２０１９ 入試対策

２次数学アーカイブ

図形と式

文系＋理系

２００１－２０１８

外林康治 編著

電送数学舎

図形と式

【問題一覧】

1 放物線$y=x^2$上に，直線$y=ax+1$に関して対称な位置にある異なる 2 点 P，Q が存在するようなaの範囲を求めよ。 [2001 一橋大]

2 実数tに対して, xy平面上の直線$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$は, tの値によらずある円Cに接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円Cの方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2) tが$t \geqq 1$の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。 [2002 神戸大・文]

3 a, bを実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域をDとする。

$$x+3y \geqq a,\ 3x+y \geqq b,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

領域Dにおける$x+y$の最小値を求めよ。 [2003 東京大・文]

4 xy平面の放物線$y=x^2$上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さaの正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは$\sqrt{2}$である。

このとき, aの値を求めよ。 [2004 東京大]

5 不等式$y \leqq -(x-1)^2$の表す領域をA_1，不等式$y \leqq -(x+1)^2$の表す領域をA_2とする。A_1とA_2の和集合$A_1 \cup A_2$をAとする。また，不等式$y \geqq (x-a)^2+b$の表す領域をBとする。次の問いに答えよ。

(1) $a=0$，$b=-1$とするとき, AとBの共通部分$A \cap B$の面積を求めよ。

(2) A_1とBの共通部分$A_1 \cap B$が空集合でないための条件をa, bで表せ。

(3) A と B の共通部分$A \cap B$が空集合でないとき点$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。 [2005 金沢大・文]

6 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x=t\cos\theta,\ \ y=1-t^2+t\sin\theta$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える。t が実数全体を動くとき, 点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x\geqq0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき, Q の x 座標を求めよ。

(2) θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲を変化するとき, C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3) θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。 ［2005 大阪大・理］

7 座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 2)$, $\mathrm{B}(6,\ 0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき, 直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし, l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq6)$ とするとき, p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ。 ［2006 名古屋大・理］

8 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である 2 つの円は, どちらも円 C に接することを示せ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき, $\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。

［2007 北海道大・文］

9 座標平面上の 2 点 P, Q が, 曲線 $y=x^2$ $(-1\leqq x\leqq1)$ 上を自由に動くとき, 線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし, $\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{P}$ とする。

(1) a を $-1\leqq a\leqq1$ を満たす実数とするとき, 点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。 ［2007 東京大・理］

$\boxed{10}$ a を正の実数とする。点$(x,\ y)$が，不等式$x^2 \leqq y \leqq x$の定める領域を動くとき，つねに$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$となる。$a$の値の範囲を求めよ。　［2008 一橋大］

$\boxed{11}$ (1)　任意の角θに対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角α，βに対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。　［2009 一橋大］

$\boxed{12}$ 座標平面上の 3 点$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(x,\ y)$を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3)　3 つの角$\angle\mathrm{CAB}$, $\angle\mathrm{ABC}$, $\angle\mathrm{BCA}$をそれぞれα，β，γとし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのときx, yが満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4)　x, yが(3)の条件を満たすとき，γがとりうる値の範囲を求めよ。［2009 広島大・理］

$\boxed{13}$ aを 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$をとる。曲線$y=\dfrac{1}{x}$上の点$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$と，曲線$y=\dfrac{a}{x}$上の点$\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$が, 3 条件

(i)　$p>0, q>0$

(ii)　$\angle\mathrm{AOP} < \angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$の最大値が$\dfrac{3}{4}$となるようなaの値を求めよ。

［2010 千葉大・理］

14 実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。 ［2011 東北大・理］

15 以下の問いに答えよ。

(1) t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) a を $a \geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

$$ax+(2-a)y \geqq 2,\quad y \geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3) a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。［2011 神戸大・理］

16 座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。 ［2012 神戸大］

17 s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s, t が $s \geqq 0,\ t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。$s,\ t$ が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。 ［2012 東北大・理］

18 $a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2) $b-a \geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

［2013 神戸大・文］

19 座標平面上の 2 点 $A(0,\ 1)$ $B(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y=kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

［2013 広島大・理］

20 座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。 ［2014 東京大・理］

21 座標平面上の原点を O とする。点 $A(a,\ 0)$，点 $B(0,\ b)$ および点 C が，$OC=1$，$AB=BC=CA$ を満たしながら動く。

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。 ［2015 一橋大］

22 座標平面上の円 $C: x^2+(y-1)^2=1$ と，x 軸上の 2 点 $P(-a,\ 0)$，$Q(b,\ 0)$ を考える。ただし，$a>0$，$b>0$，$ab \neq 1$ とする。点 P, Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その 2 つの接線の交点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 QR の方程式を求めよ。

(2) R の座標を a, b で表せ。

(3) R の y 座標が正であるとき，$\triangle PQR$ の周の長さを T とする。T を a, b で表せ。

(4) 2 点 P, Q が，条件「$PQ=4$ であり，R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ。 ［2015 名古屋大・文］

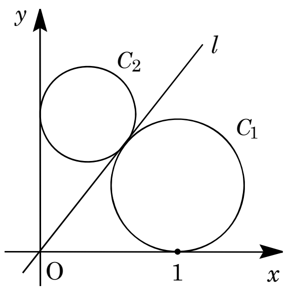
23 l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点$(1,\ 0)$で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。



［2015 東京大・文］

24 座標平面上の 2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある。 ［2015 東京大・文］

25 座標平面上に 5 点 A$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$(1,\ 1)$，D$(1,\ 0)$，E$\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$がある。点 E と点 $\mathrm{P_1}(s,\ 1)$ $(0<s<1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし，l_2 と直線 $x=1$ の交点を $\mathrm{P_2}$ とする。さらに，直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を $\mathrm{P_3}$ とする。

(1) 直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2) 線分 $\mathrm{DP_3}$ の長さを s を用いて表せ。

(3) $\mathrm{EP_1}+\mathrm{P_1P_2}+\mathrm{P_2P_3}$ の最大値と最小値を求めよ。 ［2016 千葉大・文］

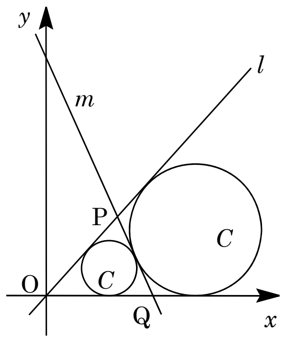
26 座標平面上の 3 点 P$(x,\ y)$，Q$(-x,\ -y)$，R$(1,\ 0)$が鋭角三角形をなすための$(x,\ y)$についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 P$(x,\ y)$の範囲を図示せよ。 ［2016 東京大・文］

27 曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 A$(-1,\ 1)$，B$(b,\ b^2)$をとる。ただし $b>-1$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 T$(t,\ t^2)$ $(-1<t<b)$ で，$\angle$ATB が直角になるものが存在する。

［2016 名古屋大・文］

28 xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を l とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の(i)～(iv)で定める。



(i) 円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する。

(ii) 円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii) 円 C_2 は直線 l， x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

(iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち, x 軸，直線 l と異なる直線を m とし，直線 m と直線 l, x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

(1) 円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3) (2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。 ［2016 筑波大・理］

29 水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している。

(1) S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ。

(2) α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える。それらの球と α の接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。

［2016 東京工大］

30 t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件 $\mathrm{PQ}=2$，$p<q$，$p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ。 ［2017 千葉大・理］

31 $a,\ b$ を実数とする。$y=\left|x^2-4\right|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

［2017 東北大・理］

32 正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $\left|ax+by\right|\leqq 1$，$\left|cx-by\right|\leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。

［2017 一橋大］

33 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

　(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

　(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

［2018 広島大・理］

34 座標平面上に放物線 C を $y=x^2-3x+4$ で定め，領域 D を $y\geqq x^2-3x+4$ で定める。原点を通る 2 直線 $l,\ m$ は C に接するものとする。

(1) 放物線 C 上を動く点 A と直線 $l,\ m$ の距離をそれぞれ $L,\ M$ とする。$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2) 次の条件を満たす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

　条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy\leqq 0$ が成り立つ。

［2018 東京大・文］

35 xy 平面における 2 つの放物線 $C : y=(x-a)^2+b$，$D : y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき, C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。 ［2018 東北大・理］

36 θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。

［2018 信州大・医］

37 放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える。

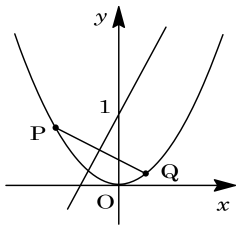
(1) 点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。 ［2018 東京大・文］

図形と式

【解答例一覧】

1 ［2001 一橋大］



$p \neq q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ と直線 $y = ax + 1$ が直交することより，

$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} \cdot a = -1,\quad p + q = -\frac{1}{a} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，PQ の中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ が，直線 $y = ax + 1$ 上にあることより，

$$\frac{p^2 + q^2}{2} = a \cdot \frac{p + q}{2} + 1,\quad p^2 + q^2 = a(p + q) + 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①を②に代入すると，$p^2 + q^2 = 1 \cdots\cdots\cdots ③$

①③を満たす異なる p，q が存在する条件は，直線①と円③が 2 つの共有点を持つ条件に等しいので，

$$\frac{\left|\dfrac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}} < 1,\quad 1 < \sqrt{2}\,|a|$$

よって，$a < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a$

［解 説］

線対称移動を題材にした問題です。後半の a の範囲を求めるところは，図をイメージしています。

2 [2002 神戸大・文]

