただけですので。

14　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1)　まず，$f(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\ (x>0)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

これより，$f(x)>f(0)=0$ となり，$\log(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$ ………①

次に，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)\ (x>0)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\Big(\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\Big)-\frac{1}{1+x}=\frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{2+x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{4+4x+x^2}-\sqrt{4+4x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}>0$$

これより，$g(x)>g(0)=0$ となり，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}>\log(1+x)$ ………②

①②から，$x>0$ で，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ………③

(2)　$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ ……④に対して，

$$y'=-\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2-(1+x)\{\log(1+x)\}^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2}$$

②より，$\dfrac{x^2}{1+x}>\{\log(1+x)\}^2$ すなわち $x^2>(1+x)\{\log(1+x)\}^2$ となり，$y'<0$ から，④は $x>0$ で単調に減少する。

ここで，$x\to\infty$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to 0$ である。

また，$0<x<2$ において，$x-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x(2-x)}{2}>0$ となるので，③から，

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)},\quad \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{2-(2-x)}{x(2-x)}$$

すると，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{2-(2-x)}{x(2-x)}=\dfrac{1}{2-x}\to\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\to\frac{1}{2}$$

よって，$x\to+0$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to\dfrac{1}{2}$ となる。

以上より，$x>0$ で，④のとり得る範囲は，$0<y<\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

微分の応用と関数の極限に関する基本的な問題です。