2019 入試対策

2次数学アーカイブ

微分と積分

文系＋理系

2001−2018

外林康治 編著

電送数学舎

微分と積分

【問題一覧】

1 $f(x)=x^4+x^3-3x^2$ とおく。曲線 $y=f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただ一つ引けるとし，しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの a の値を求めよ。 [2001 大阪大・理]

2 xy 平面上の曲線 $C: y=x^3$ 上の点 P における接線を，P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする。C と L が，相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。 [2001 京都大・理]

3 頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1) 円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2) 円錐の体積の最小値を求めよ。 [2002 一橋大]

4 実数 t に対して，u の 3 次方程式 $u^3-3u+2t=0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて，$x=f(t)$，$y=-2t$ （t は実数）と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め，$f(t)$ のグラフをかけ。 [2003 千葉大・理]

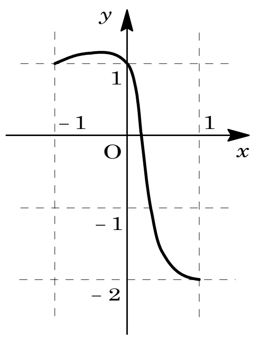
5 放物線 $C: y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする。線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。 [2003 大阪大・文]

6 区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が，

$$f(-1)=f(0)=1,\ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geqq -1$ を示せ。 [2004 京都大・文]



７ 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。 [2004 東京大・文]

８ a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\ g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1) 2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた範囲に属する a に対して, 2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くとき, 少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。 [2005 一橋大]

９ $0\leqq k\leqq 1$ を満たす実数 k に対して, xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y\geqq x^2$, $y\leqq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y\leqq x^2$, $y\geqq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y\leqq -x^2+2x$, $y\geqq kx$ で表される領域

(1) 領域 $D\cup(E\cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2) (1)で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と, その最小値を求めよ。

[2006 名古屋大・文]

10 (1) 関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

(2) 方程式 $f(x)=a$ （a は実数）が相異なる 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもつとする。$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3) a が(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。 [2007 名古屋大・理]

11 xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1) $-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき, k の満たす条件を求めよ。

(2) k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。 ［2007 大阪大・文］

12 放物線 $C: y=x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。 ［2008 九州大・文］

13 $f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1) $f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2) α が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3) $f(x)=0$ の解を小さい順に α_1，α_2，α_3 とすれば,

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\quad g(\alpha_2)=\alpha_1,\quad g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。 ［2009 神戸大・理］

14 k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C: y=kx^2\ (x\geqq 0)$ と 2 つの直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha-\beta$ の値を求めよ。

(2) $\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ。

(3) 曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。 ［2010 広島大・文］

15 3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき, V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。 ［2010 東京大・理］

16 xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。 ［2011 京都大・理］

17 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<q$)。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 $p,\ q$ もそれぞれ求めよ。 ［2012 九州大・文］

18 a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。 ［2012 一橋大］

19 a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。 ［2012 名古屋大・理］

20 c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。 ［2013 神戸大・理］

21 原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。 [2013 一橋大]

22 関数 $f(x)$ を $f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n \leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1) $f(x) \geqq x$ であることを示せ。

(2) $f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3) $0 \leqq x \leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4) $0 \leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)dx$ を求めよ。 [2014 岡山大・文]

23 $a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1) $M(a)$ を求めよ。

(2) 実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3) a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。 [2015 東北大・文]

24 実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を a, b を用いて表せ。

(2) $b \geqq 0$ のとき，M を a, b を用いて表せ。

(3) a, b が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。 [2015 東京医歯大]

25 C_1，C_2をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y=-x^2+2x\ (0\leqq x\leqq 2),\ C_2 : y=-x^2-2x\ (-2\leqq x\leqq 0)$$

また，aを実数とし，直線$y=a(x+4)$をlとする。

(1) 直線lとC_1が異なる２つの共有点をもつためのaの値の範囲を求めよ。

以下，aが(1)の条件を満たすとする。このとき，lとC_1で囲まれた領域の面積をS_1，x軸とC_2で囲まれた領域でlの下側にある部分の面積をS_2とする。

(2) S_1をaを用いて表せ。

(3) $S_1=S_2$を満たす実数aが$0<a<\dfrac{1}{5}$の範囲に存在することを示せ。

［2015 九州大・理］

26 aを実数とし，$f(x)=x^3-3ax$とする。区間$-1\leqq x\leqq 1$における$|f(x)|$の最大値をMとする。Mの最小値とそのときのaの値を求めよ。 ［2016 一橋大］

27 関数$f(x)=8x^3-6x-1$について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。

(2) $a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$とするとき，$f(a)$の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$を証明せよ。 ［2016 岡山大］

28 座標平面において，x軸上に３点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$があり，曲線$C : y=x^3+ax^2+bx$がx軸とこの３点で交わっているものとする。ただし，a，bは実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線Cとx軸で囲まれた２つの部分の面積の和をSとする。Sをαとβの式で表せ。

(2) βの値を固定して，$0<\alpha<\beta$の範囲でαを動かすとき，Sを最小とするαをβの式で表せ。 ［2016 九州大・文］

29 曲線 $C: y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ を考える。

(1) C と直線 $L: y=-x+t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ。

(2) C と L が異なる 4 点で交わるとし，その交点を x 座標が小さいものから順に，P_1，P_2，P_3，P_4 とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|+|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|}=4$ となるような t の値を求めよ。

(3) t が(2)の値をとるとき，C と線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

［2016 大阪大・文］

30 a, b, c を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。　［2017 筑波大・理］

31 $a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t\geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2) (1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

［2017 広島大・理］

32 $a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

(2) 接線 l は，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。　［2017 金沢大・文］

33 a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

［2017 名古屋大・文］

34 $a>0$ とし，$f(x)=x^3-3a^2x$ とおく。

(1) $x\geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2) 次の 2 条件を満たす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

［2018 東京大］

35 関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt$ を満たすとし，$\int_0^2 f(t)dt=a$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(2)$ を a を用いて表せ。

(2) a の値を求めよ。

(3) k は定数とする。$y=xf(x)-k$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

［2018 金沢大・文］

36 a を正の数とし，t は $0\leqq t<a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3) s は $0\leqq s\leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

［2018 千葉大］

微分と積分

【解答例一覧】

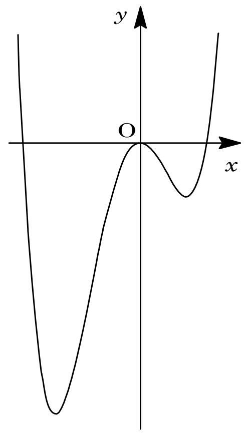
1 ［2001 大阪大・理］

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より，$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$

接点を $(t,\ t^4+t^3-3t^2)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^4+t^3-3t^2)=(4t^3+3t^2-6t)(x-t)$$

$$y=(4t^3+3t^2-6t)x-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots①$$



①が点 $(0,\ a)$ を通るので，

$$a=-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g(t)=-3t^4-2t^3+3t^2$ とおくと，

$$g'(t)=-12t^3-6t^2+6t$$

$$=-6t(2t-1)(t+1)$$

点 $(0,\ a)$ を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は，②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

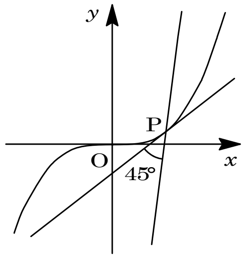
すると，右表において $2>\dfrac{5}{16}$ なので，$a=2$ のときである。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{16}$	$\searrow$

［解 説］

問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは，4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。

$\boxed{2}$ ［2001 京都大・理］



$C: y=x^3$ より $y'=3x^2$ となるので，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における接線の傾きは $3t^2$ となる。この接線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta=3t^2$ である。

また，この接線を P のまわりに $45°$ 回転して得られる直線 L と, x 軸の正の向きとのなす角を φ とすると,

$$\tan\varphi=\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan 45°}{1-\tan\theta\tan 45°}=\frac{3t^2+1}{1-3t^2}$$

よって，$t\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，直線 $L: y-t^3=\dfrac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)$

なお，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，直線 L は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，条件を満たさない。

すると, C と L の共有点は，$x^3=\dfrac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)+t^3$ より,

$$x^3-t^3-\frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)=0,\ (x-t)\left(x^2+tx+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right)=0$$

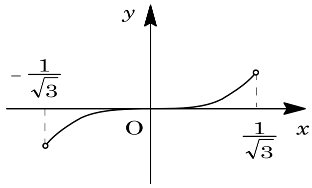
よって，$x=t$ または $x^2+tx+t^2+\dfrac{3t^2+1}{3t^2-1}=0$ ………①

求める条件は, ①が $x\neq t$ の異なる 2 実数解をもつことより,

$$t^2+t^2+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\neq 0\ \cdots\cdots②,\ D=t^2-4\left(t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right)>0\ \cdots\cdots③$$

②は $\dfrac{9t^4+1}{3t^2-1}\neq 0$ となるので，つねに成立する。

③より，$\dfrac{9t^4+9t^2+4}{3t^2-1}<0$，$3t^2-1<0$



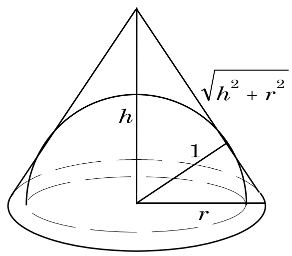
よって，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，点 P の範囲を図示すると右図のようになる。

［解 説］

方針に迷いが生ずることはなく，どんどん計算を進めていくことができます。

$\boxed{3}$ ［2002 一橋大］

(1) 円錐の底面の半径を r, 高さを h とすると, 母線の長さは $\sqrt{h^2+r^2}$ となる。



このとき, 右図の断面に注目して,

$$1:r=h:\sqrt{h^2+r^2}\,,\ \ \sqrt{h^2+r^2}=rh$$

$$h^2+r^2=r^2h^2,\ \ r^2=\frac{h^2}{h^2-1}$$

ここで, 円錐の表面積を S とすると,

$$S=\pi r^2+\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\sqrt{h^2+r^2}=\pi r^2+\pi r^2h=\pi(1+h)r^2$$

$$=\pi(1+h)\cdot\frac{h^2}{h^2-1}=\pi\cdot\frac{h^2}{h-1}=\pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^2}}$$

ここで, $\frac{1}{h}=t$ とおくと, $h>1$ より $0<t<1$ となり, さらに $f(t)=t-t^2$ とすると, $S=\frac{\pi}{f(t)}$ である。

$f(t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqq\frac{1}{4}$ より, $S\geqq 4\pi$ となり, S の最小値は 4π である。

(2) 円錐の体積を V とすると,

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^3}{h^2-1}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^3}}$$

(1)と同様にして, $g(t)=t-t^3$ とおくと, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{g(t)}$

$$g'(t)=1-3t^2$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

右表より, $g(t)\leqq\frac{2}{3\sqrt{3}}$ となる。これより, $V\geqq\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ となり, V の最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ である。