(1) $(1-t^2)x-2ty=1+t^2\cdots\cdots$①より，$(1-t^2)x-2ty-1-t^2=0\cdots\cdots$①$'$

円 C の中心を$(a,\ b)$，半径を r とすると，①$'$が接することより，

$$\frac{|(1-t^2)a-2tb-1-t^2|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r,\ \ \frac{|(-a-1)t^2-2bt+a-1|}{\sqrt{1+2t^2+t^4}}=r$$

$$(-a-1)t^2-2bt+a-1=\pm r(1+t^2)\cdots\cdots\cdots②$$

②がどんな t に対しても成立する条件は,

$$-a-1=\pm r,\ -2b=0,\ a-1=\pm r$$

これより，$-a-1=a-1$ から $a=0$，また $b=0$ となり, $r>0$ から $r=1$ である。

よって，円 C の方程式は，$x^2+y^2=1$ である。

すると，①を $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x+\dfrac{-2t}{1+t^2}y=1$ と変形すると，接点の座標は$\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$

となる。

(2) 接点を$(x,\ y)$とおくと, (1)より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdots\cdots$③，$y=\dfrac{-2t}{1+t^2}\cdots\cdots$④

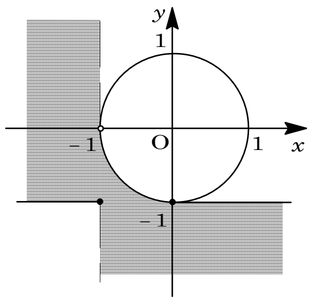
③より，$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ となり, $t\geqq 1$ で $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leqq 1$ より，$-1<x\leqq 0$ となる。

④より，$y=\dfrac{-2}{\dfrac{1}{t}+t}$ となり，$t\geqq 1$ で $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

（等号は $t=1$ のとき）より，$-1\leqq y<0$ である。

よって，接点は円 C 上の $-1<x\leqq 0$，$-1\leqq y<0$ の部分にある。

以上より，直線①の通過領域は右図の網点部となる。なお，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解 説］

直線の通過領域を求める有名問題です。(1)の誘導があるために，(2)はずいぶん解きやすくなっています。

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2003 東京大・文］

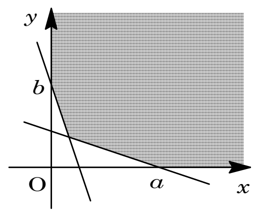
領域 $D: x+3y \geqq a$，$3x+y \geqq b$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ に対して，境界 $x+3y=a$ ……①，$3x+y=b$ ……②とおく。

すると，①と両軸との交点は $(a,\ 0)$ と $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$，②と両軸との交点は $\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$ と $(0,\ b)$ である。

(i)　$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a \geqq \dfrac{b}{3},\ b \geqq \dfrac{a}{3}\ \left(\dfrac{a}{3} \leqq b \leqq 3a\right)$ のとき

①と②の交点は，$x+3(b-3x)=a$，$x=\dfrac{-a+3b}{8}$

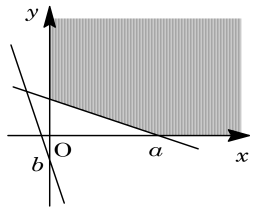
$$y=b-3\cdot\frac{-a+3b}{8}=\frac{3a-b}{8}$$



右図より，この交点 $\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{-a+3b}{8}+\frac{3a-b}{8}=\frac{a+b}{4}$$

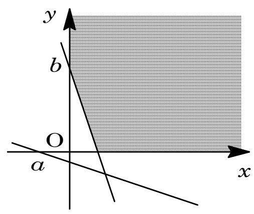
(ii)　$a \geqq 0,\ a \geqq \dfrac{b}{3},\ \dfrac{a}{3} \geqq b\ \left(a \geqq 0,\ b \leqq \dfrac{a}{3}\right)$ のとき



右図より，点 $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{a}{3}$$

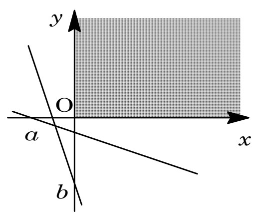
(iii)　$b \geqq 0,\ \dfrac{b}{3} \geqq a,\ b \geqq \dfrac{a}{3}\ (b \geqq 0,\ b \geqq 3a)$ のとき



右図より，点 $\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{b}{3}$$

(iv)　$a \leqq 0,\ b \leqq 0$ のとき



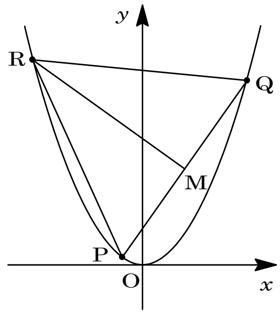
右図より，原点 $(0,\ 0)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=0$$

［解　説］

場合分けの基準を確定するのに苦労します。2 つの境界線の交点の存在する位置だけでなく，それぞれの x 切片，y 切片の関係も考慮しなくてはいけません。なお，このように複雑になったときには，場合分けについて，ab 平面でチェックすると，ミスを防ぐことができます。

$\boxed{4}$ ［2004 東京大］



$p<q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2},\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，

$$\mathrm{M}\Big(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\Big)$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Big)$，$p=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Big)$なので，

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\Big(2-\frac{a^2}{3}\Big)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$\mathrm{M}\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\Big)$である。

ここで，$\triangle\mathrm{PQR}$ は１辺の長さ a の正三角形より，

$$\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ},\ \mathrm{RM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\Big)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\Big)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので，

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\Big)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp2a+a^2)$$

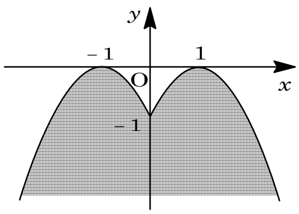
まとめると，$5a^2\mp18a=0$ となり, $a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

［解 説］

まず，回転を用いて考えましたが，計算がかなり複雑になってしまい，方向転換をした結果が上の解です。

$\boxed{5}$ ［2005 金沢大・文］

(1) $A_1 : y \leqq -(x-1)^2$，$A_2 : y \leqq -(x+1)^2$ に対し，集合 $A = A_1 \cup A_2$ の表す領域は，右図の網点部となる。



さて，$B : y \geqq (x-a)^2 + b$ に対し，$a = 0$，$b = -1$ のときは，$B : y \geqq x^2 - 1$ である。

よって，$A \cap B$ の表す領域は，y 軸に関して対称となり，その面積 S は，

$$S = 2\int_0^1 \{ -(x-1)^2 - (x^2 - 1) \} dx = 2\int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx = \frac{2}{3}$$

(2) $A_1 \cap B \neq \phi$ であるとき，放物線 $y = -(x-1)^2$ と $y = (x-a)^2 + b$ は共有点をもち，

$$-(x-1)^2 = (x-a)^2 + b,\quad 2x^2 - (2a+2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a+1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 + 2a - 1,\quad b \leqq -\frac{1}{2}(a-1)^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3) $A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ より，$A \cap B \neq \phi$ であることは，$A_1 \cap B \neq \phi$ または $A_2 \cap B \neq \phi$ であることと同値である。

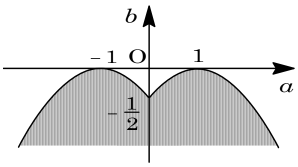
ここで，$A_2 \cap B \neq \phi$ という条件は，(2)と同様にして，

$$-(x+1)^2 = (x-a)^2 + b,\quad 2x^2 - (2a-2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a-1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 - 2a - 1,\quad b \leqq -\frac{1}{2}(a+1)^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

以上より，$A \cap B \neq \phi$ であるとき①または②が成立し，これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



［解 説］

集合と領域の融合問題です。(3)の題意は，少し把握しづらいですが，その点は，(2)の誘導によって少し緩和されています。

６ ［2005 大阪大・理］

(1) 条件より，$x=t\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……①，$y=1-t^2+t\sin\dfrac{\pi}{4}=1-t^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……②

$y=0$ とすると，②から $1-t^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=0$ より，

$$\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0,\ (\sqrt{2}t+1)(t-\sqrt{2})=0$$

$x\geqq 0$ より $t\geqq 0$ なので，$t=\sqrt{2}$ となり，①から点 Q の x 座標は $x=1$ である。

(2) $x=t\cos\theta$ ……③，$y=1-t^2+t\sin\theta$ ……④に対して，

$t=0$ のとき，$(x,\ y)=(0,\ 1)$

$t\neq 0$ のとき，③④より $\cos\theta=\dfrac{x}{t}$，$\sin\theta=\dfrac{y-1+t^2}{t}$ から，

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y-1+t^2}{t}\right)^2=1,\ x^2+(y-1+t^2)^2=t^2 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤は $(x,\ y)=(0,\ 1)$ を満たしているので，$t=0$ のときも成り立つ。

さて，t が実数全体を動くとき，曲線⑤が通過する範囲は，⑤を t の方程式をしてみたとき，実数 t が存在する条件として求めることができる。

⑤から，$x^2+(y-1)^2+2(y-1)t^2+t^4=t^2$

$$t^4+(2y-3)t^2+x^2+(y-1)^2=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

ここで，$u=t^2\geqq 0$ とおくと，⑥は $u^2+(2y-3)u+x^2+(y-1)^2=0$ ……⑦となり，2 次方程式⑦が，0 以上の解を少なくとも 1 つもつ条件となる。

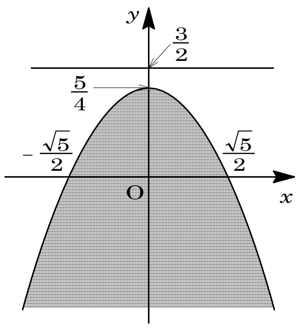
そこで，$f(u)=u^2+(2y-3)u+x^2+(y-1)^2$ とおき，$f(0)=x^2+(y-1)^2\geqq 0$ に注意すると，

$$D=(2y-3)^2-4\{x^2+(y-1)^2\}\geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑧$$

$$u=-\frac{2y-3}{2}\geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑨$$

⑧から，$-4y-4x^2+5\geqq 0$，$y\leqq -x^2+\dfrac{5}{4}$

⑨から，$2y-3\leqq 0$，$y\leqq\dfrac{3}{2}$



以上まとめると，曲線 C が通過する範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。

(3) 点 Q の x 座標の最大値は，(2)より $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であり，③④より，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}=t\cos\theta \cdots\cdots ⑩,\ 0=1-t^2+t\sin\theta \cdots\cdots ⑪$$

