1　　　　　　［東京工大］

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}=4-\dfrac{1}{a_n-2}$ に対して，$a_1=5$ から，$a_2=4-\dfrac{1}{5-2}=\dfrac{11}{3}$

$$a_3=4-\dfrac{1}{\frac{11}{3}-2}=\dfrac{17}{5},\quad a_4=4-\dfrac{1}{\frac{17}{5}-2}=\dfrac{23}{7}$$

これより，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ と推測できるので，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{6-1}{2-1}=5$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=\dfrac{6k-1}{2k-1}$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=4-\dfrac{1}{a_k-2}=4-\dfrac{1}{\frac{6k-1}{2k-1}-2}=4-\dfrac{2k-1}{2k+1}=\dfrac{6k+5}{2k+1}=\dfrac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}$$

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

(2)　$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k(6k-1)}{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\dfrac{1}{2k-1}\Big)$ とおくと，$s_n\leqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

さらに，$t_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ とおくと，$s_n\leqq 3t_n+2n$ となり，

$$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{s_n}{t_n}\leqq\dfrac{3t_n+2n}{t_n}=3+\dfrac{2n}{t_n}=3+\dfrac{4}{n+1}$$

(3)　$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\dfrac{1}{2k-1}\Big)>\sum_{k=1}^{n}3k=3t_n$ から，$b_n=\dfrac{s_n}{t_n}>\dfrac{3t_n}{t_n}=3$ となり，(2)から，

$$3<b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$$

よって，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{4}{n+1}\to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$ である。

［解　説］

丁寧な誘導のついた数列の極限の問題です。なお，(1)は普通に，推測→帰納法のパターンで記していますが，式変形により漸化式を解くことも可能です。

２　　　　　　　　［新潟大］

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)n \leqq 1\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n = n^{n-1}$ となり，

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leqq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

(2)　$\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(3)　2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle b_n = \log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log\frac{a_{kn}}{a_n}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!}\left(\frac{1}{k^k n^{k-1}}\right)^n = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!} - \log k^k n^{k-1}\\
&= \frac{1}{n}\log\{(n+1)(n+2)\cdots(kn)\} - k\log k - (k-1)\log n\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn)\} - (k-1)\log n - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn) - (k-1)n\log n\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn) - (kn-n)\log n\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots+\log\frac{n+(k-1)n}{n}\right\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{(k-1)n}{n}\right)\right\} - k\log k
\end{aligned}$$

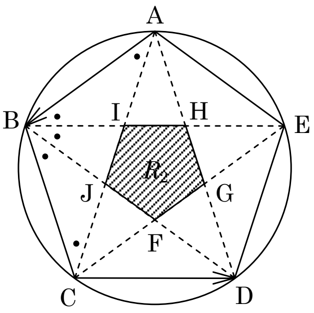
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \int_0^{k-1}\log(1+x)\,dx - k\log k\\
&= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^{k-1} - \int_0^{k-1}dx - k\log k\\
&= k\log k - (k-1) - k\log k = 1-k
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{b_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{1-k}$ である。

［解　説］

誘導のない極限の設問 3 題で構成されています。しかも，各問の相互関係もあまり感じられません。

3　　［大阪大］



(1)　5 点 A, B, C, D, E は円周を 5 等分しているので,

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}$$

これより，右図のように，対角線の交点を F，G，H，I，J とおくと，△ABC と△AIB は相似となり，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AI}=\mathrm{AC}:\mathrm{AB}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}+\angle\mathrm{DBC}$ であるので，$\angle\mathrm{CIB}=\angle\mathrm{CBI}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=y$ とすると，

$$\mathrm{AI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CB}=y-x\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x:(y-x)=y:x$ となり，$x^2=y(y-x)\cdots\cdots\cdots③$

(2)　③より，$y^2-xy-x^2=0$ となり，$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\cdots\cdots\cdots④$

また，AD // BC，$\mathrm{AD}=y$，$\mathrm{BC}=x$ なので，④から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\vec{c}$ となり，

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$

(3)　R_2 の 1 辺 IJ の長さは，$\mathrm{IJ}=\mathrm{AJ}-\mathrm{AI}=x-(y-x)=2x-y$ となるので，④から，

$$\mathrm{IJ}=2x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　相似な図形 R_{n+1} と R_n の面積比は，(3)より $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ であるので，

$$S_{n+1}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}S_n$$

すると，$\dfrac{1}{S_1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\dfrac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{1+\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{9-3\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

［解　説］

正五角形を題材とした有名問題です。三角関数をベースに考えなくてもよいように，相似に着目させる誘導がついています。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大］