［解 説］

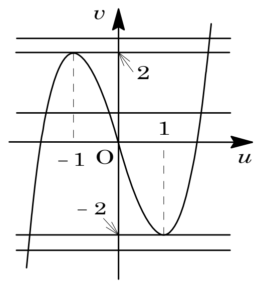
S の最小値は相加平均と相乗平均の関係を用いて求められましたが, V の最小値についてはうまくいきません。そこで, 考え直して作ったのが上の解です。

4 ［2003 千葉大・理］

(1) $u^3-3u+2t=0$ ……①より，$u^3-3u=-2t$ と変形すると，条件より，uv 平面上で $v=u^3-3u$ ……②と $v=-2t$ ……③の共有点のうち，u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

②より，$v'=3u^2-3=3(u+1)(u-1)$

すると，②のグラフは右図のようになり，③との共有点の様子から，次のように場合分けをする。

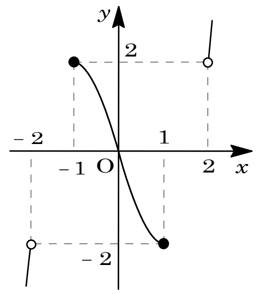


(i) $-2t<-2$，$2<-2t$ のとき ②と③は 1 つの共有点しかもたないので，その共有点が $(f(t),\ -2t)$ である。

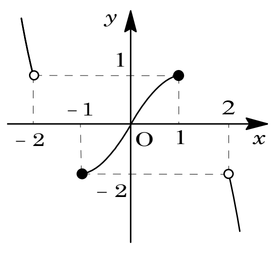
(ii) $-2t=\pm2$ のとき ②と③は 2 つの共有点をもつが，u 座標の絶対値が小さいのは接点の方で，$(f(t),\ -2t)=(\mp1,\ \pm2)$ (複号同順)となる。

(iii) $-2<-2t<2$ のとき ②と③は 3 つの共有点をもつが，u 座標の絶対値が小さいのは $-1<u<1$ の範囲にある共有点であり，その点が $(f(t),\ -2t)$ である。

以上より，$(x,\ y)=(f(t),\ -2t)$ と表される曲線は，$y=x^3-3x\ (x<-2,\ -1\leqq x\leqq1,\ 2<x)$ であり，図示すると右図のようになる。



(2) (1)と同様にして，①より $-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u=t$ と変形すると，$v=-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u$ ……④と $v=t$ の共有点のうち，u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

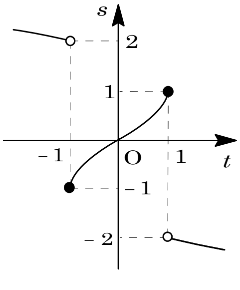


④より，$v'=-\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(u+1)(u-1)$

すると，$t=\pm1$ で $f(t)$ は不連続で，$(x,\ y)=(f(t),\ t)$ は，$y=-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x\ (x<-2,\ -1\leqq x\leqq1,\ 2<x)$ ……⑤で表される曲線を描き，図示すると右上図のようになる。

これより，点 $(t,\ f(t))$ の描く曲線は，⑤の曲線を直線 $y=x$ に関して対称移動したものであり，これを $s=f(t)$ とおくと，$t=-\dfrac{3}{2}s^3+\dfrac{3}{2}s\ (s<-2,\ -1\leqq s\leqq1,\ 2<s)$ である。

よって，このグラフは右図のようになる。

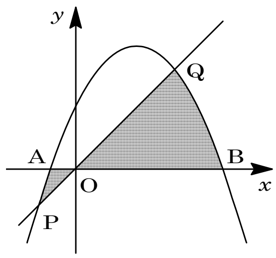


［解 説］

おもしろい問題ですが，(1)の誘導は少し使いにくいものです。

5 [2003 大阪大・文]

$C: y=-x^2+2x+1$ ……①，直線 $y=mx$ ……②に対して，



①と x 軸との交点 A, B の x 座標 a, b は，$-x^2+2x+1=0$ より，$x=1\pm\sqrt{2}$ なので，$a=1-\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$ となる。

①と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，

$$S_1=\int_a^b(-x^2+2x+1)\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3$$

また，①と②の交点 P, Q の x 座標 α, β は，$-x^2+2x+1=mx$ より，$x=\dfrac{-(m-2)\pm\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$ なので，

$$\alpha=\frac{-(m-2)-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2},\ \ \beta=\frac{-(m-2)+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$

①と②で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，

$$S_2=\int_\alpha^\beta(-x^2+2x+1-mx)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+4}\right)^3$$

条件から，線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と，線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいことより，$S_1=S_2$ となる。

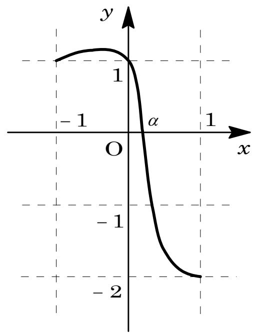
$$\sqrt{(m-2)^2+4}=2\sqrt{2},\ (m-2)^2+4=8,\ m-2=\pm2$$

$m\neq0$ より，$m=4$ である。

［解 説］

$S_1=S_2$ が発見できれば，後はいわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる基本的な頻出問題です。

6 ［2004 京都大・文］



$y=f(x)$ のグラフは $-1\leqq x\leqq 1$ で連続であり，x 軸との交点を $x=\alpha$ とすると，$0<\alpha<1$ となる。

右図より，$-1<x<\alpha$ で $f(x)>0$，$-1<x<0$ で $f(x)>1$ となっているので，

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} dx = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\alpha<x<1$ で $f(x)>-2$ より，

$$\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{1} (-2)\,dx = -2(1-\alpha) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > 1-2(1-\alpha) = -1+2\alpha > -1$$

［解 説］

定性的な問題で，昨年の名大・理系の選択題を思い出しました。符号付きの面積を考えると，結論が見えてきます。

7 ［2004 東京大・文］

(1) $f(x)=x^3-3x$ より，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数に等しいので，右表より，$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個，$a=\pm2$ のとき 2 個，$-2<a<2$ のとき 3 個である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(2) $f(x)=a$ とおくと，$g(x)=0$ は，

$a^3-3a=0$，$a=0,\ \pm\sqrt{3}$

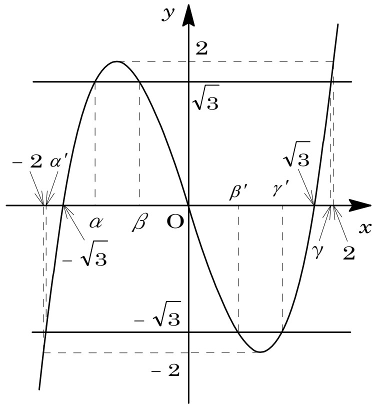
(i) $a=0$ のとき　$f(x)=0$ より $x=0,\ \pm\sqrt{3}$

(ii) $a=\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおく。

(iii) $a=-\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=-\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ とおく。



すると，$-2<\alpha'<-\sqrt{3}<\alpha<\beta<0<\beta'<\gamma'<\sqrt{3}<\gamma<2$ ……(∗)が成立するので，$g(x)=0$ を満たす実数 x は合計 9 個存在する。

(3) $h(x)=0$ より，$\{g(x)\}^3-3g(x)=0$ となり，$g(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$ である。

$g(x)=0$ のとき，$a=0,\ \pm\sqrt{3}$ であり, (2)より実数 x は 9 個存在する。

$g(x)=\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=\sqrt{3}$ より $a=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ となり，それぞれの a の値に対し, (1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

同様に，$g(x)=-\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=-\sqrt{3}$ より $a=\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ となり，それぞれの a の値に対し, (1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

さらに, (∗)から a の値に重複は存在しないので, x の値も重複はない。

よって，$h(x)=0$ を満たす実数 x は合計 27 個存在する。

［解 説］

実数解の個数を調べる頻出問題ですが，ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。図をたくさん書いて，思考過程を述べた方が明快です。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2005 一橋大]

(1)　放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつとき，$f(x)=g(x)$ は異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3},\ \ 3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

①の判別式 $D/4=4a^2-3\left(\frac{5}{3}a^2-3\right)=-a^2+9>0$ から，$-3<a<3$ となる。

(2)　$-3<a<3$ のとき，①の実数解は $x=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$ となる。これを $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とおくと, 2 つの放物線によって囲まれる図形 C_a の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}-(x^2-3)\right\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{9-a^2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

(3)　$y\leqq g(x)=-2(x-a)^2+\dfrac{a^2}{3}$ から，$y\leqq-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$

ここで，$h(a)=-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$ とおくと，$h(a)=-\dfrac{5}{3}\left(a-\dfrac{6}{5}x\right)^2+\dfrac{2}{5}x^2$

さて，$-3<a<3$ のとき，x を固定して，領域 $y\leqq g(x)$，すなわち $y\leqq h(a)$ の動く平面上の部分を考える。

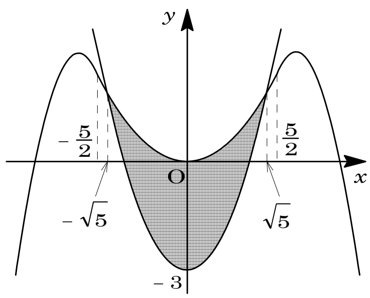
(i)　$\dfrac{6}{5}x\leqq-3\ \left(x\leqq-\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(-3)=-15-12x-2x^2$

(ii)　$-3<\dfrac{6}{5}x<3\ \left(-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$$y\leqq h\left(\frac{6}{5}x\right)=\frac{2}{5}x^2$$

(iii)　$\dfrac{6}{5}x\geqq3\ \left(x\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$$y<h(3)=-15+12x-2x^2$$



(i)～(iii)の部分と，領域 $y\geqq f(x)$ を合わせると，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形が得られ，図示すると右上図の網点部となる。この面積は,

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx=-\frac{3}{5}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})\,dx$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{5})^3=4\sqrt{5}$$

［解　説］

(3)では，領域の動く部分を，x の値を固定して，y のとり得る値の範囲として求めました。そこまで，やることはなかったのですが。

9 ［2006 名古屋大・文］

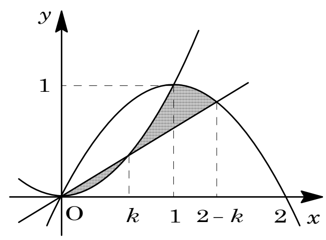
(1) $D: y \geqq x^2$, $y \leqq kx$, $E: y \leqq x^2$, $y \geqq kx$, $F: y \leqq -x^2+2x$, $y \geqq kx$ より，これらの 3 つの領域の境界線は，$y = x^2$ ……①，$y = kx$ ……②，$y = -x^2+2x$ ……③である。

①と②の交点は，$x^2 = kx$ より，$x = 0,\ k$

①と③の交点は，$x^2 = -x^2+2x$ より，$x = 0,\ 1$

②と③の交点は，$kx = -x^2+2x$ より，

$x = 0,\ 2-k$



これより，領域 $D\cup(E\cap F)$ を図示すると，右図の網点部となり，その面積 $m(k)$ は，

$$m(k) = \int_0^{2-k}(-x^2+2x-kx)\,dx - \int_0^1(-x^2+2x-x^2)\,dx + 2\int_0^k(kx-x^2)\,dx$$

$$= -\int_0^{2-k}x(x-2+k)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx - 2\int_0^k x(x-k)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot1^3 + 2\cdot\frac{1}{6}k^3 = \frac{1}{6}(k^3+6k^2-12k+6)$$

$$= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1$$

(2) (1)より，$m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k) = 0$ とすると，$k = -2\pm2\sqrt{2}$