⑩より，$t=\dfrac{\sqrt{5}}{2\cos\theta}$ となり，⑪に代入すると，

$$1-\frac{5}{4\cos^2\theta}+\frac{\sqrt{5}\sin\theta}{2\cos\theta}=0,\ 1-\frac{5}{4}(1+\tan^2\theta)+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta=0$$

まとめると,

$$5\tan^2\theta-2\sqrt{5}\tan\theta+1=0\,,\ (\sqrt{5}\tan\theta-1)^2=0$$

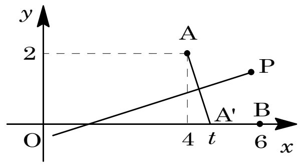
よって，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である。

［解 説］

難易度が高いというわけではありませんが，それなりに時間のかかる問題です。(2)では，まずパラメータ θ を動かし，その後，パラメータ t を動かして通過領域を求めました。

7 ［2006 名古屋大・理］

(1) ピッタリ直線 l は, 線分 AA$'$ の垂直二等分線より, PA = PA$'$ となり,



$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると, $t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2) ピッタリ直線が 2 本存在するのは, 点 A$'(t,\ 0)$ が 2 つ存在するときで, このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで, $f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと,

$0<p<6$………②, $-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④, $f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

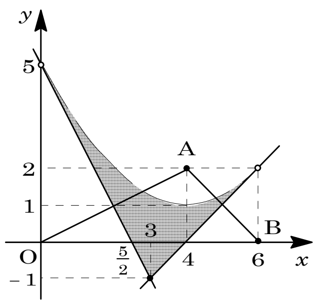
③より, $4q<(p-4)^2+4$, $q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③$'$

④より $q\geqq -2p+5$ ………④$'$, ⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤$'$

さて, 領域③$'$ の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して, $q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると, $p=0$ のとき $q'=-2$, $p=6$ のとき $q'=1$ から, 領域③$'$ と領域④$'$ の境界線, 領域③$'$ と領域⑤$'$ の境界線はそれぞれ接する。

したがって, ②③$'$ ④$'$ ⑤$'$ より, 点 P$(p,\ q)$ の存在範囲は, 右図の網点部となる。ただし, 実線の境界線は含み, 破線の放物線上の境界線は含まない。



(3) ①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき, $A'_1(t_1,\ 0)$, $A'_2(t_2,\ 0)$ とする。

$$\overrightarrow{AA'_1}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{AA'_2}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより, $\overrightarrow{AA'_1}\cdot\overrightarrow{AA'_2}=0$ となり,

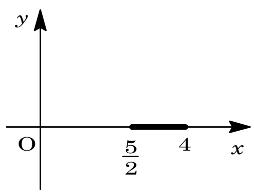
$(t_1-4)(t_2-4)+4=0$, $t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0$ ………⑥

ここで, ①に対して, 解と係数の関係を用いると,

$t_1+t_2=2p$, $t_1t_2=8p+4q-20$

⑥に代入して, $8p+4q-20-8p+20=0$

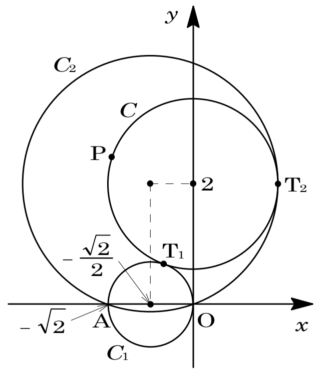
よって, $q=0$ となり, 点 P$(p,\ q)$ は x 軸上に存在し, (2)の結論と合わせて図示すると, 右図の太線部となる。



［解 説］

線対称を題材にした問題で, ひとひねりが加えられています。

8 ［2007 北海道大・文］



(1) $C: x^2+y^2-4y+2=0$ より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円 C は中心$(0,\ 2)$，半径$r=\sqrt{2}$ となる。

さて，中心$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$で，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円をC_1とすると，その半径は$r_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$である。

すると, C と C_1 の中心間距離は,

$$d_1=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

また，半径の和は，$r+r_1=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

よって，$d_1=r+r_1$ となり, 2 円 C と C_1 は外接する。

次に，中心$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$で, 2 点 A, O を通る円を$C_2$とすると，その半径は,

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

すると，C とC_2の中心間距離は$d_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，半径の差は$r_2-r=\frac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$d_2=r_2-r$ より，円 C は円C_2に内接する。

(2) C とC_1，C とC_2の接点を$\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$ とおくと，この接点以外は，C 上の点 P は円C_1の外部，円C_2の内部にあり,

$$\angle \mathrm{AT_2O} \leqq \angle \mathrm{APO} \leqq \angle \mathrm{AT_1O}$$

$$\cos\angle \mathrm{AT_1O} \leqq \cos\angle \mathrm{APO} \leqq \cos\angle \mathrm{AT_2O}$$

さて, AO はC_1の直径なので$\angle \mathrm{AT_1O}=90°$ となり，$\cos\angle \mathrm{AT_1O}=0$

また，C_2の中心を B とおくと，$\angle \mathrm{AT_2O}=\frac{1}{2}\angle \mathrm{ABO}$ より,

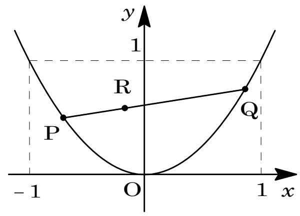
$$\cos\angle \mathrm{AT_2O}=\frac{2}{r_2}=\frac{2}{\frac{3}{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\cos\angle \mathrm{APO}$ の最小値は 0，最大値は$\frac{2\sqrt{2}}{3}$である。

［解 説］

(1)の巧みな誘導により，(2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると，計算の海に溺れてしまいます。

9 [2007 東京大・理]



(1) P$(p,\ p^2)$，Q$(q,\ q^2)$とおき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R の動く範囲 D に点$(a,\ b)$が属することより，

$$a=\frac{2p+q}{3}\cdots\cdots\cdots①,\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q=3a-2p$ ……③となり，②に代入すると，

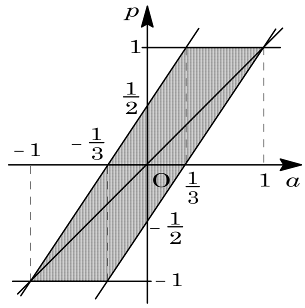
よって，$2p^2+(3a-2p)^2=3b$

$$b=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p)=2(p-a)^2+a^2$ とおき，$-1\leqq p\leqq 1$ ……④，$-1\leqq q\leqq 1$ ……⑤のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$ となり，

$$\frac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\frac{3a+1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1\leqq a\leqq 1$ から，$f(p)$は最小値 $f(a)=a^2$ をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\quad f(1)=3a^2-4a+2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより, a の値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると,

(i) $-1\leqq a\leqq -\frac{1}{3}$ のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(-1)$ より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

(ii) $-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$ のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a-1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

(iii) $0\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a+1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$ のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(1)$ より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2$

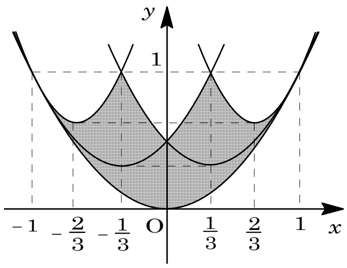
(2) $a<-1$，$1<a$ のときは，右上図より，④⑥を満たす p は存在しない。

よって, (1)から, D を表す不等式は,

$$x^2\leqq y\leqq 3x^2+4x+2\ \left(-1\leqq x\leqq -\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2\left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$

以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。

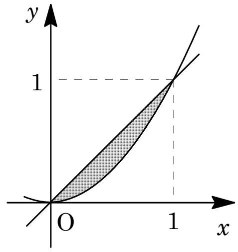


［解 説］

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。

10　　[2008 一橋大]

不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ ……①の定める領域は右図の網点部である。



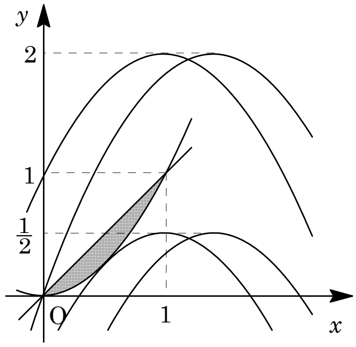
さて，$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ より，

$$-(x-a)^2 + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -(x-a)^2 + 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，②で表される領域は，$y = -(x-a)^2 + \dfrac{1}{2}$ ……③と $y = -(x-a)^2 + 2$ ……④のグラフに挟まれた領域である。

ここで，③と $y = x^2$ を連立して，

$$x^2 = -(x-a)^2 + \frac{1}{2},\ \ 2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{2} = 0$$



すると，③のグラフが $y = x^2$ に接するのは，

$$D/4 = a^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$a > 0$ から，$a = 1$ となる。

また，④のグラフが原点を通るのは，

$$0 = -a^2 + 2$$

$a > 0$ から，$a = \sqrt{2}$ となる。

よって，領域①が領域②に含まれる a の値の範囲は，

$$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$$

［解 説］

図を見ながら必要な計算をしていきます。ただ，2 つの放物線の頂点の y 座標はそれぞれ固定されており，しかも x 座標は等しくなっています。このため，a の値の変化に伴う 2 つの放物線の動きは，複雑ではありません。

11 ［2009 一橋大］

(1) 不等式$-2\leqq x\cos\theta+y\sin\theta\leqq y+1$……①に対して，

(i) $x=y=0$のとき ①は$-2\leqq 0\leqq 1$となり，任意θに対して成立する。

(ii) $x\neq 0$または$y\neq 0$のとき

φを$\sin\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$と決めると，①より，

$$-2\leqq\sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta+\varphi)\leqq y+1$$