(1)　$a_1=2$ で，$b_n=1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ とおくと，$a_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ ……①となり，

$$b_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \ a_2=1+\frac{1}{b_1}=1+2=3$$

$$b_2=1-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)=\frac{1}{6},\ \ a_3=1+\frac{1}{b_2}=1+6=7$$

$$b_3=1-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\Big)=\frac{1}{42},\ \ a_4=1+\frac{1}{b_3}=1+42=43$$

$$b_4=1-\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}\Big)=\frac{1}{1806},\ \ a_5=1+\frac{1}{b_4}=1+1806=1807$$

(2)　①より，$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{b_n}$ から $a_{n+1}\neq 1$ で，しかも $a_1\neq 1$ なので，$a_n\neq 1$ である。

これより，$b_n=\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$ ……②となり，$n\geqq 2$ で $b_{n-1}=\dfrac{1}{a_n-1}$ ……③である。

すると，②－③から，$b_n-b_{n-1}=\dfrac{1}{a_{n+1}-1}-\dfrac{1}{a_n-1}$ となり，

$$-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1},\ \ \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}$$

よって，$n\geqq 2$ で，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$ ………④

$n=1$ のときは，$a_2-1=3-1=2$，$a_1(a_1-1)=2\cdot 1=2$ となり，このときも④は成立しているので，$n\geqq 1$ で，

$$a_{n+1}=a_n(a_n-1)+1 \text{ ………⑤}$$

(3)　⑤から，$a_{n+1}-a_n=a_n{}^2-2a_n+1=(a_n-1)^2>0$ となり，$a_n\geqq a_1=2$ なので，

$$a_{n+1}\geqq a_n(2-1)+1=a_n+1$$

すると，$a_n\geqq 2+(n-1)=n+1$ から，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となる。

さて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-b_n$ なので，②から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{a_{n+1}-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\Big)=1$$

［解　説］

漸化式と極限の問題です。与えられた漸化式は扱いにくそうですが，誘導に従えばそれほどではありません。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［神戸大］

(1)　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}=\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k=\frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}=\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$ より，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①の両辺を 0 から 1 まで積分すると，

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx-\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり，

$$\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1=\log\frac{e+1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=(-1)^0\int_0^1 e^0\,dx+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big[\frac{e^{-kx}}{-k}\Big]_0^1=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}\end{aligned}$$

②より，$\displaystyle 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-\log\frac{e+1}{2}=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2}-1=\log\frac{e+1}{2e}$$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ において，$1+e^{-x}\geqq 1$ より，

$$\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\int_0^1 e^{-(n+1)x}dx=\Big[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1-e^{-(n+1)}}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$$

すると，$\displaystyle\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|=\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$ から，$n\to\infty$ のとき，

$$\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|\to 0,\ (-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\to 0$$

ここで，(2)から，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ なので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2e}$$

［解　説］

定積分と無限級数の融合問題です。細かく誘導がつけられているので，方針に迷うことはないでしょう。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　点$(n,\ 0)$と点$\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$を結ぶ線分上の格子点の座標を$(n,\ l)$とおくと，

$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]$より，その個数は$\left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]+1$である。

(2)　直線$y=x$, x軸，$x=N$で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数$A(N)$は，

$$A(N)=1+\sum_{k=1}^{N}(k+1)=\sum_{k=1}^{N+1}k=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　曲線$y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$$(0\leqq x\leqq N)$，$x$軸，直線$x=N$で囲まれた領域(境界含む)

にある格子点の個数$B(N)$は，

$$B(N)=1+\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]+1\right\}=N+1+\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\cdots\cdots\cdots②$$

さて，一般的に，$[a]\leqq a<[a]+1$から，$a-1<[a]\leqq a$となり，

$$N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-1<\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-N<\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

②より，$1+N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)<B(N)\leqq N+1+N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$となり，①から，

$$\frac{2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}<\frac{B(N)}{A(N)}\leqq\frac{2N+2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$$

さて，$I(N)=\dfrac{2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$，$J(N)=\dfrac{2N+2+2N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$とおくと，

$$I(N)=\frac{2}{(N+1)(N+2)}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$J(N)=\frac{2}{N+2}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

すると，$N\to\infty$のとき，$\dfrac{\pi}{2N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$より，

$$I(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi},\quad J(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi}$$

したがって，$I(N)<\dfrac{B(N)}{A(N)}\leqq J(N)$から，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}=\frac{4}{\pi}$となる。

［解　説］

格子点の個数を題材にした数列の極限の問題ですが，それに区分求積が絡むという味付けが施されています。

7　　［神戸大］

(1)　k を 2 以上の整数とし，$f(x)=\dfrac{1}{k}\Bigl((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\Bigr)\ (x>0)$ に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{k}\Bigl(k-1-\frac{k-1}{x^k}\Bigr)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{x^k-1}{x^k}$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，

