1 ［熊本大］

r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ ［新潟大］

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2},\ \ f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad (n\text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad (n\text{ が }3\text{ 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

3 ［東京大］

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1 \text{ のとき}),\ \ g(x)=0\ (|x|>1 \text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1 \text{ のとき}),\ \ h(x)=0\ (|x|>1 \text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

$\boxed{4}$ ［北海道大］

$a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{5}$ ［信州大］

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

6　　［東北大］

a, b, c を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx\ ,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$I(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　$J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3)　次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$

７　　　　［東京医歯大］

連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t)dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t)dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2)　$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3)　$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{8}$ ［広島大］

次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。 $\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$

$\boxed{9}$　　［長崎大］

積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1)　部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2)　$F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3)　$n\geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n\geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4)　$p(x)=x^n$ とおくとき，k 次導関数 $p^{(k)}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。

$\boxed{10}$ ［名古屋大］

自然数 n に対し，定積分 $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(2) $0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

(4) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{11}$ ［新潟大］

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2) $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx\right| \leqq \dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$ の和を求めよ。