任意のθに対して成立する条件は，

$$-2\leqq-\sqrt{x^2+y^2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \sqrt{x^2+y^2}\leqq y+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$\sqrt{x^2+y^2}\leqq 2$，$x^2+y^2\leqq 4$………④

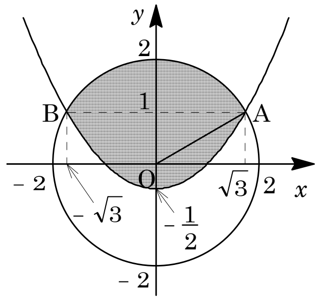
③より，$y+1\geqq 0$のもとで，$x^2+y^2\leqq(y+1)^2$

$$x^2\leqq 2y+1,\quad y\geqq\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，領域④と⑤の境界線の2つの交点A, Bは，

$$(2y+1)+y^2=4,\quad (y-1)(y+3)=0$$

$y\geqq-\dfrac{1}{2}$から$y=1$となり，$x=\pm\sqrt{3}$である。



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

さて，直線OAの方程式が$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$で，OAとy軸のなす角が$\dfrac{\pi}{3}$より，網点部の面積をSとすると，

$$S=2\times\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}+2\int_0^{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\Big)dx$$

$$=\frac{4\pi}{3}+2\Big[\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x\Big]_0^{\sqrt{3}}=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$$

(2) 不等式$-1\leqq x^2\cos\alpha+y\sin\beta\leqq 1$……⑥に対し，独立に値をとる任意の$\alpha$，$\beta$では，$-1\leqq\cos\alpha\leqq 1$，$-1\leqq\sin\beta\leqq 1$なので，⑥より，

(i) $y\geqq 0$のとき

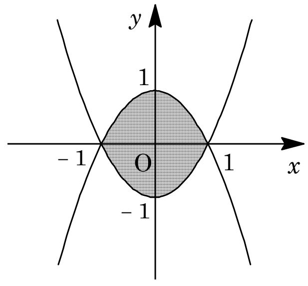
$$-1\leqq-x^2-y\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad x^2+y\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より，$y\leqq-x^2+1$

(ii) $y<0$のとき

$$-1\leqq-x^2+y\ \cdots\cdots\cdots⑨,\quad x^2-y\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

⑨⑩より，$y\geqq x^2-1$



(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

そこで，網点部の面積を S とすると，

$$S = 2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx = -2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx = \frac{1}{3}(1+1)^3 = \frac{8}{3}$$

［解 説］

三角不等式の問題です。(1)では任意の θ でとりうる最大値・最小値，(2)では任意の α，β でとる最大値・最小値をもとに，$(x,\ y)$ の条件が定まります。

$\boxed{12}$ ［2009 広島大・理］

(1) △ABC が二等辺三角形であるとき，点 $\mathrm{C}(x,\ y)$ の存在範囲は，$y>0$ において，

(i) $\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$ のとき

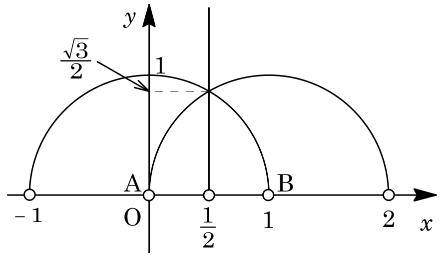
点 C は線分 AB の垂直二等分線 $x=\dfrac{1}{2}$ 上にある。

(ii) $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ のとき

点 C は点 A を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ 上にある。

(iii) $\mathrm{BC}=\mathrm{BA}$ のとき

点 C は点 B を中心とする半径 1 の円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上にある。



(i)(ii)(iii)より，点 C は右上図の円または直線上にある。

(2) △ABC が鋭角三角形である条件は，

$$\angle\mathrm{CAB}<\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\text{①},\ \angle\mathrm{ABC}<\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\text{②},\ \angle\mathrm{BCA}<\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\text{③}$$

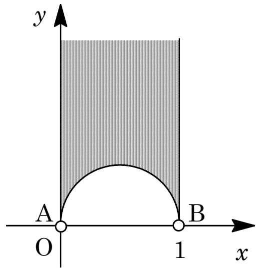
$y>0$ において，①②③がすべて成立する点 $\mathrm{C}(x,\ y)$ の存在範囲を求める。

①より，点 C は y 軸の右側，すなわち領域 $x>0$ にある。

②より，点 C は直線 $x=1$ の左側，すなわち領域 $x<1$ にある。

③より，点 C は AB を直径とする円の外部，すなわち領域 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$ にある。

①②③より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，境界は領域に含まない。



(3) まず，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$，$\gamma=\angle\mathrm{BCA}<\dfrac{\pi}{2}$ より，点 C は(2)の領域内に存在する。

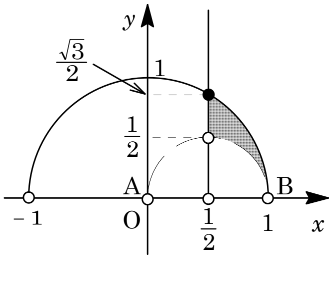
ここで，条件から，$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ なので，三角形の角と辺の大小関係を用いると，

$$\mathrm{BC}\leqq\mathrm{AC}\leqq\mathrm{AB}$$

すると，$\mathrm{BC}\leqq\mathrm{AC}$ から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x\geqq\dfrac{1}{2}$ にある。

また，$\mathrm{AC}\leqq\mathrm{AB}$ から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x^2+y^2\leqq1$ にある。

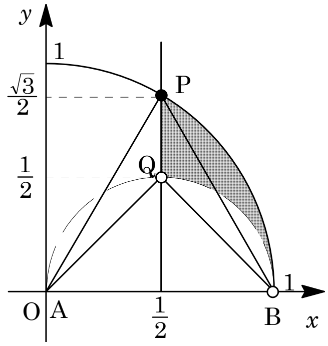
以上より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，破線の境界は領域に含まない。



(4) まず，点$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\ \ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$とおくと，$\triangle\mathrm{ABP}$ は正三角形となるので，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{3}$である。

また，AB を直径とする円周上に点 Q をとると，$\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{\pi}{2}$である。

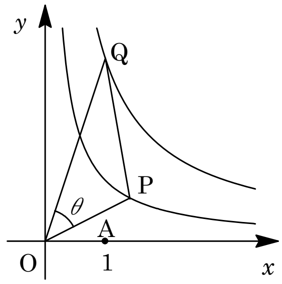
すると，点 C が右図の網点部に存在するとき，線分 AB を弦とする円弧を考え，$\gamma=\angle\mathrm{BCA}$ のとりうる値を求めると，右図より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\gamma<\dfrac{\pi}{2}$である。



［解 説］

巧みな誘導がついている平面図形と領域の総合問題です。式だけで攻めるのではなく，図形的に解くと，スッキリした解になります。

$\boxed{13}$ ［2010 千葉大・理］



$P\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，$Q\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$に対して，$\angle AOP=\alpha$，$\angle AOQ=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$ となる。

条件より，$\alpha<\beta$ なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\quad ap^2-q^2>0\cdots\cdots\cdots①$$

さて，△OPQ の面積を S とすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$\angle POQ=\theta$ とおくと，$\theta=\beta-\alpha$ から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$ すなわち $pq=\sqrt{a}$ のときに成立する。

よって，$\tan\theta$ の最大値は $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$ から，$a=16$ である。

［解 説］

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立する p，q の値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

14 ［2011 東北大・理］

(1) 不等式$y\leqq 2ax-a^2+2a+2$の表す領域に，点$(p,\ q)$が存在しているので，

$$q\leqq 2ap-a^2+2a+2\,,\ \ a^2-2(p+1)a+q-2\leqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

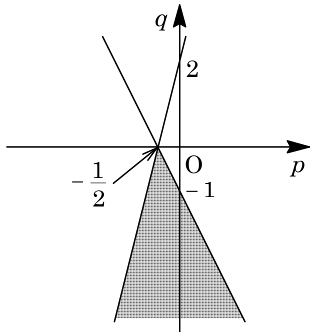
ここで，$f(a)=a^2-2(p+1)a+q-2$ とおくと，$(*)$は$f(a)\leqq 0$となる。

さて，$-1\leqq a\leqq 2$ を満たすすべての a に対し，$f(a)\leqq 0$である条件は，

$$f(-1)=2p+q+1\leqq 0$$

$$f(2)=-4p+q-2\leqq 0$$

よって，点$(p,\ q)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2) (1)と同様に，$-1\leqq a\leqq 2$を満たすいずれかのaに対し，$f(a)\leqq 0$である条件は，

(i) $p+1\leqq -1\ (p\leqq -2)$のとき

$$f(-1)=2p+q+1\leqq 0$$

(ii) $-1\leqq p+1\leqq 2\ (-2\leqq p\leqq 1)$のとき

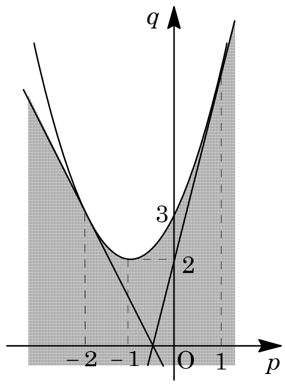
$f(a)=0$が実数解をもつことより，

$$D/4=(p+1)^2-q+2\geqq 0\,,\ \ q\leqq (p+1)^2+2$$

(iii) $p+1\geqq 2\ (p\geqq 1)$のとき

$$f(2)=-4p+q-2\leqq 0$$

(i)～(ii)より，点$(p,\ q)$の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

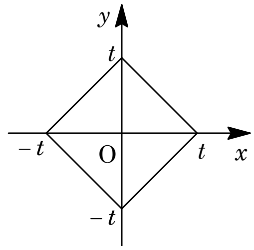


［解 説］

2 次不等式と領域の融合問題です。基本的な内容ですが，時間はかかります。

$\boxed{15}$ [2011 神戸大・理]