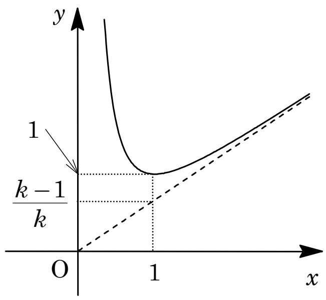
$x\to\infty$ のとき，漸近線 $y=ax+b$ の存在を仮定すると，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\Bigl(k-1+\frac{1}{x^k}\Bigr)=\frac{k-1}{k}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\Bigl(f(x)-\frac{k-1}{k}x\Bigr)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}=0$$

よって，漸近線は，$x=0$ および $y=\dfrac{k-1}{k}x$ となり，

$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ のとき，$x_n>1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i)　$n=1$ のとき　$x_1>1$ より成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$x_l>1$ と仮定すると, (1)から $x_{l+1}=f(x_l)>1$ となる。

よって，$n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n>1$ である。

(3)　$x_{n+1}=f(x_n)$，$1=f(1)$ より，$x_{n+1}-1=f(x_n)-f(1)\cdots\cdots\cdots$①

ここで，$x_n>1$ のとき，平均値の定理より，ある $c_n\ (1<c_n<x_n)$ において，

$$f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$ となるので,

$$x_{n+1}-1=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{c_n^k-1}{c_n^k}(x_n-1)=\frac{k-1}{k}\Bigl(1-\frac{1}{c_n^k}\Bigr)(x_n-1)$$

さらに，$k\geqq2$ で $0<1-\dfrac{1}{c_n^k}<1$ から，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)\cdots\cdots\cdots$③

すると，$x_n-1>0$ であり, ③から $n\geqq2$ において,

$$0<x_n-1<(x_1-1)\Bigl(\frac{k-1}{k}\Bigr)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

よって，$0<\dfrac{k-1}{k}<1$ から, ④より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ である。

［解　説］

非常に丁寧な誘導のついた数列の極限問題です。(1)で問われている斜めの漸近線, (3)の平均値の定理の利用については，必須技法の 1 つです。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　$f(x)=\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ に対して，$f(\pi)=\int_0^\pi \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ となる。

$t=\pi\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dt=\frac{\pi}{\cos^2\theta}d\theta=\pi(1+\tan^2\theta)d\theta$ より，

$$f(\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\pi}{\pi^2(\tan^2\theta+1)}\cdot\pi(1+\tan^2\theta)d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$$

また，$f'(x)=\frac{4\pi}{x^2+\pi^2}$ となり，$x\geqq\pi$ のとき $x^2+\pi^2\geqq 2\pi^2$ から，

$$0<\frac{1}{x^2+\pi^2}\leqq\frac{1}{2\pi^2},\ 0<f'(x)\leqq\frac{1}{2\pi^2}\cdot 4\pi=\frac{2}{\pi}$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ が $a_1=c\geqq\pi$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たすとき，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=c\geqq\pi$ より成立。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k\geqq\pi$ と仮定する。

このとき，(1)より $\pi=f(\pi)$ で，しかも $f'(x)>0$ から $f(x)$ は単調増加するので，

$$a_{k+1}-\pi=f(a_k)-f(\pi)\geqq 0$$

よって，$a_{k+1}\geqq\pi$ となり，$n=k+1$ のときも成立。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つ。

(3)　まず，$a_n=\pi$ のときは $a_{n+1}=f(\pi)=\pi$ となり，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ は成立。

次に，$a_n>\pi$ のときは，平均値の定理より，

$$f(a_n)-f(\pi)=f'(b_n)(a_n-\pi)\quad(\pi<b_n<a_n)$$

すると，$a_{n+1}-\pi=f(a_n)-f(\pi)$ と合わせて，

$$|a_{n+1}-\pi|=|f(a_n)-f(\pi)|=|f'(b_n)||a_n-\pi|\quad(\pi<b_n<a_n)$$

ここで，(1)から $0<f'(b_n)\leqq\frac{2}{\pi}$ なので，$|f'(b_n)||a_n-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ となり，

$$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$$

以上より，すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立ち，

$$|a_n-\pi|\leqq|a_1-\pi|\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}=(c-\pi)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

すると，$n\to\infty$ のとき $(c-\pi)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$\lim_{n\to\infty}|a_n-\pi|=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\pi$$

［解　説］

平均値の定理を利用して，数列の極限を求める有名問題です。