$0 \leqq k \leqq 1$ より，$m(k)$ の値の変化は右表のようになり，$k = -2+2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

k	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$m'(k)$		$-$	0	$+$	
$m(k)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$k^3+6k^2-12k+6$ を k^2+4k-4 で割ると，

$$k^3+6k^2-12k+6 = (k^2+4k-4)(k+2) - 16k + 14$$

これより，最小値 $m(-2+2\sqrt{2})$ は，

$$m(-2+2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\right\} = \frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

［解 説］

名大では 1999 年に続き，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式の適用パズルが出題されました。ただ，本年の問題は，ひねりが加わっています。

10 ［2007 名古屋大・理］

(1) $f(x)=2x^3-3x^2+1$ より，

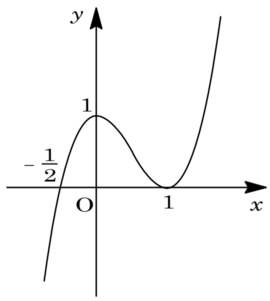
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

すると，$f(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	0	↗

また，$f(x)=(2x+1)(x-1)^2$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は，$x=-\dfrac{1}{2}$，1 である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2) (1)より，方程式 $f(x)=a$ は，$0<a<1$ のとき 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもち，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\cdots ①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$\alpha+\gamma=\dfrac{3}{2}-\beta$

②に代入して，$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)=-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)$

さて，$l=\gamma-\alpha$ より，

$$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2+4\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}$$

よって，$l=\sqrt{-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}}$

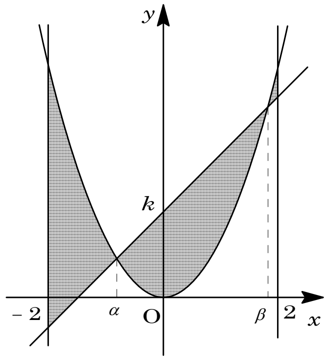
(3) (2)より，$l=\sqrt{-3\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+3}$ となり，$0<\beta<1$ から，

$$\frac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}$$

［解 説］

解 α，γ と β の関係をとらえるために，解と係数の関係に着目することがポイントとなっています。見かけよりスパイスの効いている 1 題です。

$\boxed{11}$ ［2007 大阪大・文］



(1) $C: y=x^2$ と $l: y=x+k$ の共有点の x 座標は,

$$x^2=x+k,\ x^2-x-k=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より, $(*)$の異なる 2 つの実数解が, ともに $-2<x<2$ に存在するので,

$$D=1+4k>0,\ k>-\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$f(x)=x^2-x-k$ として,

$$f(2)=4-2-k>0,\ k<2\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$f(-2)=4+2-k>0,\ k<6\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②③より, $-\dfrac{1}{4}<k<2$

(2) $(*)$より, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$ となり, この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。

すると, 求める 3 つの部分の面積の和 S は,

$$S=\int_{-2}^{\alpha}(x^2-x-k)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx+\int_{\beta}^{2}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^2-x-k)\,dx-2\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(x^2-k)\,dx-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

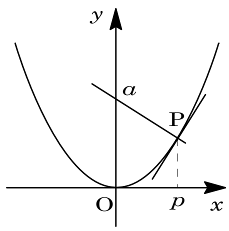
$$=2\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^2+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{16}{3}-4k+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+4k}\right)^3$$

［解 説］

積分計算がポイントです。計算を迅速にかつ正確に遂行するためには, 上記のような工夫が必要になります。

12　　[2008 九州大・文]

(1)　$C: y=x^2$ より，$y'=2x$ となり，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方向ベクトル，すなわち法線の法線ベクトルの成分は，$(1,\ 2p)$ と表せる。



これより, P における法線の方程式は,

$$(x-p)+2p(y-p^2)=0$$

$$x+2py-p-2p^3=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①が点$(0,\ a)$を通る条件は，$2pa-p-2p^3=0\cdots\cdots\cdots②$

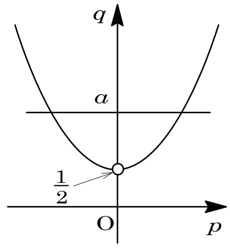
ここで，②の異なる実数解 p の個数が，点$(0,\ a)$を通る法線の本数に一致することより，

(i)　$p=0$ のとき

②は任意の実数 a で成立する。

(ii)　$p\neq 0$ のとき

②より，$2a-1-2p^2=0$，$a=p^2+\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots③$



さて，$p\neq 0$ のもとで，③の異なる実数解 p の個数は，直線 $q=a$ と $q=p^2+\dfrac{1}{2}$ のグラフの共有点の個数に一致する。

すると，右図より，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき p は 2 個存在し，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき p は存在しない。

(i)(ii)より，題意の法線の本数は，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき 3 本，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき 1 本である。

［解 説］

法線の本数についての基本的な問題です。ただし，$a=\dfrac{1}{2}$ の場合は要注意です。

13 ［2009 神戸大・理］

(1) $f(x)=x^3-3x+1$ に対して，

$$f'(x)=3x^2-3$$
$$=3(x-1)(x+1)$$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

すると，$-2\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，方程式 $f(x)=0$ の実数解は，$-2<x<-1$，$-1<x<1$，$1<x<2$ に１つずつある。

すなわち，$f(x)=0$ は，絶対値が２より小さい３つの相異なる実数解をもつ。

(2) α は $f(x)=0$ の解なので，$\alpha^3-3\alpha+1=0$ から，$\alpha^3=3\alpha-1$………(＊)

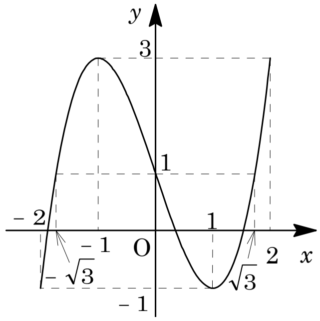
また，$g(x)=x^2-2$ から，$g(\alpha)=\alpha^2-2$ となり，(＊)より，

$$f(g(\alpha))=f(\alpha^2-2)=(\alpha^2-2)^3-3(\alpha^2-2)+1=\alpha^6-6\alpha^4+9\alpha^2-1$$
$$=(3\alpha-1)^2-6\alpha(3\alpha-1)+9\alpha^2-1$$
$$=9\alpha^2-6\alpha+1-18\alpha^2+6\alpha+9\alpha^2-1=0$$

よって，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解である。

(3) $f(-\sqrt{3})=f(0)=f(\sqrt{3})=1$ より，$f(x)=0$ の解を α_1，α_2，α_3（$\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$）としたとき，

$$-2<\alpha_1<-\sqrt{3},\ 0<\alpha_2<1,\ 1<\alpha_3<\sqrt{3}$$



すると，$g(x)=x^2-2$ より，

$$1<g(\alpha_1)<2,\ -2<g(\alpha_2)<-1,\ -1<g(\alpha_3)<1$$

よって，$g(\alpha_2)<g(\alpha_3)<g(\alpha_1)$ となる。

また，(2)から，$g(\alpha_1)$，$g(\alpha_2)$，$g(\alpha_3)$ も $f(x)=0$ の解であることより，

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\}=\{g(\alpha_1),\ g(\alpha_2),\ g(\alpha_3)\}$$

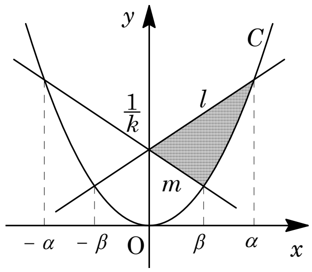
以上より，$g(\alpha_1)=\alpha_3$，$g(\alpha_2)=\alpha_1$，$g(\alpha_3)=\alpha_2$ である。

［解 説］

グラフの概形から考えると，(3)での $x=\pm\sqrt{3}$ を用いた解のとりうる範囲の評価は，難しくはないでしょう。なお，記憶をたどって調べたところ，1997 年に早大・理工で本問と同じ問題が出ています。

14 ［2010 広島大・文］

(1) 曲線 $y=kx^2$ は y 軸対称であり，また直線 $l:y=kx+\dfrac{1}{k}$ と $m:y=-kx+\dfrac{1}{k}$ は y 軸対称である。



そこで，$C:y=kx^2\ (x\geqq 0)$ と l，m の交点の x 座標をそれぞれ α，β とすると，曲線 $y=kx^2$ と l との交点の x 座標は，α，$-\beta$ となる。

さて，$y=kx^2$ と $y=kx+\dfrac{1}{k}$ を連立して，

$$kx^2=kx+\frac{1}{k},\ \ k^2x^2-k^2x-1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の解が $x=\alpha$，$-\beta$ となるので，$\alpha-\beta=\dfrac{k^2}{k^2}=1$

(2) (1)と同様にして，$(*)$から，$\alpha(-\beta)=-\dfrac{1}{k^2}$ より，$\alpha\beta=\dfrac{1}{k^2}$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=1+\frac{2}{k^2}$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=1+\frac{3}{k^2}$$

(3) 曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を S とすると，(1), (2)より，

$$S=\frac{1}{2}\Big(k\alpha^2+\frac{1}{k}\Big)\alpha-\frac{1}{2}\Big(k\beta^2+\frac{1}{k}\Big)\beta-\int_\beta^\alpha kx^2dx$$

$$=\frac{1}{2}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)-\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)=\frac{1}{6}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{6}k\Big(1+\frac{3}{k^2}\Big)+\frac{1}{2k}=\frac{1}{6}k+\frac{1}{k}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$\dfrac{1}{6}k+\dfrac{1}{k}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{6}k\cdot\dfrac{1}{k}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

なお，等号は $\dfrac{1}{6}k=\dfrac{1}{k}$ すなわち $k=\sqrt{6}$ のとき成立する。

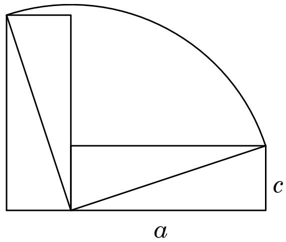
よって，$k=\sqrt{6}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

［解 説］

微積分の総合問題で，対称性への着目がポイントとなっています。なお，(3)は(2)の利用を考えて，台形の面積を使っています。

$\boxed{15}$ [2010 東京大・理]

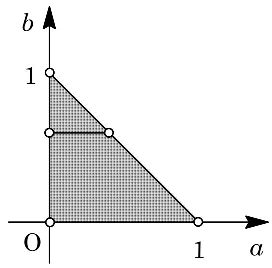
(1) 立体 V の回転軸に垂直な断面は，右図のように，半径 $\sqrt{a^2+c^2}$ の四分円に，直角をはさむ 2 辺の長さが a と c の直角三角形を 2 個合わせたものである。



これより，V の体積 W は，

$$W=\left\{\frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}ac\right\}b$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(a^2+c^2)+abc\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $c=1-a-b>0$ から，$a+b<1$ となり，①より，



$$W=\frac{1}{4}\pi b\{(a+c)^2-2ac\}+abc$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(a+c)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)abc$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)ab(1-a-b)$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\{-a^2+(1-b)a\}$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2+\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\left\{\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2-\frac{(1-b)^2}{4}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

