$\boxed{1}$ ［熊本大］

(1) $a_n=\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$ に対し，$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ で $\sin x$ の符号は不変なので，

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\sin x\,dx\right|$$

ここで，$(e^{-rx}\sin x)'=-re^{-rx}\sin x+e^{-rx}\cos x$ ………①

$(e^{-rx}\cos x)'=-re^{-rx}\cos x-e^{-rx}\sin x$ ………②

①×r＋②より，$-(r^2+1)e^{-rx}\sin x=\left\{e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\right\}'$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left|-\frac{1}{r^2+1}\Big[e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-(n+1)\pi r}\cos(n+1)\pi-e^{-n\pi r}\cos n\pi\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-n\pi r}e^{-\pi r}(-1)^{n+1}-e^{-n\pi r}(-1)^n\right|$$
$$=\frac{e^{-n\pi r}|(-1)^n|}{r^2+1}\left|-e^{-\pi r}-1\right|=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}e^{-n\pi r}$$

(2) (1)より，$a_1=\int_0^{\pi}e^{-rx}|\sin x|\,dx=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}$ となり，$n\geqq2$ で，

$$a_n=a_1+\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi r}=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\left\{1+\frac{e^{-\pi r}(1-e^{-(n-1)\pi r})}{1-e^{-\pi r}}\right\}$$
$$=\frac{(1+e^{-\pi r})(1-e^{-n\pi r})}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3) $r>0$ から，$n\to\infty$ のとき $e^{-n\pi r}\to0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$

(4) $f(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$ より，$rf(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{r^2+1}\cdot\dfrac{r}{1-e^{-\pi r}}$

ここで，$g(r)=e^{-\pi r}$ とおくと，$g'(r)=-\pi e^{-\pi r}$ となり，

$$\lim_{r\to+0}\frac{1-e^{-\pi r}}{r}=-\lim_{r\to+0}\frac{g(r)-g(0)}{r}=-g'(0)=\pi$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{1}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ である。

［解 説］

定積分と数列を融合した超頻出の有名問題です。このタイプの部分積分は計算ミスを犯しやすいので，いつも①②のような式を先に立式しています。

２　　　　　　　　　　　　　　　　　　［新潟大］

(1)　$f_1(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$ から，条件より，$f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x\Big(1-\frac{t^2}{2}\Big)dt=x-\frac{x^3}{6}$

$$f_3(x)=1-\int_0^x f_2(t)\,dt=1-\int_0^x\Big(t-\frac{t^3}{6}\Big)dt=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$g(x)=f_1(x)-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}=1-\dfrac{x^2}{2}-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}$ とおくと，

$$g'(x)=-x+\sin x+\frac{x^3}{3!}$$

すると，$x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq\sin x$ より $g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)\geqq g(0)=0$

また，$h(x)=\dfrac{x^4}{4!}-f_1(x)+\cos x=\dfrac{x^4}{4!}-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{x^3}{3!}+x-\sin x$$

$\sin x\leqq x$ より $h'(x)\geqq 0$ となり，$h(x)\geqq h(0)=0$

以上より，$0\leqq x\leqq 1$ において，$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ ……(＊)が，すべての自然数 m に対して成り立つことを，数学的帰納法により証明する。

(i)　$m=1$ のとき　(2)より，成り立っている。

(ii)　$m=l$ のとき　$-\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}\leqq f_{2l-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}$ の成立を仮定すると，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l-1}(t)-\cos t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}\leqq f_{2l}(x)-\sin x\leqq\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}$ となり，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l}(t)-\sin t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq 1-f_{2l+1}(x)+\cos x-1\leqq\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$ となり，

$$-\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq f_{2l+1}(x)-\cos x\leqq\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$$

すると，$m=l+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，自然数 m に対して(＊)は成り立っている。

(4)　(＊)に $x=\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると，

$$-\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}\leqq f_{2m-1}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}$$

すると，$0<\dfrac{\pi}{6}<1$から，$m\to\infty$のとき，$f_{2m-1}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\to 0$となるので,

$$\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解 説］

定積分と不等式, 加えて極限を問うものです。記述量は多いですが, 方針に迷いが生ずることはないでしょう。

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$g(x)=\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2}$ $(|x|\leqq 1$ のとき$)$，$g(x)=0$ $(|x|>1$ のとき$)$ より，

$$g(nx)=\frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ g(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

