

1

[東京工大]

数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。また, 数列 $\{b_n\}$ を, $b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と定める。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) すべての n に対して, 不等式 $b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

2

[新潟大]

一般項が $a_n = \frac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。
- (3) 2 以上の整数 k に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{kn}}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

3

[大阪大]

円上の5点A, B, C, D, Eは反時計回りにこの順に並び、円周を5等分している。5点A, B, C, D, Eを頂点とする正五角形を R_1 とする。 $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{CD} = \vec{c}$ とおき、 \vec{a} の大きさを x とする。

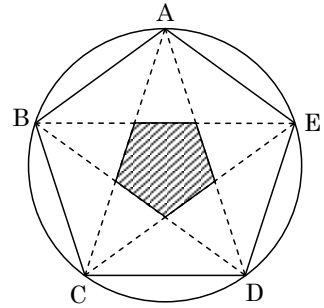
(1) \overline{AC} の大きさを y とすると、 $x^2 = y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2) \overline{BC} を \vec{a} , \vec{c} を用いて表せ。

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の5つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。 R_2 の1辺の長さを x を用いて表せ。

(4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の5つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし、 R_n の面積を S_n とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k \text{ を求めよ。}$$



斜線部分が R_2

4

[千葉大]

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_5 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ が収束することを示し、その和を求めよ。

5

[神戸大]

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 x に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

- (2) 次の等式を満たす S の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

- (3) 不等式 $\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し、 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。

6

[筑波大]

xy 平面において、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また、実数 a に対して、 a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号 $[\]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

- (1) n を $0 \leq n \leq N$ を満たす整数とする。点 $(n, 0)$ と点 $(n, N \sin(\frac{\pi n}{2N}))$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。
- (2) 直線 $y = x$ と、 x 軸、および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。
- (3) 曲線 $y = N \sin(\frac{\pi x}{2N})$ ($0 \leq x \leq N$) と、 x 軸、および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2)の $A(N)$ に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。

7

[神戸大]

k を 2 以上の整数とする。また、 $f(x) = \frac{1}{k} \left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right)$ とおく。以下の問いに

答えよ。

- (1) $x > 0$ において、関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。
- (2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとき、 $x_n > 1$ を示せ。
- (3) (2)の数列 $\{x_n\}$ に対し、 $x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$ を示せ。また $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

8

[筑波大]

$f(x) = \int_0^x \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt$ とし, $c \geq \pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = c$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n=1, 2, \dots$) で定める。

- (1) $f(\pi)$ を求めよ。また, $x \geq \pi$ のとき, $0 < f'(x) \leq \frac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。
- (2) すべての自然数 n に対して, $a_n \geq \pi$ が成り立つことを示せ。
- (3) すべての自然数 n に対して, $|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi} |a_n - \pi|$ が成り立つことを示せ。また, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。