②において，いったん b の値を固定して $W=f(a)$ とおくと，$0<a<1-b$ より，

$$f\left(\frac{1-b}{2}\right)\leqq f(a)<f(0)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\cdot\frac{(1-b)^2}{4}=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)b(1-b)^2$

$$f(0)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2$$

さらに，$g(b)=b(1-b)^2$ とおくと，

$$g'(b)=(1-b)^2-2b(1-b)$$
$$=(1-b)(1-3b)$$

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

よって，$0<b<1$ のとき $0<g(b)\leqq\frac{4}{27}\cdots\cdots\cdots④$

すると，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)g(b)>0$，$f(0)=\frac{1}{4}\pi g(b)\leqq\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{4}{27}=\frac{1}{27}\pi$

以上より，③④から，$0<W<\frac{1}{27}\pi$ である。

[解 説]

いったん 1 文字を固定することにより，とりうる値の範囲を求めていくという東大頻出の問題です。(2)において，W のとりうる範囲を，b を消去して $a+c$ と ac をもとに考えることもできますが，計算がやや煩雑になります。

16　　[2011 京都大・理]

原点 O を中心とする半径$\sqrt{6}$の球面Sの方程式は,

$$x^2+y^2+z^2=6\cdots\cdots\cdots①$$

3 点$(4,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 4,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 4)$を通る平面αの方程式は,

$$x+y+z=4\cdots\cdots\cdots②$$

さて, 球面Sの中心 O と平面αの距離dは, $d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

よって, $4<\sqrt{18}$から, $d=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<\sqrt{6}$となり, 球面$S$と平面$\alpha$は共有点をもつ。

ここで, ①②をともに満たすx, y, zに対して, $xyz=k\cdots\cdots$③とおく。

①②より, $xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}=5\cdots\cdots\cdots$④

すると, ②③④より, $x,\ y,\ z$はuに関する 3 次方程式$u^3-4u^2+5u-k=0$, すなわち$u^3-4u^2+5u=k\cdots\cdots$⑤の 3 つの実数解としてみることができる。

さらに, ⑤をuv平面上でとらえなおし,

$$v=u^3-4u^2+5u\cdots\cdots\cdots⑥,\ \ v=k\cdots\cdots\cdots⑦$$

これより, kの値の範囲は, 曲線⑥と直線⑦が 3 個の共有点(接点は 2 個とみなす)をもつ条件として求めることができる。

⑥より, $v'=3u^2-8u+5=(3u-5)(u-1)$

u	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$
v'	$+$	0	$-$	0	$+$
v	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{50}{27}$	$\nearrow$

曲線⑥の増減は右表のようになり, 曲線⑥とu軸に平行な直線⑦の共有点が 3 個(接点は 2 個とみなす)となるkの条件は, $\dfrac{50}{27}\leqq k\leqq 2$であるので,

$$\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$$

［解 説］

導入は空間図形ですが, 内容は, 条件付きの最大・最小問題です。頻出題なので, 演習は必須です。

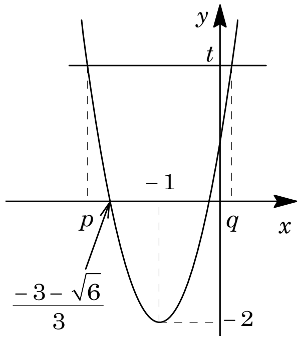
$\boxed{17}$ [2012 九州大・文]

(1) $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ に対して,

$$f'(x)=3x^2+6x+1$$

ここで, $t \geqq 0$ のとき, $f'(x)=t$ とすると,

$$3x^2+6x+1=t,\ 3(x+1)^2-2=t \cdots\cdots\cdots ①$$



右図より, ①は異なる 2 つの実数解をもつことより, 接点が 2 個, すなわち接線が 2 本存在する。

(2) ①の解が $x=p,\ q\ (p<q)$ なので,

$$p+q=-\frac{6}{3}=-2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(p)+f(p)=p^3+3p^2+p-1+q^3+3q^2+q-1$$
$$=(p+q)^3-3pq(p+q)+3(p+q)^2-6pq+(p+q)-2$$

②より, $f(p)+f(p)=-8+6pq+12-6pq-2-2=0$

よって, $\frac{p+q}{2}=-1$, $\frac{f(p)+f(p)}{2}=0$ となり, $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にある。

(3) $p \leqq \frac{-3-\sqrt{6}}{3}$ として, $\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+(p^3+3p^2+p-1)^2$

ここで, $u=(p+1)^2$ とおくと, $p+1 \leqq -\frac{\sqrt{6}}{3}$ から, $u \geqq \frac{2}{3}$ となり,

$$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+\left\{(p+1)^3-2(p+1)\right\}^2=u+u(u-2)^2=u^3-4u^2+5u$$

$g(u)=u^3-4u^2+5u$ とおくと,

$$g'(u)=3u^2-8u+5$$
$$=(3u-5)(u-1)$$

u	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(u)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(u)$	$\frac{50}{27}$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

すると, $g(u)$ の増減は右表のようになり, $u=\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}$ で最小値 $\frac{50}{27}$ をとる。

さて, (2)より, $\mathrm{PQ}=2\mathrm{PA}=2\sqrt{g(u)}$ となるので, PQ の最小値は,

$$2\sqrt{\frac{50}{27}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{9}$$

$u=\frac{2}{3}$ では, $p=-1-\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{-3-\sqrt{6}}{3}$, ②より, $q=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$

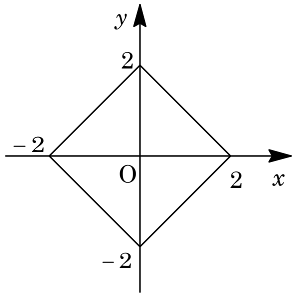
$u=\frac{5}{3}$ では, $p=-1-\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{-3-\sqrt{15}}{3}$, ②より, $q=\frac{-3+\sqrt{15}}{3}$

［解 説］

(3)の変数の置き換えは, 2 段階だったものを, まとめて記しています。

18　　[2012 一橋大]

まず，方程式$|x|+|y|=2$ ……①で表される図形は，対称性を考えると，右図の正方形となる。



また，$y=x^3-3a^2x$ ……②に対して，

(i)　$a=0$ のとき

②が，$y=x^3$ となることより，①の図形と②のグラフの共有点は明らかに 2 個である。

(ii)　$a>0$ のとき

$$y'=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$$

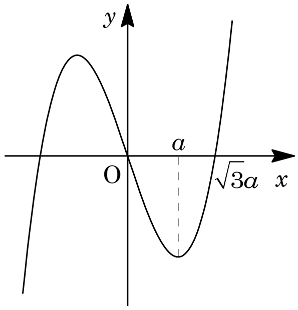
グラフが原点対称であることを考え，$x\geqq 0$ における増減について調べると，右表のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	$\searrow$		$\nearrow$

$x>0$ における②のグラフと x 軸との交点は，

$$x^3-3a^2x=0\ ,\ \ x=\sqrt{3}a$$

これより，②のグラフの概形は右図のようになる。



さて，①の図形と②のグラフの共有点の個数について，まず，第 1 象限には，$\sqrt{3}a<2\left(0<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

次に，x 軸の正の部分には，$\sqrt{3}a=2\left(a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

さらに，第 4 象限での共有点の個数を調べるために，②と $y=x-2\ (0<x<2)$ とを連立して，

$$x^3-3a^2x=x-2\ ,\ \ x^3-(3a^2+1)x+2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f(x)=x^3-(3a^2+1)x+2$ とおくと，③は$f(x)=0$ となり，

$$f'(x)=3x^2-(3a^2+1)$$

すると，$x>0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}\right)=-\frac{2(3a^2+1)}{3}\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}+2$$

そこで，$f\left(\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}\right)<0$ とすると，$\dfrac{3a^2+1}{3}\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}=\left(\dfrac{3a^2+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}>1$ となり，

$$\frac{3a^2+1}{3}>1\ ,\ \ a>\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すなわち，第 4 象限での共有点の個数は，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ に注意すると，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，また $a\geqq\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。それ以外のときは存在しない。

よって，$a>0$ では，$0<a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 2 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 3 個，$a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。

(i)(ii)より，①の図形と②のグラフが，ともに原点対称であることを考え合わせると，求める共有点の個数は以下のようになる。

$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 4 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 6 個である。

［解 説］

a の変化に伴う②のグラフの動きを視覚的にとらえて解く問題です。この下書きの段階で計算の手順が決まります。

$\boxed{19}$ ［2012 名古屋大・理］

(1) $C: y = x^3 - a^2x$ ……①に対して，$y' = 3x^2 - a^2$ となり，点 $\mathrm{A}(t,\ t^3 - a^2t)$ における C の接線 l の方程式は,

$$y-(t^3-a^2t)=(3t^2-a^2)(x-t)\,,\ \ y=(3t^2-a^2)x-2t^3\ \cdots\cdots\cdots ③$$

①②を連立して，$x^3 - a^2x = (3t^2 - a^2)x - 2t^3$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0\,,\ \ (x-t)^2(x+2t)=0$$

よって，$x = t,\ -2t$ となり，$t \neq 0$ から, l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)\,dt\right|=\left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x-t+3t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_{-2t}^{t}\left\{(x-t)^3+3t(x-t)^2\right\}dt\right|=\left|\left[\frac{1}{4}(x-t)^4+t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t}\right|$$

$$=\left|-\frac{81}{4}t^4+27t^4\right|=\frac{27}{4}t^4$$

(2) 接線 l が点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通る条件は,

$$b=(3t^2-a^2)\cdot 2a-2t^3\,,\ \ -2t^3+6at^2-2a^3=b\ \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$f(t) = -2t^3 + 6at^2 - 2a^3$ とおくと,

$$f'(t)=-6t^2+12at=-6t(t-2a)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$	$6a^3$	$\searrow$

さて，曲線 C には異なる 2 点で接する接線が存在しないので，④の実数解の個数は接線の本数と等しい。

よって，接線の本数は，$-2a^3 < b < 6a^3$ のとき 3 本，$b = -2a^3$，$6a^3$ のとき 2 本，$b < -2a^3$，$6a^3 < b$ のとき 1 本である。

(3) (i) $b = -2a^3$ のとき

④より，$-2t^3 + 6at^2 = 0$ となり，$t = 0,\ 3a$

すると，$t = 0$ のとき接線 l は原点を通るので不適である。

(ii) $b = 6a^3$ のとき

④より，$-2t^3 + 6at^2 - 8a^3 = 0$ となり，$(t-2a)^2(t+a) = 0$

(1)より, l と C で囲まれた図形の面積は，$t = 2a$ のとき $\frac{27}{4}\cdot(2a)^4 = 16\cdot\frac{27}{4}a^4$ であり，$t = -a$ のとき $\frac{27}{4}\cdot(-a)^4 = \frac{27}{4}a^4$ となる。

すると，$S_1 \geqq S_2$ から，$S_1 = 16\cdot\frac{27}{4}a^4$，$S_2 = \frac{27}{4}a^4$ となり，$\frac{S_1}{S_2} = 16$ である。