ここで，$g(nx)\geqq 0$ かつ $p\leqq f(x)\leqq q$ $\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$から，

(i)　$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき　$\dfrac{p}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}\leqq g(nx)f(x)\leqq\dfrac{q}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}$

(ii)　$|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき　$g(nx)f(x)=0$

さて，$I_n=n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$ とおくと，

$$\frac{np}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq\frac{nq}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

$$np\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq nq\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

そこで，$\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx=\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}+x\right]_0^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$ から，$np\cdot\dfrac{1}{n}\leqq I_n\leqq nq\cdot\dfrac{1}{n}$

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$g(nx)=\dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$，$g(nx)=0\left(|x|>\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$ より，

$$(g(nx))'=-\frac{n\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|<\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ (g(nx))'=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

また，$h(x)=-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ $(|x|\leqq 1$ のとき$)$，$h(x)=0$ $(|x|>1$ のとき$)$ より，

$$h(nx)=-\frac{\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ h(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

すると，$x=\pm\dfrac{1}{n}$ のときも含めて，$h(nx)=\dfrac{1}{n}(g(nx))'$ である。

さて，$J_n=n^2\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$ とおくと，

$$J_n=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(g(nx))'\log(1+e^{x+1})dx$$

$$=n\Big[g(nx)\log(1+e^{x+1})\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

ここで，$g(1)=g(-1)=0$ から，$J_n=-n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$

さらに，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ とおくと，

$$J_n = -n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx = -n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx$$

そして，$f(x)$は単調に増加し，$\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}} \leqq f(x) \leqq \dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$ となり，(＊)から，

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}} \leqq -J_n \leqq \frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}},\quad -\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}} \leqq J_n \leqq -\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx = \lim_{n\to\infty} J_n = -\frac{e}{1+e}$

［解　説］

(2)では，当然のことながら，(1)の結果を利用するだろうということは推測できますが，このときボトルネックになるのは，$g'(x)=h(x)$ という $g(x)$ と $h(x)$ の関係です。ただ，それに気づけば秘かにほくそ笑むことができ，部分積分の出番という方針が立ちます。もっとも，$f(x)=\log(1+e^{x+1})$ という単純な置き換えは出題されないだろうと推測することも当然のことですが……。

4　　［北海道大］

(1) $f(x)=\int_{-a}^{a}\left\{\dfrac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt=\dfrac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$

$$=\frac{e^{-x}}{2a}(a+a)+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt=e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$$

ここで，$C=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+C$ ……①となり，

$$C=\int_{-a}^{a}(e^{-t}+C)\sin t\,dt=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt+C\int_{-a}^{a}\sin t\,dt$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\big[\cos t\big]_{-a}^{a}=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\{\cos a-\cos(-a)\}$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$(e^{-t}\sin t)'=e^{-t}(-\sin t+\cos t)$，$(e^{-t}\cos t)'=e^{-t}(-\cos t-\sin t)$ より，

$$(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'=-2e^{-t}\sin t,\ \ e^{-t}\sin t=-\frac{1}{2}(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'$$

すると，②から，$C=-\dfrac{1}{2}\Big[e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\Big]_{-a}^{a}$ となり，

$$C=-\frac{1}{2}\{e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\}-\frac{1}{2}\{e^{-a}\cos a-e^{a}\cos(-a)\}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-a}\sin a+e^{a}\sin a)-\frac{1}{2}(e^{-a}\cos a-e^{a}\cos a)$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$$

よって，①から，$f(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\dfrac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$

(2) $g(a)=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ なので，(1)から，$g(a)=C=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt$

$$g'(a)=e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\cdot(-1)$$

$$=(e^{-a}-e^{a})\sin a$$

a	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(a)$		↘		↗	

$0<a\leqq 2\pi$ のとき，$g(a)$ の増減は右表のようになる。そして，$g(a)$ は $a=\pi$ のとき最小となり，最小値は，

$$g(\pi)=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})\sin\pi+\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cos\pi=-\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