(1) $t>0$ のとき，$|x|+|y|=t$ ……①に対して，



(i) $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$x+y=t$

(ii) $x\leqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$-x+y=t$

(iii) $x\leqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$-x-y=t$

(iv) $x\geqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$x-y=t$

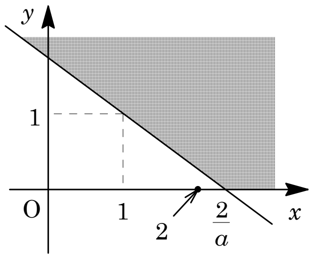
(i)〜(iv)より，①で表される図形は右図の正方形である。

(2) $a\geqq 0$ のとき，連立不等式 $ax+(2-a)y\geqq 2$ ……②，$y\geqq 0$ ……③で表される領域は，まず②の境界線 $ax+(2-a)y=2$ …… ②$'$ に対して，

$$a(x-y)+2y-2=0$$

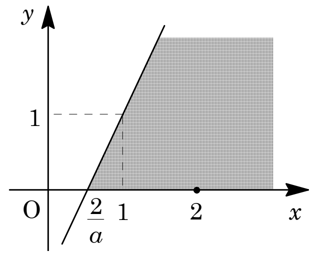
すると，0 以上の任意の実数 a に対して，$x=y=1$ で成立することから，直線②$'$ はつねに点 $(1,\ 1)$ を通る。また，直線②$'$ は，$a=0$ のとき $y=1$ となり x 軸に平行になり，$a>0$ のとき x 軸と交わり，その交点は点 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ である。

さらに，$x=y=0$ のとき②は成立しないので，不等式②の表す領域は，直線②$'$ を境界線とする原点を含まない側である。



(i) $a=0$ または $\dfrac{2}{a}\geqq 2\ (0\leqq a\leqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{2}{2-a}\right)$ で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{2-a}$ をとる。

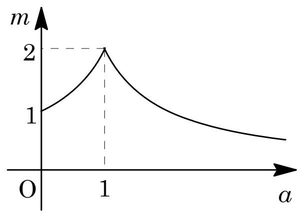


(ii) $0<\dfrac{2}{a}\leqq 2\ (a\geqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，x 軸との交点 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{a}$ をとる。

(i)(ii)より，$|x|+|y|$ の最小値 m は，

$$m=\frac{2}{2-a}\quad(0\leqq a\leqq 1),\ \ m=\frac{2}{a}\quad(a\geqq 1)$$



(3) (2)より，a と m の関係をグラフに表すと右図のようになり，$a=1$ のとき m は最大値 2 をとる。

［解 説］

不等式②で表される領域を把握するために，あの手この手を用いています。これは，極力，場合分けを避けるためです。

16 [2012 神戸大]

(1) l が y 軸と平行であるとき, k を実数として, $l: x=k$ とおくと, A$(1,\ 0)$ と l の距離が $|k-1|$, B$(-1,\ 0)$ と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より,

$$|k-1|+|k+1|=1 \cdots\cdots\cdots①$$

ところが, $|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1|\geqq|(1-k)+(k+1)|=2$ であるので,

①を満たす k は存在しない。よって, l は y 軸と平行でない。

(2) (1)より, $l: y=mx+n$, すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると, l は線分 AB と交わることより, $(m+n)(-m+n)\leqq 0 \cdots\cdots\cdots②$

ここで, A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$, B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので,

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\quad |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1 \cdots\cdots\cdots③$$

②より, $m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり, $3m^2=1$

よって, l の傾きは, $m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) l が線分 AB と交わらないとき, $(m+n)(-m+n)>0 \cdots\cdots\cdots④$

③④より, $m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり, $-m^2+4n^2=1 \cdots\cdots\cdots⑤$

すると, l と原点との距離 d は, ⑤より,

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

［解 説］

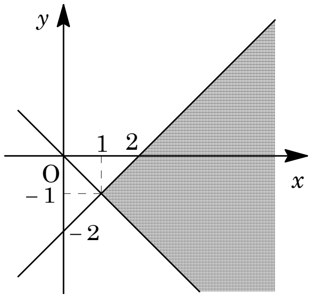
点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお, ②と④は, 正領域・負領域の考え方を利用しています。

17 [2012 東北大・理]

(1) 条件から，$x=s+t+1$ ……①，$y=s-t-1$ ……②に対して，①②より，

$$2s=x+y\,,\ s=\frac{1}{2}(x+y)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$$2t+2=x-y\,,\ t=\frac{1}{2}(x-y-2)\ \cdots\cdots\cdots ④$$



$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ から，③④より，

$$x+y\geqq 0\,,\ x-y-2\geqq 0$$

すると，点$(x,\ y)$の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

(2) 条件から，$x=st+s-t+1$ ……⑤，$y=s+t-1$ ……⑥に対して，

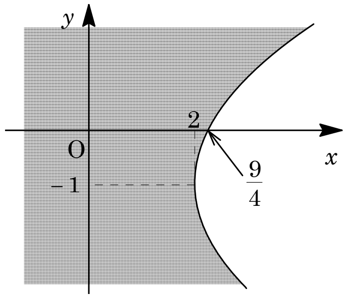
⑤より，$x=(s-1)(t+1)+2$，$(s-1)(t+1)=x-2$ ………⑦

⑥より，$y=(s-1)+(t+1)-1$，$(s-1)+(t+1)=y+1$ …………⑧

⑦⑧から，$s-1$，$t+1$ は u についての 2 次方程式$u^2-(y+1)u+x-2=0$ の 2 つの解であり，これらが実数であることより，

$$D=(y+1)^2-4(x-2)\geqq 0$$

$$(y+1)^2\geqq 4(x-2)$$

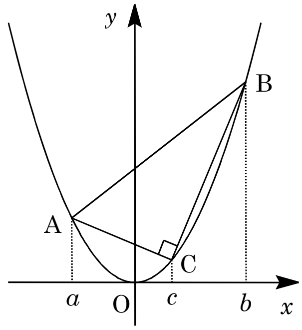


s，t が実数全体を動くとき，$s-1$，$t+1$ も実数全体を動くので，点$(x,\ y)$の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

［解 説］

(2)は，1 文字を消去して実数解条件からも導けますが，少し式計算をして，対称式を持ち出しました。

18 ［2013 神戸大・文］



(1) $A(a,\ a^2)$，$B(b,\ b^2)$，$C(c,\ c^2)$に対して，

$$\overrightarrow{CA}=(a-c,\ a^2-c^2)=(a-c)(1,\ a+c)$$
$$\overrightarrow{CB}=(b-c,\ b^2-c^2)=(b-c)(1,\ b+c)$$

条件より，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ なので，$1+(a+c)(b+c)=0$

$$(a+c)(b+c)=-1\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$a=-c-\dfrac{1}{b+c}\cdots\cdots\cdots②$

(2) ②より，$b-a=b+c+\dfrac{1}{b+c}\cdots\cdots\cdots③$

ここで，$b+c<0$ とすると，①より $a+c>0$ となり $b<-c<a$ であるが，これは $a<b$ に反するので，$b+c>0$ である。

すると，③より，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$b-a=b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

なお，等号は $b+c=1$ のときに成立する。

(3) $AB=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}=(b-a)\sqrt{1+(b+a)^2}$

ここで，(2)より $b-a\geqq 2$ であり，$(b+a)^2\geqq 0$ であるので，

$$AB\geqq 2\sqrt{1+0}=2$$

等号が成立するのは，$b-a=2$ かつ $b+a=0$，すなわち $a=-1$，$b=1$ のときである。このとき，$b+c=1$ から $c=0$ となる。

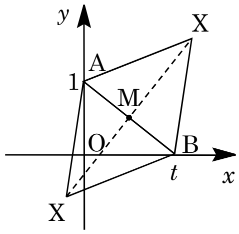
よって，AB の最小値は 2 であり，このとき $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ 1)$，$C(0,\ 0)$ となる。

［解 説］

(3)では大雑把に評価して，細部を詰めています。この方法が，いつもうまくいくとは限りませんが。

19 ［2013 広島大・理］

(1) 線分 AB の中点 M は $\mathrm{M}\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。



また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t,\ -1)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ は，

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

さて，線分 AB を 1 辺とする正三角形のもう 1 つの頂点を X とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{MX}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}$ から，

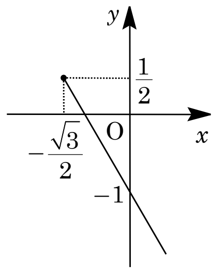
$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MX}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\,\vec{e}=\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

$$=\left(\frac{t}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

よって，$\mathrm{X}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ または $\mathrm{X}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

(2) 条件より，$\mathrm{C}\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ となり，$\mathrm{C}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\ \cdots\cdots\cdots②$$



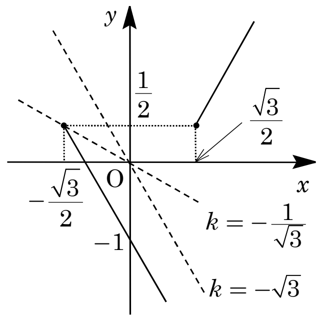
①より，$t=2x+\sqrt{3}$ となり，②に代入すると，

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+\sqrt{3})=-\sqrt{3}x-1$$

$t\geqq 0$ から $x\geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，点 C の軌跡は右図のようになる。

(3) 点 C 以外のもう 1 つの頂点 $\mathrm{D}\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ についても同様にすると，

$$y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-\sqrt{3})=\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