［解 説］

2015 年度以降，文理共通範囲で頻出と思われる典型題の集まりです。

$\boxed{20}$ [2013 神戸大・理]

(1) 2 次以下の多項式 $f(x)$ に対し，曲線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 0)$ を通ることより，

$$f(x)=ax^2+bx \quad (a, b \text{ は定数})$$

さらに，点 $(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ も通るので，$f(c)=c^3-2c$，$f(1)=-1$ となり，

$$ac^2+bc=c^3-2c \cdots\cdots\cdots ①,\quad a+b=-1 \cdots\cdots\cdots ②$$

$0<c<1$ から，①より $ac+b=c^2-2$ となり，②と合わせて，

$$ac-a=c^2-1,\quad a(c-1)=(c+1)(c-1)$$

よって，$a=c+1$，$b=-1-(c+1)=-c-2$ となるので，

$$f(x)=(c+1)x^2-(c+2)x$$

(2) $y=(c+1)x^2-(c+2)x$ と $y=x^3-2x$ を連立すると，

$$x^3-2x=(c+1)x^2-(c+2)x,\quad x^3-(c+1)x^2+cx=0$$

すると，$x(x-c)(x-1)=0$ より $x=0,\ c,\ 1$ となり，2 曲線で囲まれた部分の面積 S は，$0<x<c$ で $x(x-c)(x-1)>0$，$c<x<1$ で $x(x-c)(x-1)<0$ から，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^c x(x-c)(x-1)\,dx+\int_c^1 -x(x-c)(x-1)\,dx\\&=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\Big]_0^c-\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{c+1}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2\Big]_c^1\\&=\frac{c^4}{4}-\frac{c^4+c^3}{3}+\frac{c^3}{2}-\frac{1}{4}(1-c^4)+\frac{c+1}{3}(1-c^3)-\frac{c}{2}(1-c^2)\\&=-\frac{c^4}{6}+\frac{c^3}{3}-\frac{c}{6}+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

(3) (2)より，$S'=-\dfrac{2}{3}c^3+c^2-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{6}(2c-1)(2c^2-2c-1)$

ここで，$S'=0$ の解は $c=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ なので，$0<c<1$ における S の値の増減は，右表のようになる。

c	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

これより，$c=\dfrac{1}{2}$ のとき S は最小になる。

［解 説］

微積分に関する標準的な問題です。(2)では，図が描きにくいので，式を基準として考えた方が明快でしょう。

$\boxed{21}$ ［2013 一橋大］

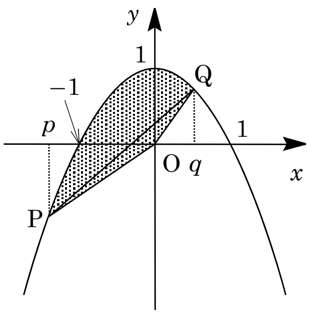
(1) 放物線 $C: y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ $(p<q)$ に対して,直線 PQ の方程式は,

$$y-(1-p^2)=\frac{(1-q^2)-(1-p^2)}{q-p}(x-p),\quad y=-(p+q)x+1+pq$$

さて, C と直線 PQ に囲まれた部分の面積を S_1 とすると,

$$S_1=\int_p^q\{1-x^2+(p+q)x-1-pq\}dx=\int_p^q\{-x^2+(p+q)x-pq\}dx$$

$$=-\int_p^q(x-p)(x-q)dx=\frac{1}{6}(q-p)^3$$



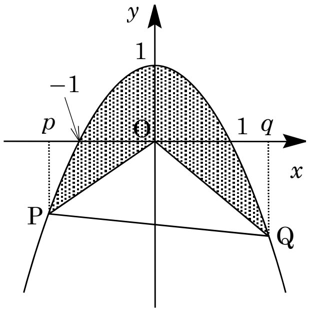
また, $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S_2 とすると,

$$S_2=\frac{1}{2}\left|q(1-p^2)-p(1-q^2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)+pq(q-p)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)(1+pq)\right|=\frac{1}{2}(q-p)\left|1+pq\right|$$

すると, 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S は, 直線 PQ の y 切片に注目し,



(i) $1+pq\geqq0$ のとき

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(ii) $1+pq<0$ のとき

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(i)(ii)より, $S=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)$

(2) $q=p+1$ のとき, (1)より, $S=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\{1+p(p+1)\}$ となり,

$$S=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

よって, $p=-\frac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\frac{13}{24}$ をとる。

(3) $pq=-1$ のとき, $p<q$ から, $p<0<q$ であり, (1)より,

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3\geqq\frac{1}{6}\left(2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}\right)^3=\frac{4}{3}$$

等号は $q=\frac{1}{q}$ $(q=1)$ のとき成立するので, このとき S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

［解 説］

面積の標準的な問題ですが, 場合分けをなるべく後回しにしていく工夫が必要です。

$\boxed{22}$ ［2014 岡山大・文］

(1) $f(x)-x=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2-x=(x-[x])-(x-[x])^2$

ここで，$t=x-[x]$ とおくと，$0\leqq t<1$ となり，

$$f(x)-x=t-t^2=t(1-t)\geqq 0$$

よって，$f(x)\geqq x$ （等号は x が整数のとき成立）

(2) $n\leqq x<n+1$ のとき，$[x]=n$，$[x+1]=n+1$ となり，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=[x+1]+2(x+1-[x+1])-(x+1-[x+1])^2\\&=n+1+2(x+1-n-1)-(x+1-n-1)^2\\&=n+2(x-n)-(x-n)^2+1=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2+1\\&=f(x)+1\end{aligned}$$

(3) (i) $0\leqq x<1$ のとき $[x]=0$ より，

$$f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$$

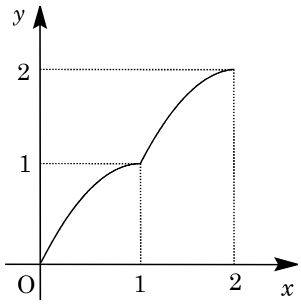
(ii) $1\leqq x<2$ のとき (2)より，$f(x)=f(x-1)+1$

すると，$0\leqq x-1<1$ より，

$$f(x)=-(x-1-1)^2+1+1=-(x-2)^2+2$$

(iii) $x=2$ のとき (1)より，$f(x)=2$

(i)～(iii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(4) $0\leqq a<1$ のとき，$\displaystyle\int_1^{a+1}f(x)dx=\int_0^a\{f(x)+1\}dx=\int_0^a f(x)dx+a$ なので，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+1}f(x)dx&=\int_a^1 f(x)dx+\int_1^{a+1}f(x)dx\\&=\int_a^1 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx+a=\int_0^1 f(x)dx+a\\&=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_0^1+a=a+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

［解 説］

ガウス記号のついた関数が題材で，誘導つきであるものの慣れないとやや難しめと思われます。(4)については, (3)のグラフから面積を対応させて計算しています。

$\boxed{23}$ ［2015 東北大・文］

(1) $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ に対して，$f'(t)=-12t^2+a+3$

$a>0$ より，$f'(t)=0$ の解は $t=\pm\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ となる。

(i) $\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}<1\ (0<a<9)$ のとき

$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$f(t)$ は $t=\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ において最大値 $M(a)$ をとり，

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$M(a)=\sqrt{\frac{a+3}{12}}\left(-4\cdot\frac{a+3}{12}+a+3\right)=\frac{\sqrt{a+3}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}(a+3)=\frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii) $\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}\geqq 1\ (a\geqq 9)$ のとき

$0\leqq t\leqq 1$ において $f(t)$ は単調増加するので，$t=1$ において最大値 $M(a)$ をとり，

$$M(a)=-4+(a+3)=a-1$$

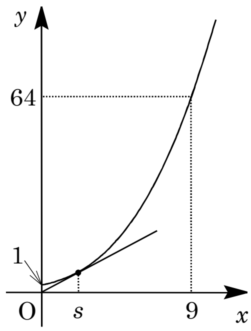
(2) $g(x)=M(x)^2$ より，(1)から，

$$g(x)=\left\{\frac{\sqrt{3}}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right\}^2=\frac{1}{27}(x+3)^3\quad(0<x<9)$$

$$g(x)=(x-1)^2\quad(x\geqq 9)$$

さて，点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るより，

$$\frac{g(s)}{s}=g'(s)\cdots\cdots\cdots(*)$$



(i) $0<s<9$ のとき

$(*)$より，$\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{(s+3)^3}{s}=\dfrac{1}{9}(s+3)^2$ から $s+3=3s$ となり，$s=\dfrac{3}{2}$

(ii) $s\geqq 9$ のとき　$(*)$より，$\dfrac{(s-1)^2}{s}=2(s-1)$ から $s=-1$ となるが，成立しない。

(i)(ii)より，$s=\dfrac{3}{2}$ となり，このとき接線の傾きは，$\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2}+3\right)^2=\dfrac{9}{4}$ である。

(3) $k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ より，$k^2=\dfrac{M(a)^2}{a}=\dfrac{g(a)}{a}$ となり，k^2 は原点 O と点 $(a,\ g(a))$ を結ぶ直線の傾きとなる。

すると，(2)より k^2 の最小値は $\dfrac{9}{4}$ となるので，k の最小値は $\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$ である。

［解 説］

微分法の総合問題です。(3)の分数関数を直線の傾きとみる方法は必須技法です。

$\boxed{24}$ ［2015 東京医歯大］

(1) $f(x)=x^3-3ax+b$ とおくと，$a>0$ のとき，

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$$
$$=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

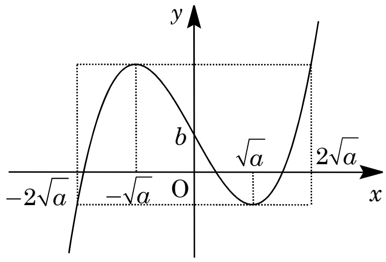
これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，極大値 $f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$，極小値 $f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+b$ である。

(2) まず，$f(x)+f(-x)=2b$ より，$y=f(x)$ のグラフは点 $(0,\ b)$ に関して対称である。そして，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とすると，$b\geqq 0$ の場合では，

(i) $a>0$ のとき (1)より $y=f(x)$ は右図のようになり，



(i-i) $\sqrt{a}>1$ $(a>1)$ のとき

$$M=|f(-1)|=f(-1)=-1+3a+b$$

(i-ii) $\sqrt{a}\leqq 1<2\sqrt{a}$ $\left(\frac{1}{4}<a\leqq 1\right)$ のとき

$$M=\left|f(-\sqrt{a})\right|=f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$$

(i-iii) $2\sqrt{a}\leqq 1$ $\left(0<a\leqq\frac{1}{4}\right)$ のとき

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a+b$$

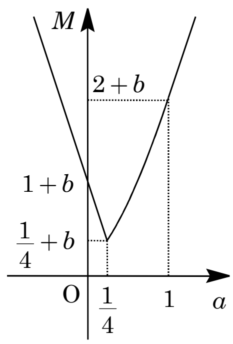
(ii) $a\leqq 0$ のとき $f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加し，