［解　説］

積分方程式の中で，(1)がいわゆる置換型，(2)がいわゆる微分型という設問内容になっています。ただ，計算は有名な部分積分ですが，面倒ですので工夫をしています。

5 [信州大]

(1) $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$ とおくと，$I_{n+1}=\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx$ となり，

$$I_{n+1}=\Big[\,x(1-x^2)^{n+1}\,\Big]_0^1-(n+1)\int_0^1 x(1-x^2)^n(-2x)dx$$
$$=-2(n+1)\int_0^1 -x^2(1-x^2)^n dx$$
$$=(-2n-2)\int_0^1\{(1-x^2)-1\}(1-x^2)^n dx=(-2n-2)(I_{n+1}-I_n)$$

よって，$(2n+3)I_{n+1}=(2n+2)I_n$ より，$I_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}I_n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$I_n=I_1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

ここで，$I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ から，

$$I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=2^n n!\cdot\frac{2^n n!}{(2n+1)!}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$n=1$ をあてはめると，$I_1=\dfrac{4\cdot(1!)^2}{3!}=\dfrac{2}{3}$ となり成立するので，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) 二項定理より，$(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}$ となり，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}\Big)dx=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\int_0^1 x^{2k}dx$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

よって，$(*)$から，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

［解 説］

定積分がらみで誘導なしの証明問題ですが，(1)の右辺の形には，部分積分から漸化式という流れが暗示されています。上の解答例以外に，まず $x=\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換する方法もあり，そうすると参考書などには必ず載っている有名な定積分が対応します。また，(2)では左辺の階乗の部分が ${}_n\mathrm{C}_k$ であることがわかりますので，二項展開という方針は明快です。なお，漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$(e^{ax}\cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$ ………①

$(e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$ ………②

①②より，$(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx)' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ となり，

$$e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2}\{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\}'$$

$$I(a,\ b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[\,e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}a}\left(a\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right) - a\right\}$$

(2)　$$J(a,\ b,\ c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b+c)x - \cos(b-c)x\}dx$$

$$= -\frac{1}{2}I(a,\ b+c) + \frac{1}{2}I(a,\ b-c)$$

(3)　$F(t) = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$ とおくと，

$$F(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx - \sin 2tx)(\sin 6tx - \sin 2tx)dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx\sin 6tx - \sin 4tx\sin 2tx - \sin 2tx\sin 6tx + \sin^2 2tx)dx$$

$$= 2J(1,\ 6t,\ 4t) - 2J(1,\ 4t,\ 2t) - 2J(1,\ 6t,\ 2t) + 2J(1,\ 2t,\ 2t)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 2t) + I(1,\ 6t) - I(1,\ 2t) + I(1,\ 8t) - I(1,\ 4t)$$

$$-I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 6t) + I(1,\ 8t) - 2I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

さて，$I(1,\ b) = \frac{1}{1+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right) - 1\right\}$ となるので，

$$|I(1,\ b)| \leqq \frac{1}{1+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right| + |-1|\right\} \leqq \frac{1}{1+b^2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2} + 1\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{1+b^2}$$

これより $\lim_{b\to\infty} I(1,\ b) = 0$ なので，k が自然数のとき $\lim_{t\to\infty} I(1,\ kt) = 0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = I(1,\ 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

［解　説］

定積分の計算と極限の融合問題です。誘導が細かいので方針に混乱はないでしょう。

7　　　　［東京医歯大］

(1)　$F'(t)=f(t)$ とおくと，$\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$ となり，

$$\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du=\int_0^x\{F(u)-F(0)\}du=\int_0^x F(u)du-F(0)x$$

$$\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du=\int_x^1\{F(1)-F(u)\}du=F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du$$

すると，与えられた条件式は，

$$F(x)-F(0)=4ax^3+(1-3a)x$$
$$+\int_0^x F(u)du-F(0)x+F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺を x で微分すると，

$$F'(x)=12ax^2+(1-3a)+F(x)-F(0)-F(1)+F(x)$$
$$f(x)=12ax^2+1-3a+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①に $x=0$ を代入すると，$0=F(1)-\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots③$