よって，点 C と点 D の軌跡は右図の実線となる。

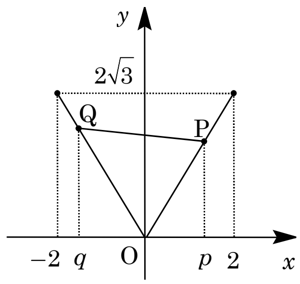
さて，直線 $y=kx$ 上の点 P に対して，3 点 A，B，P を頂点とする正三角形ができるのは，点 C，D の軌跡と直線 $y=kx$ が共有点をもつことなので，

$$k<-\sqrt{3},\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k$$

［解 説］

とらえにくい(3)の設問への誘導が，うまくつけられている問題です。なお，(1)の解答例では単位ベクトルを利用しましたが，回転を利用する方法もあります。

$\boxed{20}$ ［2014 東京大・理］



(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3\cdots\cdots\text{①}$$

ただし，$-2\leqq q\leqq 0$ より $-2\leqq p-3\leqq 0$ となり，$0\leqq p\leqq 2$ と合わせて $1\leqq p\leqq 2$ である。

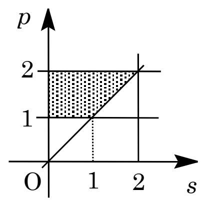
ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$ $(p-3\leqq x\leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\text{②}$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots$③



ただし，$0\leqq s\leqq 2$，$p-3\leqq s\leqq p$，$1\leqq p\leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。

そこで，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i) $0\leqq s\leqq 1$ のとき

右上図より，$1\leqq p\leqq 2$ となり，$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq 2$ から，

$$f(1)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii) $1\leqq s\leqq 2$ のとき

右上図より，$s\leqq p\leqq 2$ となり，$2\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ から，

$$f(s)\leqq f(p)\leqq f(2),\ \sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$$

(i)(ii)より，D に入るような t の範囲は，③から $t=f(p)$ なので，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

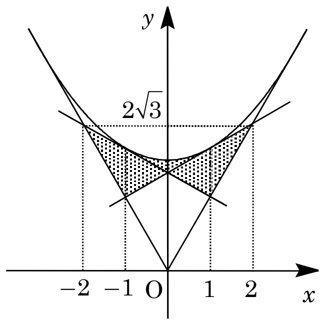
$$\sqrt{3}s\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\quad(1\leqq s\leqq 2)$$

(2) $-2\leqq s\leqq 0$ のときは，y 軸に関する対称性を考え，(1)と同様にすると，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)\quad(-1\leqq s\leqq 0)$$

$$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \quad (-2 \leqq s \leqq -1)$$

そこで，放物線$t=\frac{\sqrt{3}}{3}(s^2+9)$と直線$t=\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)$は，それぞれ$s=1$，$s=-1$で接することに注意して点$(s,\ t)$を含む領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

線分の通過領域の頻出問題です。上の解答例では，条件の不等式を sp 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる$p=\frac{s+3}{2}$も書き込んでおくのも, 1 つの方法です。

$\boxed{21}$ [2015 一橋大]

(1) $C(p,\ q)$とおくと，$OC=1$から，$p^2+q^2=1$ ………①

また，$A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$に対し，$AB=BC=CA$より，

$$a^2+b^2=p^2+(q-b)^2\ \cdots\cdots\cdots ②,\quad a^2+b^2=(p-a)^2+q^2\ \cdots\cdots\cdots ③$$

①②より，$a^2=1-2bq$となり，$b\neq 0$のとき$q=\dfrac{1-a^2}{2b}$ ………④

①③より，$b^2=1-2ap$となり，$a\neq 0$のとき$p=\dfrac{1-b^2}{2a}$ ………⑤

④⑤を①に代入すると，$\dfrac{(1-b^2)^2}{4a^2}+\dfrac{(1-a^2)^2}{4b^2}=1$となり，

$$b^2(1-b^2)^2+a^2(1-a^2)^2=4a^2b^2\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

なお，$b=0$のときは$a=\pm1$，$a=0$のときは$b=\pm1$となるが，この場合も⑥はともに成立し，左辺を展開すると，

$$a^6+b^6-2(a^4+b^4)+a^2+b^2=4a^2b^2$$

ここで，$s=a^2+b^2$，$t=ab$とすると，

$$s^3-3t^2s-2(s^2-2t^2)+s=4t^2,\quad s(s^2-3t^2-2s+1)=0$$

$s=0$のとき$a=b=0$，そして②から$p=q=0$となり不適なので，$s\neq 0$から，

$$s^2-3t^2-2s+1=0\ \cdots\cdots\cdots ⑦$$

(2) $\triangle ABC$は正三角形なので，その面積をSとおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}s\ \cdots\cdots\cdots ⑧$$

さて，⑦より$(s-1)^2-3t^2=0$から，$s=1\pm\sqrt{3}t$ ………⑨

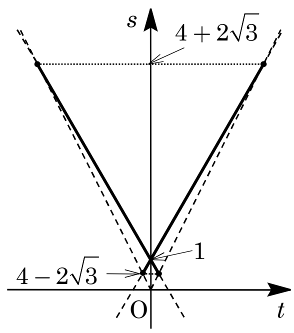
また，$s=(a+b)^2-2ab$から，$(a+b)^2=s+2t$となり，$s+2t\geqq 0$ ……⑩で，

$$a+b=\pm\sqrt{s+2t}$$

すると，a，bは，2次方程式$x^2\mp\sqrt{s+2t}\,x+t=0$の2つの解となり，

$$D=(s+2t)-4t=s-2t\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑨かつ⑩かつ⑪をts平面上に図示すると，右図の実線部となる。



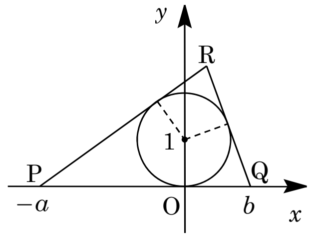
これより，$4-2\sqrt{3}\leqq s\leqq 4+2\sqrt{3}$となり，⑧から，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2\sqrt{3})\leqq S\leqq\frac{\sqrt{3}}{4}(4+2\sqrt{3}),\quad \sqrt{3}-\frac{3}{2}\leqq S\leqq\sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

［解 説］

(2)では図をかいてsの範囲を求めましたが，⑨よりtを消去しても可能です。

22 ［2015 名古屋大・文］



(1) 直線 QR は x 軸に平行でないので，その法線ベクトルの成分を$(1,\ m)$とおくと，その方程式は，

$$(x-b)+my=0,\ x+my-b=0\cdots\cdots\cdots①$$

①は，円$C:x^2+(y-1)^2=1$に接することより，

$$\frac{|m-b|}{\sqrt{1+m^2}}=1,\ (m-b)^2=1+m^2$$

よって，$2bm=b^2-1$より，$m=\dfrac{b^2-1}{2b}$となり，①に代入すると，

$$x+\frac{b^2-1}{2b}y-b=0,\ 2bx+(b^2-1)y-2b^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

(2) 直線 PR の方程式は，(1)の結果から，$-2ax+(a^2-1)y-2a^2=0\cdots\cdots\cdots③$

②③を連立すると，$\{a(b^2-1)+b(a^2-1)\}y=2ab^2+2a^2b$となり，

$$\{ab(a+b)-(a+b)\}y=2ab(a+b),\ y=\frac{2ab}{ab-1}\quad(ab\neq1,\ a+b>0)$$

②に代入すると，$2bx+\dfrac{2ab}{ab-1}(b^2-1)-2b^2=0$となり，

$$x+\frac{a}{ab-1}(b^2-1)-b=0,\ x=-\frac{a}{ab-1}(b^2-1)+b=\frac{a-b}{ab-1}$$

これより，$\mathrm{R}\Big(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\Big)$である。

(3) R の y 座標が正より，$\dfrac{2ab}{ab-1}>0$すなわち$ab>1$であり，このとき，

$$\mathrm{QR}^2=\Big(\frac{a-b}{ab-1}-b\Big)^2+\Big(\frac{2ab}{ab-1}\Big)^2=\frac{a^2(1-b^2)^2+4a^2b^2}{(ab-1)^2}=\frac{a^2(1+b^2)^2}{(ab-1)^2}$$

よって，$\mathrm{QR}=\dfrac{a(1+b^2)}{ab-1}$となり，同様にすると$\mathrm{PR}=\dfrac{b(1+a^2)}{ab-1}$となる。

そこで，△PQR の周の長さを T とすると，$\mathrm{PQ}=a+b$より，

$$T=a+b+\frac{a(1+b^2)}{ab-1}+\frac{b(1+a^2)}{ab-1}=\frac{2ab(a+b)}{ab-1}\cdots\cdots\cdots④$$

(4) $\mathrm{PQ}=4$で R の y 座標が正より，$a+b=4$，$ab>1$である。

ここで，$\sqrt{ab}\leqq\dfrac{a+b}{2}=2$より$ab\leqq4$となり，$1<ab\leqq4$である。すると，④から，

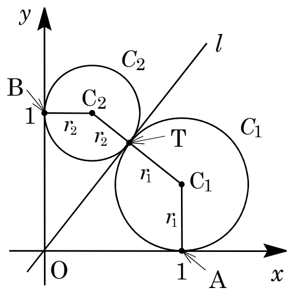
$$T=\frac{8ab}{ab-1}=\frac{8}{1-\frac{1}{ab}}\geqq\frac{8}{1-\frac{1}{4}}=\frac{32}{3}$$

これより，$ab=4\ (a=b=2)$のとき T は最小値$\dfrac{32}{3}$をとる。

［解 説］

別解もいろいろ可能な円と直線に関する標準的な問題です。特に(3)は……。

$\boxed{23}$ ［2015 東京大・文］



円 C_1 と x 軸，円 C_2 と y 軸，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ A，B, T とおくと，$\mathrm{OB}=\mathrm{OT}=\mathrm{OA}=1$ より，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ となる。

すると，円 C_1 の半径 r_1，円 C_2 の半径 r_2 より，円 C_1 の中心 $\mathrm{C_1}(1,\ r_1)$，円 C_2 の中心 $\mathrm{C_2}(r_2,\ 1)$ と表せる。