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a+b$$

(i)(ii)より，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=-1+3a+b\ (a>1),\quad M=2a\sqrt{a}+b\left(\frac{1}{4}<a\leqq 1\right)$$
$$M=1-3a+b\left(a\leqq\frac{1}{4}\right)$$

(3) $b\geqq 0$ のとき，b の値を固定して，a, M の関係を図示すると，右図のようになり，b が $b\geqq 0$ で動くとき，$M\geqq\frac{1}{4}$ である。



また，$b<0$ のとき，(2)と同様にすると，

(i) $a>1$ のとき $M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a-b$

(ii) $\frac{1}{4}<a\leqq 1$ のとき $M=\left|f(\sqrt{a})\right|=-f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}-b$

(iii) $a\leqq\frac{1}{4}$ のとき $M=|f(-1)|=-f(-1)=1-3a-b$

(i)～(iii)より，b が $b<0$ で動くとき，$M>\frac{1}{4}$ である。

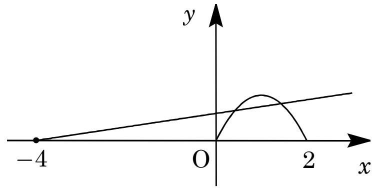
以上より，a, b が実数全体を動くとき，M のとりうる範囲は $M\geqq\frac{1}{4}$ である。

［解 説］

よく見かける 3 次関数の増減に関する問題ですが，絶対値をとる設定のため，複雑になっています。なお，上のグラフに破線で長方形を書き込んでいますが，この知識が方針を立てるうえで，ポイントになります。

$\boxed{25}$ [2015 九州大・理]

(1) $C_1 : y=-x^2+2x\ (0\leqq x\leqq 2)$ と $l : y=a(x+4)$ の式を連立すると，$-x^2+2x=a(x+4)$ から，



$$x^2+(a-2)x+4a=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

l と C_1 が $0<x<2$ で接する条件は，①より，

$$D=(a-2)^2-16a=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$0<-\frac{a-2}{2}<2 \cdots\cdots\cdots ③$$

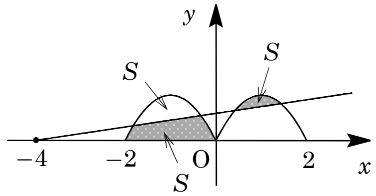
②より，$a^2-20a+4=0$，$a=10\pm4\sqrt{6}$ となり，③から $-2<a<2$ なので，満たす a の値は，$a=10-4\sqrt{6}$ である。したがって，l と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつ条件は，右上図より，$0\leqq a<10-4\sqrt{6}$ である。

(2) ①の解 $x=\dfrac{-(a-2)\pm\sqrt{a^2-20a+4}}{2}$ を，$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，l と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 は,

$$S_1=\int_\alpha^\beta\{-x^2+2x-a(x+4)\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3$$

(3) まず, x 軸と C_1 で囲まれた領域の面積は,



$$\int_0^2(-x^2+2x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

次に，C_1 と y 軸対称である $C_2 : y=-x^2-2x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ と $l : y=a(x+4)$ の式を連立すると，$x^2+(a+2)x+4a=0 \cdots\cdots\cdots ④$

ここで，l と C_2 で囲まれた領域の面積を S_3 とおき，(2)と同様にすると，④の解が $x=\dfrac{-(a+2)\pm\sqrt{a^2-12a+4}}{2}$ より，$S_3=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3$ となる。

さて，条件より x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積 S_2 に対し，$F(a)=S_1-S_2$ とおくと，$S_2=\dfrac{4}{3}-S_3$ より，

$$F(a)=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3+\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-12a+4}\right)^3-\frac{4}{3}$$

すると，$F(0)=\dfrac{4}{3}>0$，$F\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1+41\sqrt{41}}{5^3}-8\right)<0$ より，$F(a)=0$ すなわち $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する。

［解 説］

$10-4\sqrt{6}\fallingdotseq 0.202$ より，(3)の結論は，図からほとんど明らかなのですが……。

$\boxed{26}$ ［2016 一橋大］

$f(x)=x^3-3ax$ に対し，$f(-x)=-f(x)$ から，$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$

すると，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値は，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値に等しい。以下，$0\leqq x\leqq 1$ で考える。

さて，$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$ より，

(i) $a\leqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加し，$|f(x)|$ の最大値 M は,

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$1-3a$

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a$$

(ii) $a>0$ のとき

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ となり，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$-2a\sqrt{a}$	↗

(ii-i) $0<\sqrt{a}<1$ $(0<a<1)$ のとき

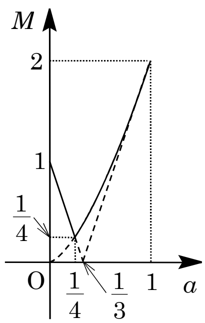
まず一般的に，X と Y の小さくない方を $\max\{X,\ Y\}$ と表すと，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は,

$$M=\max\{|f(\sqrt{a})|,\ |f(1)|\}=\max\{2a\sqrt{a},\ |1-3a|\}$$

ここで，$2a\sqrt{a}=|1-3a|$ として，両辺を 2 乗すると,

$$4a^3=(1-3a)^2,\ 4a^3-9a^2+6a-1=0$$

すると，$(4a-1)(a-1)^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{4},\ 1$



これより, a と M の関係は右図の実線のようになり,

$$M=1-3a\left(0<a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right)$$

(ii-ii) $\sqrt{a}\geqq 1$ $(a\geqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調減少し，$|f(x)|$ の最大値 M は,

$$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a$$

(i)(ii)より，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は,

$$M=1-3a\left(a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right),\ M=-1+3a\ (a\geqq 1)$$

以上より, M は $a=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

［解 説］

関数の最大・最小に関する有名問題です。まったく同じ問題の演習経験があるかもしれません。なお，ポイントは偶関数に気付くことです。

$\boxed{27}$ ［2016 岡山大］

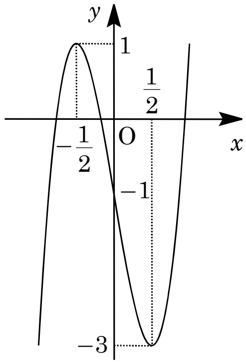
(1) $f(x)=8x^3-6x-1$ に対し，

$$f'(x)=24x^2-6$$
$$=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。

したがって，$f(x)=0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。



(2) $\theta=\frac{5}{9}\pi$ とおき，$a=\cos\theta$ のとき，

$$f(a)=8a^3-6a-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1$$
$$=2\cos 3\theta-1=2\cos\frac{5\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

(3) $\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{9}<\frac{2\pi}{3}$ より，$\cos\frac{\pi}{2}>\cos\frac{5\pi}{9}>\cos\frac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

すると，(2)より，a は $f(x)=0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

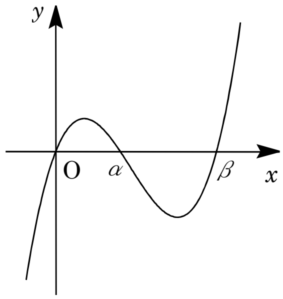
$$f\Big(-\frac{1}{5}\Big)=-\frac{8}{125}+\frac{6}{5}-1=\frac{17}{125}>0,\ \ f\Big(-\frac{1}{6}\Big)=-\frac{1}{27}+1-1=-\frac{1}{27}<0$$

よって，$-\frac{1}{5}<a<-\frac{1}{6}$，すなわち $-\frac{1}{5}<\cos\frac{5\pi}{9}<-\frac{1}{6}$ である。

［解 説］

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

28 ［2016 九州大・文］



(1) 曲線$C: y=x^3+ax^2+bx$がx軸と3点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$で交わっているので，Cは，

$$y=x(x-\alpha)(x-\beta)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$$

さて，Cとx軸で囲まれた2つの部分の面積の和をSとし，$f(x)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$とおくと，

$$S=\int_0^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} -f(x)dx$$
$$=\int_0^{\alpha} f(x)dx-\left(\int_0^{\beta} f(x)dx-\int_0^{\alpha} f(x)dx\right)$$
$$=2\int_0^{\alpha} f(x)dx-\int_0^{\beta} f(x)dx$$
$$=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^{\alpha}-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\right]_0^{\beta}$$
$$=2\left(\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta}{3}+\frac{\alpha^3\beta}{2}\right)-\left(\frac{\beta^4}{4}-\frac{\alpha\beta^3+\beta^4}{3}+\frac{\alpha\beta^3}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta+\frac{1}{12}\beta^4-\frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

(2) βの値を固定し，Sをαの関数と考え$S(\alpha)$と記すと，(1)から，

$$S(\alpha)=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{\beta}{3}\alpha^3-\frac{\beta^3}{6}\alpha+\frac{1}{12}\beta^4\quad(0<\alpha<\beta)$$
$$S'(\alpha)=-\frac{2}{3}\alpha^3+\beta\alpha^2-\frac{\beta^3}{6}=-\frac{1}{6}(4\alpha^3-6\beta\alpha^2+\beta^3)$$
$$=-\frac{1}{6}(2\alpha-\beta)(2\alpha^2-2\beta\alpha-\beta^2)$$

すると，$\alpha=\dfrac{\beta}{2}$，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\beta$のとき$S'(\alpha)=0$となり，$0<\alpha<\beta$における$S(\alpha)$の増減は右表のようになる。

α	0	$\cdots$	$\dfrac{\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

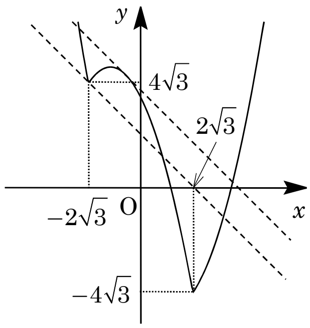
よって，$\alpha=\dfrac{\beta}{2}$のとき，Sは最小となる。

［解 説］

定積分と面積についての基本問題です。ただ，(2)の結論は感覚的にわかりますが。

$\boxed{29}$　　[2016 大阪大・文]

(1) 曲線 $C: y=\left|\dfrac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ に対して，



(i) $\dfrac{1}{2}x^2-6\geqq 0$ $(x\leqq -2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\leqq x)$ のとき

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6=\frac{1}{2}(x-2)^2-8\cdots\cdots\cdots①$$

(ii) $\dfrac{1}{2}x^2-6<0$ $(-2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3})$ のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+6=-\frac{1}{2}(x+2)^2+8\cdots\cdots\cdots②$$

さて，直線 $L: y=-x+t$ ……③が点 $(-2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$ を通るとき，$t=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ となる。

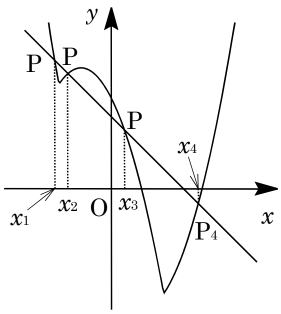
また，L が放物線②と $x=s$ で接するとき，②から $y'=-x-2$ なので，

$$-s-2=-1,\ s=-1$$

すると，接点 $\left(-1,\ \dfrac{15}{2}\right)$ となり，このとき $t=-1+\dfrac{15}{2}=\dfrac{13}{2}$ である。