①に $x=1$ を代入すると，$F(1)-F(0)=4a+1-3a+\int_0^1 F(u)du-F(0)$ より，

$$F(1)=a+1+\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots④$$

③④から，$a+1=0$ となり，$a=-1$ である。

すると，②から，$f(x)=-12x^2+4+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤に $x=0$，$x=1$ を代入すると，

$$f(0)=4+F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑥,\quad f(1)=-8+F(1)-F(0)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$f(0)+f(1)=4-8=-4\cdots\cdots⑧$である。

(2)　⑤の両辺を x で微分すると，$f'(x)=-24x+2F'(x)=-24x+2f(x)\cdots\cdots\cdots⑨$

ここで，$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，⑨から，

$$g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}\{-24x+2f(x)\}$$
$$=-24xe^{-2x}$$

(3)　(2)より，$g(x)=-24\int xe^{-2x}dx$ となり，C を定数として，

$$g(x)=12xe^{-2x}-12\int e^{-2x}dx=12xe^{-2x}+6e^{-2x}+C=6(2x+1)e^{-2x}+C$$

すると，$f(x)=e^{2x}g(x)$ より，$f(x)=6(2x+1)+Ce^{2x}$ となり，⑧から，

$$(6+C)+(18+Ce^2)=-4,\quad C=-\frac{28}{1+e^2}$$

以上より，$f(x)=6(2x+1)-\dfrac{28}{1+e^2}e^{2x}$ である。

［解　説］

いわゆる微分型の積分方程式を解く問題です。問題文で与えられた関係式には驚きますが，誘導がていねいなので，方針に迷うことはないでしょう。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

(1)　$f(t)=e^t-1-t$ とおくと，$f'(t)=e^t-1$

　すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，これより $f(t)\geqq 0$ であり，

$$1+t\leqq e^t\ \cdots\cdots\cdots①$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ とし，$u=\cos x$ とおくと $du=-\sin x\,dx$ から，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{u^2}du=1+\Big[-\frac{1}{u}\Big]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

(3)　①より，$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}$ となり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\geqq\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

　また，①より $1+\sin x\leqq e^{\sin x}$ となり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で $e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx\ \cdots\cdots\cdots③$$

　ここで，(2)の結果を参照すると，②③から，

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$$

［解　説］

　定積分と不等式についての問題です。(2)の結果が(3)へのざっくばらんな誘導となっています。なお，(2)の定積分の計算は頻出です。

９　　［長崎大］

(1)　$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して，

$$F_2(x)=\int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^2}{2}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x te^{-t}\,dt=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)$$

$$F_1(x)=\int_0^x \frac{t^1}{1!}e^{-t}\,dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+F_0(x)$$

(2)　$F_0(x)=\int_0^x e^{-t}\,dt=-\Big[e^{-t}\Big]_0^x=-(e^{-x}-1)=1-e^{-x}$

$$F_1(x)=-xe^{-x}+F_0(x)=-xe^{-x}+1-e^{-x}=1-(1+x)e^{-x}$$

$$F_2(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+1-(1+x)e^{-x}=1-\Big(1+x+\frac{x^2}{2}\Big)e^{-x}$$

(3)　$F_n(x)=\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^n}{n!}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+F_{n-1}(x)$

すると，$n\geqq 1$ で，$F_n(x)=F_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\{F_k(x)-F_{k-1}(x)\}$ より，

$$F_n(x)=1-e^{-x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}=1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

この式は $n=0$ のときも成立している。

(4)　$p(x)=x^n$ のとき，$p'(x)=nx^{n-1}$，$p''(x)=n(n-1)x^{n-2}$ となり，

$$p'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}=\frac{n!}{(n-3)!}x^{n-3}$$

$$p^{(4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}=\frac{n!}{(n-4)!}x^{n-4}$$

すると，帰納的に，$p^{(k)}(x)=\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ である。

さて，$n!F_n(x)=\int_0^x t^ne^{-t}\,dt$ より，(3)の結果を代入すると，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!\Big(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\Big)=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

ここで，$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ となるので，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