ここで，円 C_1 と C_2 が接する条件は，$\mathrm{C_1C_2}=r_1+r_2$ より，

$$\sqrt{(r_2-1)^2+(1-r_1)^2}=r_1+r_2$$

これより，$(r_2-1)^2+(1-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ となり，

$$r_1r_2+r_1+r_2=1\,,\ (1+r_1)r_2=1-r_1\,,\ r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$0<r_1<1$ のもとで，$(*)$から，

$$8r_1+9r_2=8r_1+\frac{9-9r_1}{1+r_1}=8r_1+\frac{-9(1+r_1)+18}{1+r_1}=8r_1-9+\frac{18}{1+r_1}$$
$$=8+8r_1+\frac{18}{1+r_1}-17=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17$$

そこで，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17\geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=2\sqrt{2^3\cdot 2\cdot 3^2}-17=7$$

等号は，$8(1+r_1)=\dfrac{18}{1+r_1}$ すなわち $1+r_1=\dfrac{3}{2}\left(r_1=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき成り立ち，この値は $0<r_1<1$ を満たしている。

以上より，$8r_1+9r_2$ の最小値は 7 である。

このとき，$r_1=\dfrac{1}{2}$，$(*)$から $r_2=\dfrac{1}{3}$ となり，$\mathrm{C_1}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C_2}\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ である。そして，接点 T は線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $r_1:r_2=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=3:2$ に内分する点より，$\mathrm{T}(p,\ q)$ とおくと，

$$p=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5},\ q=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

よって，線分 OT の傾きは $\dfrac{q}{p}=\dfrac{4}{3}$ となり，直線 l の方程式は $y=\dfrac{4}{3}x$ である。

［解 説］

解法のポイントは，冒頭に記した点 B の y 座標が 1 という点です。当然といえば当然ですが……。ただ，ここを外すとシビアな結果になります。なお，分数関数の微分法は範囲外ですので，最小値を求める際には，相加平均と相乗平均の関係を利用するように式変形をしています。

24 ［2015 東京大・文］

2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1)$ および点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ $(|x|\leqq 1)$ に対して，まず条件(ii)から，点 A, P, B は同一直線上にあることより，点 P の範囲は，$y=-x$ $(|x|\leqq 1)$ である。

次に，条件(i)から，2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ ……①とおくと，2 点 A, B を通ることより，

$$a-b+c=1 \cdots\cdots\cdots ②,\quad a+b+c=-1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$b=-1$，$c=-a$ となり，①に代入すると，

$$y=ax^2-x-a=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-a-\frac{1}{4a} \cdots\cdots\cdots ④$$

すると，頂点の x 座標の絶対値が 1 以上より，$\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$ から $0<|a|\leqq\dfrac{1}{2}$ ………⑤

そこで，点 P の範囲は，⑤の条件のもとで曲線④の $|x|\leqq 1$ における通過領域である。

まず，④を $(x^2-1)a-(x+y)=0$ ……⑥と変形すると，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を表す不等式は，この a についての方程式⑥が，⑤の範囲に実数解をもつ条件として得られる。

(a)　$x=\pm 1$ のとき　$x+y=0$ のとき，任意の a に対して⑥は成立するので，

$$(x,\ y)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

(b)　$x\neq\pm 1$ のとき　⑥より $a=\dfrac{x+y}{x^2-1}$ となり，⑤に代入すると，$0<\left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

$$0<|x+y|\leqq\frac{1}{2}|x^2-1|,\quad 0<|x+y|\leqq-\frac{1}{2}(x^2-1)\ (|x|\leqq 1)$$

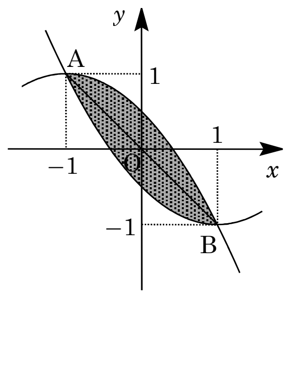
(b-i)　$x+y>0$ のとき　$x+y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\leqq-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$$

(b-ii)　$x+y<0$ のとき　$-x-y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$$

以上より，条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



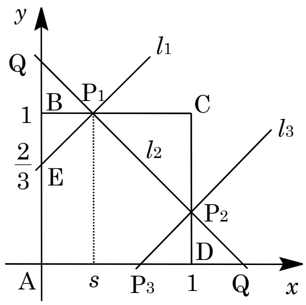
この領域の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{6}(1+1)^3=\frac{4}{3}$$

［解 説］

放物線の通過領域の問題です。すばやく結論の導ける条件(ii)から記しています。

$\boxed{25}$ ［2016 千葉大・文］



(1) 点 $E\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ と点 $P_1(s,\ 1)\ (0<s<1)$ を通る直線 l_1 を，$y=1$ に関して対称移動した直線を l_2 とする。

すると，l_2 は P_1 と E を $y=1$ に関して対称移動した点 $Q_1\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ を通ることより，その傾きが $-\dfrac{1}{3s}$ となり，

$$l_2 : y=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$$

l_2 が $D(1,\ 0)$ を通るとき，$0=-\dfrac{1}{3s}+\dfrac{4}{3}$ から，$s=\dfrac{1}{4}$

(2) l_2 と x 軸との交点 Q_2 は，$0=-\dfrac{1}{3s}x+\dfrac{4}{3}$ から $x=4s$ となり，$Q_2(4s,\ 0)$ から，

$$DP_3=DQ_2=4s-1 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3) P_3 は線分 AD 上にあることから，①より $0\leqq 4s-1\leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{4}\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}$ ………②

このとき，P_2 は線分 CD 上にある。そこで，$EP_1=Q_1P_1$，$P_2P_3=P_2Q_2$ から，$F=EP_1+P_1P_2+P_2P_3$ とおくと，

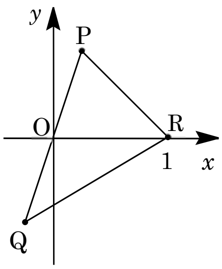
$$F=Q_1P_1+P_1P_2+P_2Q_2=Q_1Q_2=\sqrt{(4s)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{9s^2+1}$$

すると，②より $\dfrac{25}{16}\leqq 9s^2+1\leqq\dfrac{13}{4}$ となるので，F の最大値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{13}$，最小値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{3}$ である。

［解 説］

折れ線の長さの和に関する問題です。線対称移動がポイントですが，その誘導は問題文中に示されています。

$\boxed{26}$　［2016 東京大・文］



3点$P(x,\ y)$，$Q(-x,\ -y)$，$R(1,\ 0)$に対し，

$$\overrightarrow{QP}=2(x,\ y),\ \overrightarrow{RP}=(x-1,\ y),\ \overrightarrow{RQ}=-(x+1,\ y)$$

条件より，△PQR は鋭角三角形なので，まず$\overrightarrow{QP}\neq\vec{0}$かつ$\overrightarrow{RP}\neq\vec{0}$かつ$\overrightarrow{RQ}\neq\vec{0}$となり，

$$(x,\ y)\neq(0,\ 0),\ (x,\ y)\neq(1,\ 0),\ (x,\ y)\neq(-1,\ 0)$$

この条件のもとで，$\angle RPQ<90^\circ$から，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}>0$すなわち$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{RP}>0$となり，

$$x(x-1)+y^2>0,\ x^2+y^2-x>0,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle PQR<90^\circ$から，$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}>0$すなわち$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{RQ}<0$となり，

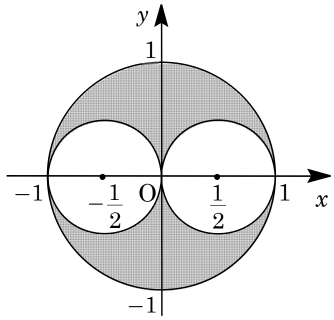
$$-x(x+1)-y^2<0,\ x^2+y^2+x>0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$\angle PRQ<90^\circ$から，$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}>0$となり，

$$-(x-1)(x+1)-y^2>0,\ x^2+y^2-1<0$$

$$x^2+y^2<1\cdots\cdots\cdots③$$

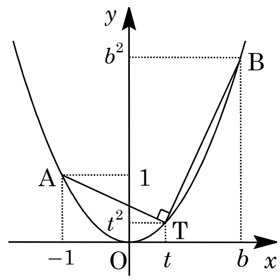


①②③より，点$P(x,\ y)$の範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。なお，3 点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$を除く条件は満たされている。

［解　説］

点と座標に関する基本問題です。解答例ではベクトルを利用していますが，余弦定理の適用でも構いません。

$\boxed{27}$ ［2016 名古屋大・文］



$\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-1<t<b)$に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+1,\ t^2-1)=(t+1)(1,\ t-1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，あるtに対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\ 1+(t-1)(t+b)=0$$
$$t^2+(b-1)t-b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たすtが$-1<t<b$に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-1)t-b+1=\left(t+\dfrac{b-1}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+2b-3}{4}$とおくと，

$$f(-1)=-2b+3,\ f(b)=2b^2-2b+1=2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$$

(i) $-2b+3\geqq0\left(-1<b\leqq\dfrac{3}{2}\right)$のとき

$(*)$を満たす t が$-1<t<b$に少なくとも 1 つ存在する条件は，$f(-1)\geqq0$かつ$f(b)>0$より，

$$-1<-\frac{b-1}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+2b-3}{4}\leqq0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-1<2$となり，$\dfrac{1}{3}<b<3$

②より，$(b+3)(b-1)\geqq0$となり，$b\leqq-3,\ 1\leqq b$

よって，$-1<b\leqq\dfrac{3}{2}$と合わせると，$1\leqq b\leqq\dfrac{3}{2}$となる。

(ii) $-2b+3<0\left(b>\dfrac{3}{2}\right)$のとき

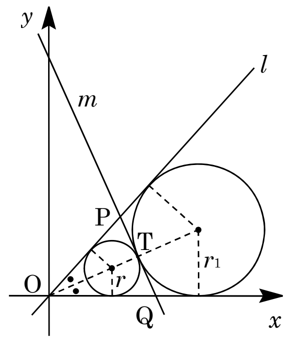
$f(-1)<0$かつ$f(b)>0$より，$(*)$を満たすtが$-1<t<b$に存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b\geqq1$である。