以上より，C と L が異なる 4 点で交わる t の範囲は，$2\sqrt{3}<t<\dfrac{13}{2}$ である。

(2) C と L が異なる 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 で交わるとき，その x 座標をそれぞれ x_1，x_2，x_3，x_4 とおく。



まず，①③を連立して，$\dfrac{1}{2}x^2-2x-6=-x+t$ となり，

$$x^2-2x-2t-12=0$$

この解が $x=x_1$，x_4 より，

$$x_1+x_4=2,\ x_1x_4=-2t-12\cdots\cdots\cdots④$$

次に，②③を連立して，$-\dfrac{1}{2}x^2-2x+6=-x+t$ となり，

$$x^2+2x+2t-12=0$$

この解が $x=x_2$，x_3 より，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=2t-12\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，L の傾きが -1 から，

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{2}(x_2-x_1),\ \left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|=\sqrt{2}(x_4-x_3),\ \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|=\sqrt{2}(x_3-x_2)$$

ここで，条件より，$\dfrac{\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|+\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|}{\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|}=4$ なので，$\dfrac{(x_2-x_1)+(x_4-x_3)}{x_3-x_2}=4$

$$x_4-x_1=5(x_3-x_2),\ (x_4-x_1)^2=25(x_3-x_2)^2$$

$$(x_1+x_4)^2-4x_1x_4=25\{(x_2+x_3)^2-4x_2x_3\}$$

④⑤を代入して，$4-4(-2t-12)=25\{4-4(2t-12)\}$ となり，

$$1+2t+12=25(1-2t+12),\ 52t-312=0$$

よって，求める t の値は，$t=6$ である。

(3)　$t=6$ のとき，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=0$ より，$(x_2,\ x_3)=(-2,\ 0)$ となる。

このとき，C と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積 S は,

$$S=\int_{-2}^{0}\Big\{-\frac{1}{2}x^2-2x+6-(-x+6)\Big\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}x(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{6}\Big)(0+2)^3=\frac{2}{3}$$

［解　説］

絶対値つき関数のグラフを題材とした総合問題です。解答例では，C と L をそのまま扱いましたが，曲線 $y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-x$ と直線 $y=t$ という組で処理しても構いません。計算量が少しだけ減少します。

30 ［2017 筑波大・理］

(1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta\ (0<\beta<1)$ で極値をとるので，$f'(\beta)=f'(-\beta)=0$ となり，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ から，

$$f'(x)=3(x+\beta)(x-\beta)=3x^2-3\beta^2$$

すると，k を定数として，$f(x)=x^3-3\beta^2x+k$ である。

さて，条件より，$m>0$ で，$f(-1)=f(\beta)=-m$ より，

$$-1+3\beta^2+k=-m\cdots\cdots\cdots①,\ \ -2\beta^3+k=-m\cdots\cdots\cdots②$$

また，$f(1)=f(-\beta)=m$ より，

$$1-3\beta^2+k=m\cdots\cdots\cdots③,\ \ 2\beta^3+k=m\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$k=0$，$m=2\beta^3$ となり，①③に代入すると①と③は一致し，

$$2\beta^3+3\beta^2-1=0,\ \ (2\beta-1)(\beta+1)^2=0$$

すると，$0<\beta<1$ から $\beta=\dfrac{1}{2}$ となり，$m=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

そして，$f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x$ から，$a=0$，$b=-\dfrac{3}{4}$，$c=0$

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $-m\leqq g(x)\leqq m$ を満たし，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，

$$h(-1)=f(-1)-g(-1)=-m-g(-1)\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$$
$$h(-\beta)=f(-\beta)-g(-\beta)=m-g(-\beta)\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑥$$
$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=-m-g(\beta)\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑦$$
$$h(1)=f(1)-g(1)=m-g(1)\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$h(x)$ は 2 次以下の関数となり，$h(x)=sx^2+tx+u$ とおくと，⑤⑧より，

$$s-t+u\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑨,\ \ s+t+u\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑩$$

そして，$\beta=\dfrac{1}{2}$ から，⑥⑦より，

$$\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}t+u\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑪,\ \ \frac{1}{4}s+\frac{1}{2}t+u\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑫$$

すると，⑩－⑨から $t\geqq 0$，⑫－⑪から $t\leqq 0$ となるので，$t=0$ である。

これより，⑨から $s+u\leqq 0$，⑩から $s+u\geqq 0$ となるので，$s+u=0\cdots\cdots\cdots⑬$

さらに，⑪から $\dfrac{1}{4}s+u\geqq 0$，⑫から $\dfrac{1}{4}s+u\leqq 0$ となるので，$\dfrac{1}{4}s+u=0\cdots\cdots\cdots⑭$

⑬⑭より，$s=u=0$ となり，以上より $h(x)=0$ である。

［解 説］

微分の応用問題です。なお，(2)は図を書くと結論は明らかなのですが，それを示すのは……。ということで，数式を用いて処理をしました。

$\boxed{31}$ ［2017 広島大・理］

(1) $a>0$ のとき，$f(t)=t^3-2at+1$ に対して，

$$f'(t)=3t^2-2a$$

$t \geqq 0$ において $f(t)$ の増減を調べると，右表のようになり，最小値は，

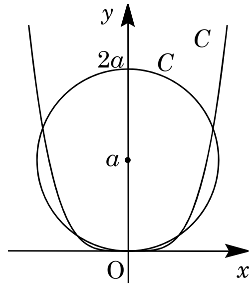
t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=\left(\frac{2a}{3}-2a\right)\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1$$

(2) 条件より，$-\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}+1=0$ となるので，$\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}=1$ から，

$$\frac{16\cdot 6}{81}A^3=1,\ A^3=\frac{81}{16\cdot 6}=\frac{27}{32}$$

(3) $C_1: y=x^4$ ……①，$C_2: x^2+(y-a)^2=a^2$ ……②を連立し，



$$x^2+(x^4-a)^2=a^2,\ x^8-2ax^4+x^2=0$$

ここで，$x^2=t \geqq 0$ とおくと，$t^4-2at^2+t=0$ から，

$$t(t^3-2at+1)=0 \text{………③}$$

すると，$t=0$ ……④または $t^3-2at+1=0$ ……⑤

さて，(1)から⑤は $f(t)=0$ となり，しかも $t \neq 0$ である。

また，(2)から $A=\sqrt[3]{\dfrac{27}{32}}=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ となるので，C_1 と C_2 の共有点の個数は，

(i) $-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1>0\ \left(0<a<\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の実数解は 0 個なので，③の実数解は④の $t=0$ のみとなる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は 1 である。

(ii) $-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1=0\ \left(a=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 1 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 2 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+1\times 2=3$ である。

(iii) $-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1<0\ \left(a>\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 2 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 3 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+2\times 2=5$ である。

(4) C_1 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^4)$ と点 $(0,\ a)$ の距離を d とおくと，

$$d^2=p^2+(p^4-a)^2=p^8-2ap^4+p^2+a^2$$

ここで，$p^2=t \geqq 0$ とおくと，$d^2=t^4-2at^2+t+a^2=tf(t)+a^2$

さて，d^2 の最小値は a^2 なので，$t \geqq 0$ において $tf(t) \geqq 0$ すなわち $f(t) \geqq 0$ が必要となり，(3)から，$0<a \leqq \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ である。

逆に，このとき $t=0$ で $tf(t)=0$ となるので，d^2 の最小値は a^2 である。

以上より，求める条件は$0 < a \leqq \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$である。

［解 説］

微分の応用についての問題です。(3)では x を消去するか，y を消去するか迷いますが，(1)を誘導とみると後者に落ち着きます。また，t の個数と x の個数の対応関係に注意が必要です。なお，(4)の結論は(3)から明らかですが，その過程も念のため記しておきました。重複しますが。

$\boxed{32}$　[2017 金沢大・文]

(1)　$C: y=a(x-1)^2+1\ (a>0)$に対して，$\mathrm{P}(s,\ a(s-1)^2+1)$における接線 l の方程式は，$y'=2a(x-1)$から，$y-\{a(s-1)^2+1\}=2a(s-1)(x-s)$となり，

$$y=2a(s-1)x-as^2+a+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$が$y=Ax+B$に一致するので，

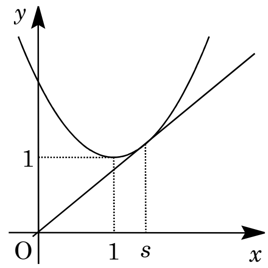
$$A=2a(s-1),\ B=-as^2+a+1$$

(2)　条件より，$A=2a(s-1)>0$から$s>1$となり，また$B=-as^2+a+1=0$より，

$$s^2=\frac{a+1}{a},\ s=\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

すると，$A=2a\left(\sqrt{\frac{a+1}{a}}-1\right)=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)$から，

$$l: y=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)x$$



(3)　lとCおよびy軸で囲まれた図形の面積$S(a)$は，

$$S(a)=\int_0^s\{a(x-1)^2+1-2a(s-1)x\}dx$$
$$=\int_0^s(ax^2-2asx+a+1)dx$$
$$=\left[\frac{a}{3}x^3-asx^2+(a+1)x\right]_0^s=\frac{a}{3}s^3-as^3+(a+1)s$$
$$=\left(-\frac{2}{3}a\cdot\frac{a+1}{a}+a+1\right)\sqrt{\frac{a+1}{a}}=\frac{1}{3}(a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

(4)　$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{(a+1)^6}{a^3}}$となり，

$$\frac{(a+1)^6}{a^3}=\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)^6=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^6\geqq\left(2\sqrt{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^6=2^6$$

ここで，等号は$\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，すなわち$a=1$のときに成立する。

したがって，$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$は$a=1$のとき最小値$\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{2^6}=\dfrac{1}{3}\cdot2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$をとる。

［解　説］

微積分の総合問題です。(3)で被積分関数が$a(x-s)^2$となることに気付けば，計算が少し簡単になります。また，(4)では求めた式を 4 乗根の中に入れてしまうと，相加平均と相乗平均の出番になります。

33 ［2017 名古屋大・文］

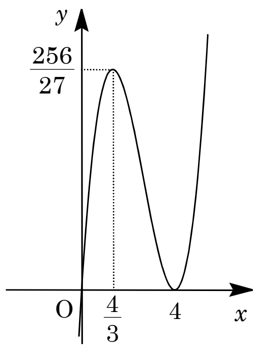
(1) $g(x)=x(x-4)^2$ に対して,

$$g'(x)=(x-4)^2+2x(x-4)$$
$$=(x-4)(3x-4)$$

すると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $\dfrac{256}{27}\left(x=\dfrac{4}{3}\right)$，極小値は 0 $(x=4)$ である。

x	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

また, グラフの概形は右図のようになる。



(2) $f(x)=ax^2\ (a>0)$ に対し，$g(x)=f(x)$ とおくと,

$$x(x-4)^2=ax^2,\ x\{x^2-(a+8)x+16\}=0$$

これより，$x=0$，$x^2-(a+8)x+16=0$ ……①となる。

ここで, $x=0$ は①を満たさず, 判別式 D は,

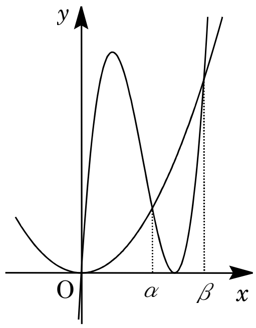
$$D=(a+8)^2-64=a(a+16)>0$$

したがって，$g(x)=f(x)$ は異なる 3 つの実数解をもつ。すなわち, 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わる。