［解　説］

定積分と関数列の融合問題です。本問も非常に細かな誘導がつけられています。なお，$p^{(k)}(x)$ について，気になるのであれば数学的帰納法です。

10　　　　［名古屋大］

(1)　$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ に対して，$I_{n+2}=\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx$ より，

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1 \frac{x^n(1+x^2)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n\,dx=\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\leqq\frac{x^n}{x^2+1}$ より，$0\leqq\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\leqq\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$

$$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$I_{n+2}\geqq 0$ となり，①から $I_n\leqq\frac{1}{n+1}\ \cdots\cdots\cdots③$

②③より，$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\frac{1}{n+1}\ \cdots\cdots\cdots④$

(3)　$n\geqq 3$ のとき，②から $0\leqq I_{n+2}\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq I_{n-1}\leqq I_{n-2}$ となるので，①より，

$$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+2}\leqq 2I_n\,,\ \ \frac{1}{n-1}=I_{n-2}+I_n\geqq 2I_n$$

よって，$\frac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\frac{1}{2(n-1)}$ から，$\frac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\frac{n}{2(n-1)}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$$

(4)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ に対して，$a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$ とおく。

①から，$I_{2n-1}+I_{2n+1}=\frac{1}{2n}$ となるので，$a_n=(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})$ より，

$$\begin{aligned}S_n&=(I_1+I_3)-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)-(I_7+I_9)+\cdots+(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})\\&=I_1+(-1)^{n-1}I_{2n+1}\end{aligned}$$

ここで，④より $\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となるので，$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}I_{2n+1}=0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\Big[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

［解　説］

定積分と極限の融合問題です。問題文にも暗示されているように，(1)→(2)→(3)という流れと，(1)→(2)→(4)という流れで，設問が構成されています。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［新潟大］

(1)　$f_n(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-(1+x)\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}$ ………①

(i)　$(-x)^3\neq 1\ (x\neq -1)$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=\frac{1-(-x)^{3(n+1)}}{1-(-x)^3}=\frac{1-(-1)^{3(n+1)}\cdot x^{3(n+1)}}{1+x^3}=\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{1-x+x^2}=(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(ii)　$(-x)^3=1\ (x=-1)$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=n+1$ となり，$f_n(-1)=\dfrac{1}{1+1+1}-(1-1)(n+1)=\dfrac{1}{3}$

これは，②に $x=-1$ をあてはめた値と一致する。

(i)(ii)より，$f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ ………③

(2)　③より $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx$ ………④

ここで，$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$\frac{3}{4}\leqq x^2-x+1\leqq 1,\ 1\leqq\frac{1}{x^2-x+1}\leqq\frac{4}{3}$$

すると，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\leqq\int_0^1\frac{4}{3}x^{3n+3}dx=\frac{4}{3}\Big[\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\Big]_0^1=\frac{4}{3(3n+4)}$ ………⑤

④⑤より，$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ ………⑥

(3)　①より，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx$ ………⑦

ここで，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)dx$ に注意して，I_k を

$I_k=\displaystyle\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)dx$ とすると，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\sum_{k=0}^{n}I_k$ となり，

$$I_k=\int_0^1(-1)^{3k}x^{3k}(1+x)dx=(-1)^k\int_0^1(x^{3k}+x^{3k+1})dx$$

$$=(-1)^k\Big[\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}\Big]_0^1=(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)\cdots\cdots\cdots⑧$$

また，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ と変形し，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，

$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta$ となり，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta=2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \cdots\cdots\cdots⑨$$

そこで，⑦から，$\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1 f_n(x)dx$

$$\sum_{k=0}^{n} I_k=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1 f_n(x)dx$$

⑧⑨を代入すると，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi-\int_0^1 f_n(x)dx\cdots\cdots\cdots⑩$$

さらに，⑥から，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\frac{4}{3(3n+4)}\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right|=0,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0\cdots\cdots\cdots⑪$$

⑩⑪より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$ である。

［解 説］

定積分と無限級数の融合問題です。(3)は唐突な印象を与えますが，(1)と(2)での巧みな誘導のため，与えられた①を 0 から 1 まで積分するという方針に混乱はないでしょう。記述量は多めですが，内容は基本の組合せとなっています。