(3) ①の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha+\beta=a+8\text{………②},\ \alpha\beta=16\text{………③}$$

ここで, 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるので,



$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx=0$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx=0$ ……④となり，④の左辺を I とおくと,

$$I=\int_0^{\beta}\{x^3-(a+8)x^2+16x\}dx=\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{a+8}{3}x^3+8x^2\Big]_0^{\beta}$$
$$=\frac{\beta^4}{4}-\frac{a+8}{3}\beta^3+8\beta^2=\frac{\beta^2}{12}\{3\beta^2-4(a+8)\beta+96\}$$

すると，$\beta>0$ なので, ④から，$3\beta^2-4(a+8)\beta+96=0$ ………⑤

そこで, ②⑤から $3\beta^2-4(\alpha+\beta)\beta+96=0$ となり，$-\beta^2-4\alpha\beta+96=0$

③を代入すると $-\beta^2-64+96=0$ となり，$\beta^2=32$ から $\beta=4\sqrt{2}$ である。

そして, ③から $\alpha=\dfrac{16}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ なので, ②から,

$$a=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8=6\sqrt{2}-8$$

このとき，2 つの曲線の交点の x 座標は，$x=0$，α，β から，

$$x=0,\ 2\sqrt{2},\ 4\sqrt{2}$$

［解 説］

定積分と面積に関する有名な設定が題材になっています。ポイントは④式を導くところで，それ以降は②③⑤の連立方程式を解いているにすぎません。

34 ［2018 東京大］

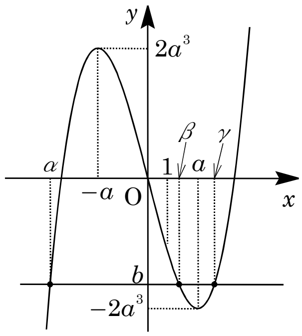
(1) $f(x)=x^3-3a^2x \quad (a>0)$ に対して，$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

すると，$x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加する条件は，$0<a \leqq 1$ である。

(2) 方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもち，その解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると，$\alpha<-a<\beta<a<\gamma$ であり，しかも $\beta>1$ である条件は，右図から，



$$a>1 \cdots\cdots\cdots ①$$
$$-2a^3<b<f(1)=1-3a^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，②の 2 つの境界線 $b=-2a^3$ と $b=1-3a^2$ の関係は，両式を連立すると，

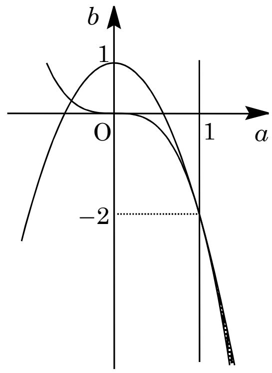
$$-2a^3=1-3a^2,\ 2a^3-3a^2+1=0$$
$$(2a+1)(a-1)^2=0$$

よって，$a=-\dfrac{1}{2}$ で交わり，$a=1$ で接する。

以上より，点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲は，①②から，

$$a>1,\ -2a^3<b<1-3a^2$$

この不等式を ab 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解 説］

微分の方程式への応用問題です。内容は基本的です。

35 ［2018 金沢大・文］

(1) 条件より，$f(x)=|x-1|+\int_0^2 xf(t)dt=|x-1|+x\int_0^2 f(t)dt$

ここで，$\int_0^2 f(t)dt=a$ ……①とおくと，$f(x)=|x-1|+ax$ ……②となり，

$f(2)=|2-1|+2a=1+2a$

(2) ②より，$f(x)=x-1+ax=(a+1)x-1\ \ (x\geqq 1)$

$f(x)=-x+1+ax=(a-1)x+1\ \ (x<1)$

①に代入すると，

$$a=\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1\{(a-1)t+1\}dt+\int_1^2\{(a+1)t-1\}dt$$

$$=\Big[\frac{1}{2}(a-1)t^2+t\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{2}(a+1)t^2-t\Big]_1^2=\frac{1}{2}(a-1)+1+\frac{1}{2}(a+1)\cdot 3-1$$

$$=2a+1$$

よって，$a=-1$となる。

(3) (2)より，$f(x)=-1\ (x\geqq 1)$，$f(x)=-2x+1\ (x<1)$

ここで，$y=xf(x)-k$ ……③と$y=-x^2$ ……④を連立すると，

$xf(x)-k=-x^2$，$xf(x)+x^2=k$

すると，$y=xf(x)+x^2$ ……⑤のグラフと$y=k$ ……⑥のグラフの共有点の個数は，③のグラフと④のグラフの共有点の個数に一致し，⑤より，

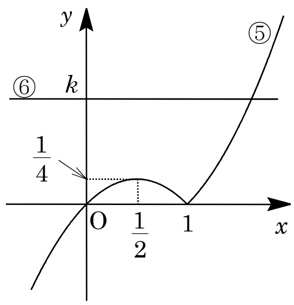
(i) $x\geqq 1$のとき

$$xf(x)+x^2=-x+x^2=\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{1}{4}$$

(ii) $x<1$のとき

$$xf(x)+x^2=x(-2x+1)+x^2=-x^2+x$$

$$=-\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2+\frac{1}{4}$$



(i)(ii)より，③と④のグラフの共有点の個数は，右図より，

1個$\Big(k<0,\ \frac{1}{4}<k\Big)$，2個$\Big(k=0,\ \frac{1}{4}\Big)$，3個$\Big(0<k<\frac{1}{4}\Big)$

［解 説］

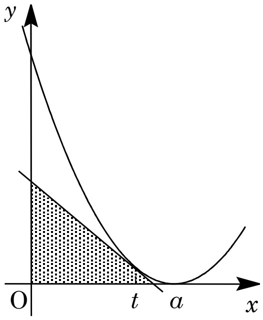
置換え型の積分方程式と 2 次関数と方程式の融合問題です。誘導が詳しいので，方針は明快です。

$\boxed{36}$ ［2018 千葉大］

(1) 曲線 $y=(x-a)^2$ に対し $y'=2(x-a)$ となり，$0\leqq t<a$ において，点 $(t,\ (t-a)^2)$ における接線の方程式は,

$$y-(t-a)^2=2(t-a)(x-t)$$

$$y=2(t-a)x-t^2+a^2\ \cdots\cdots\cdots ①$$



すると，①と y 軸との交点は $(0,\ -t^2+a^2)$ となり，また x 軸との交点は $\left(\dfrac{t+a}{2},\ 0\right)$ である。

そこで，接線①と x 軸および y 軸で囲まれた領域 $D(t)$ の面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+a}{2}(-t^2+a^2)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(2) ②より，$S'(t)=\dfrac{1}{4}(-3t^2-2at+a^2)=-\dfrac{1}{4}(3t-a)(t+a)$

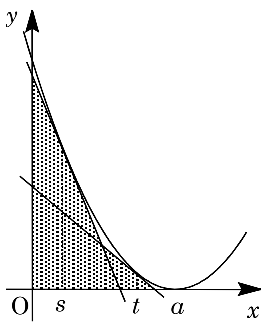
すると，$0\leqq t<a$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$S(t)$ は $t=\dfrac{a}{3}$ のとき最大となり，最大値は,

t	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗		↘	

$$S\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{a^3}{27}-\frac{a^3}{9}+\frac{a^3}{3}+a^3\right)=\frac{8}{27}a^3$$

(3) $0\leqq s\leqq t<a$ のとき，点 $(s,\ (s-a)^2)$ における接線の方程式は，①より,

$$y=2(s-a)x-s^2+a^2\ \cdots\cdots\cdots ③$$



さて，2 つの領域 $D(t)$ と $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の面積を $T(t,\ s)$ とすると,

(i) $0\leqq s=t<a$ のとき

$T(t,\ s)=S(t)$ より，(2)から最大値は $\dfrac{8}{27}a^3$ である。

(ii) $0\leqq s<t<a$ のとき

①③を連立すると，$2(t-a)x-t^2+a^2=2(s-a)x-s^2+a^2$ から,

$$2(t-s)x=t^2-s^2,\quad x=\frac{t+s}{2}$$

よって，$T(t,\ s)=S(t)+\dfrac{1}{2}\{(-s^2+a^2)-(-t^2+a^2)\}\cdot\dfrac{t+s}{2}$ となり,

$$T(t,\ s)=\frac{1}{4}(-t^3-at^2+a^2t+a^3)+\frac{1}{4}(t^3+st^2-s^2t-s^3)\ \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，t を $t=t_0\ (0<t_0<a)$ で固定し，s を $0\leqq s<t_0$ で動かすと考え,

$$T(t_0,\ s)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}({t_0}^3+{t_0}^2s-t_0s^2-s^3)$$

$$T'(t_0,\ s)=-\frac{1}{4}(3s^2+2t_0s-{t_0}^2)$$
$$=-\frac{1}{4}(3s-t_0)(s+t_0)$$

s	0	$\cdots$	$\frac{t_0}{3}$	$\cdots$	t_0
$T'(t_0,\ s)$		$+$	0	$-$	
$T(t_0,\ s)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0\leqq s<t_0$ における $T(t_0,\ s)$ の増減は右表のようになる。これより，$T(t_0,\ s)$ は $s=\dfrac{t_0}{3}$ のとき最大となり，最大値は,

$$T\Big(t_0,\ \frac{t_0}{3}\Big)=\frac{1}{4}(-{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3)+\frac{1}{4}\Big({t_0}^3+\frac{{t_0}^3}{3}-\frac{{t_0}^3}{9}-\frac{{t_0}^3}{27}\Big)$$
$$=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{27}{t_0}^3-a{t_0}^2+a^2t_0+a^3\Big)$$

さらに，この状態を保ったまま t_0 を $0<t_0<a$ で動かすと考え，変数を t_0 から t に戻し $U(t)=T\Big(t,\ \dfrac{t}{3}\Big)$ とおき直すと，$U(t)=\dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{5}{27}t^3-at^2+a^2t+a^3\Big)$ から，

$$U'(t)=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{9}t^2-2at+a^2\Big)$$
$$=\frac{1}{36}(5t-3a)(t-3a)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}a$	$\cdots$	a
$U'(t)$		$+$	0	$-$	
$U(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

すると，$0<t<a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

これより，$U(t)$ は $t=\dfrac{3}{5}a$ のとき最大となり，最大値は,

$$U\Big(\frac{3}{5}a\Big)=\frac{1}{4}\Big(\frac{5}{27}\cdot\frac{27}{125}a^3-\frac{9}{25}a^3+\frac{3}{5}a^3+a^3\Big)=\frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より，$T(t,\ s)$ は，$t=\dfrac{3}{5}a$，$s=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{5}a=\dfrac{a}{5}$ のとき，最大値 $\dfrac{8}{25}a^3$ をとる。

［解 説］

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は 2 変数関数が対象の設問で，1 文字を固定して処理しています。ただ，重複をいとわず丁寧に記述したところ，かなりの分量になってしまいました。