［解 説］

図形的な条件を数式化した後は，2 次方程式の解の配置の問題になります。ここでは，$f(b)>0$を見つけることがポイントとなっています。

$\boxed{28}$ ［2016 筑波大・理］



(1) 円 C_1，C_2 の半径を，それぞれ r_1，r_2 とする。

すると，$d_1=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ から，

$$r_1=d_1\sin\theta=2\sin^2\theta\cos\theta$$

また，$r_2=d_2\sin\theta$，$d_1-d_2=r_1+r_2$ から，

$$2\sin\theta\cos\theta-d_2=2\sin^2\theta\cos\theta+d_2\sin\theta$$

$$(1+\sin\theta)d_2=2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)$$

よって，$d_2=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ となり，

$$r_2=\frac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

(2) 円 C_1 と C_2 の接点を T とおくと，$\mathrm{OT}\perp\mathrm{PQ}$ から，

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{OT}\tan\theta=2(d_1-r_1)\tan\theta=2(2\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\tan\theta$$
$$=4\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\tan\theta=4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

ここで，$t=\sin\theta$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$\mathrm{PQ}=f(t)$ として，

$$f(t)=4t^2(1-t)=4t^2-4t^3$$
$$f'(t)=8t-12t^2=4t(2-3t)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，PQ の最大値は $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=4\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{16}{27}$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(3) (2)から，$\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ より $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ となり，このとき直線 m の傾きは，

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

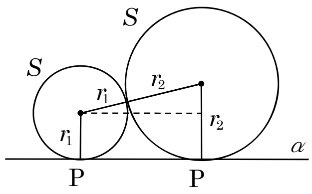
また，$\mathrm{PQ}=\dfrac{16}{27}$ から $\mathrm{TQ}=\dfrac{8}{27}$ となり，$\mathrm{OQ}=\dfrac{\mathrm{TQ}}{\sin\theta}=\dfrac{8}{27}\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{9}$ から点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\dfrac{4}{9},\ 0\right)$ である。すると，直線 m の方程式は，

$$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{4}{9}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{2}{9}\sqrt{5}$$

［解 説］

円と接線の関係をもとに，微分を利用して最大・最小へと繋ぐ問題です。問題文に参考図が書かれているため，解きやすくなっています。

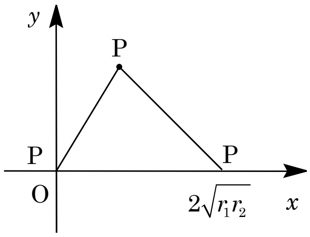
29 ［2016 東京工大］



(1) 球 S_1，S_2 と平面 α の接点 P_1，P_2 を含み，α に垂直な断面を考えると，三平方の定理から，

$$P_1P_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-|r_1-r_2|^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$$

(2) S_1 と S_2 の両方に外接している球 S について，半径を r，平面 α との接点を P とする。



ここで，α 上に座標系を設定して，P_1 を原点とし，P_2 を x 軸の正の部分にとると，(1)から $P_2(2\sqrt{r_1r_2},\ 0)$ となる。そして，$P(x,\ y)$ とおく。

すると，(1)の結論から，$P_1P=2\sqrt{r_1r}$，$P_2P=2\sqrt{r_2r}$ となることから，

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{r_1r}\ \cdots\cdots①,\quad \sqrt{(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2}=2\sqrt{r_2r}\ \cdots\cdots②$$

すると，$x^2+y^2=4r_1r$，$(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2=4r_2r$ となり，r を消去すると，

$$r_2(x^2+y^2)=r_1(x^2-4\sqrt{r_1r_2}x+4r_1r_2+y^2)$$

$$(r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}x-4r_1^2r_2=0\ \cdots\cdots③$$

(i) $r_1=r_2$ のとき

③から，$4r_1^2x-4r_1^3=0$ となり，$x=r_1$

よって，点 P は線分 P_1P_2 の垂直二等分線上にある。

(ii) $r_1\neq r_2$ のとき

③から，$x^2+y^2+\dfrac{4r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}x-\dfrac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1}=0$ となり，

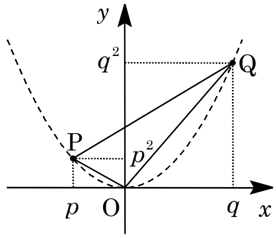
$$\left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^3r_2}{(r_2-r_1)^2}+\frac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1},\quad \left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^2r_2^2}{(r_2-r_1)^2}$$

よって，点 P は中心 $\left(-\dfrac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{2r_1r_2}{|r_2-r_1|}$ の円上にある。

［解 説］

外接する球面に関する問題で，ときどき見かけるものです。(2)については，2 つの定点 P_1，P_2 からの距離の条件から，点 P の軌跡は垂直二等分線またはアポロニウスの円というのがわかります。ただ，解答例ではそのプロセスも簡単に記しています。

30 [2017 千葉大・理]



(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)\ (p<q)$ に対して，$\mathrm{PQ}=2$ より，

$$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=4,\ (q-p)^2\{1+(q+p)^2\}=4$$

ここで，$p+q=\sqrt{t}\ (t\geqq 0)$……①より，

$$(q-p)^2(1+t)=4,\ q-p=\frac{2}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{t}+\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}\right)=\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ ………③

$$p=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right)=\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(2) $\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とすると，③④より，

$$S=\frac{1}{2}\left|pq^2-p^2q\right|=\frac{1}{2}\left|pq(q-p)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{1+t}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\left|\frac{t^2+t-4}{4(1+t)}\right|=\frac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

(3) 条件より $S=1$ なので，$\dfrac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}=1$ となり，

$$\left|t^2+t-4\right|=4(1+t)\sqrt{1+t},\ (t^2+t-4)^2=16(1+t)^3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を展開してまとめると，$t^4-14t^3-55t^2-56t=0$ となり，

$$t=0\ \cdots\cdots\cdots⑥,\ t^3-14t^2-55t-56=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，$f(t)=t^3-14t^2-55t-56$ とおくと，

$$f'(t)=3t^2-28t-55=(t-11)(3t+5)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t>0$ において⑦の解はただ１つ存在する。

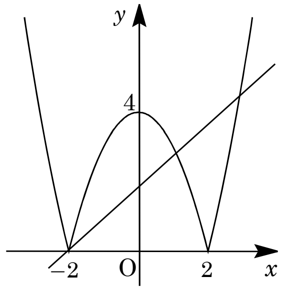
t	0	$\cdots$	11	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-56	↘		↗

以上より，⑤の解すなわち $S=1$ となる t の個数は，⑥を合わせて 2 である。

［解 説］

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では，同値変形とはいうものの，両辺を２乗して４次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが，$t=0$ が解の１つであることがわかり……。

31 ［2017 東北大・理］



(1)　$C: y=|x^2-4|$ に対して,

$y=x^2-4 \quad (x \leqq -2,\ 2 \leqq x)$ ………①

$y=-x^2+4 \quad (-2<x<2)$ ………②

また, $l: y=ax+b$ ……③が点 $(-2,\ 0)$ を通ることより,

$-2a+b=0$, $b=2a$

ここで, ②より $y'=-2x$ となり, $x=-2$ のとき $y'=4$ から, l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は, $0<a<4$ である。

よって, 求める a, b の条件は, $b=2a\ (0<a<4)$ である。

(2)　l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は, l と x 軸の交点に注目して,

(i)　l が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき　(1)より, $b=2a\ (0<a<4)$

(ii)　l が点 $(2,\ 0)$ を通るとき　(1)と同様に, $2a+b=0$ より $b=-2a$

そして, ②より $x=2$ のとき $y'=-4$ から, l の傾き a の範囲が $-4<a<0$ となり, まとめると, $b=-2a\ (-4<a<0)$ である。

(iii)　l が点 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2<x<2$ のときは, l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x<-2$, $2<x$ のとき, および x 軸と交点をもたないときは, l と C が $-2<x<2$ で接するときである。

②③を連立して, $-x^2+4=ax+b$ より, $x^2+ax+b-4=0$ ………④

④が $-2<x<2$ に重解をもつことより,

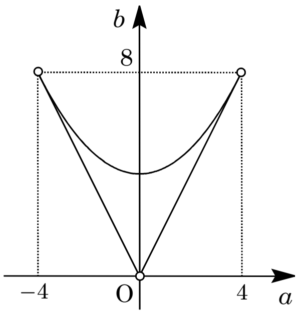
$D=a^2-4(b-4)=0$, $-2<-\dfrac{a}{2}<2$

よって, $b=\dfrac{a^2}{4}+4\ (-4<a<4)$ となる。

このとき, ①と③は 2 交点をもつ。

(i)～(iii)より, 点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の実線部になる。

ただし, 原点と 2 点 $(\pm 4,\ 8)$ は含まない。



［解 説］

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き, それをもとに計算をしています。

$\boxed{32}$ [2017 一橋大]

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=1$に対し，$|ax+by|\leqq 1$ ……①より，

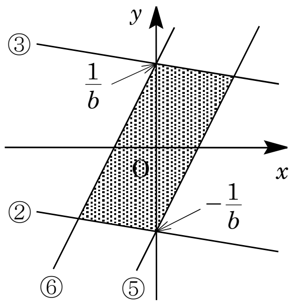
$$-1\leqq ax+by\leqq 1,\ -\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq -\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……②，$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……③

また，$|cx-by|\leqq 1$ ……④より，

$$-1\leqq cx-by\leqq 1,\ \frac{c}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq \frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……⑤，$y=\dfrac{c}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……⑥



①かつ④の表す領域 D は，直線②と③，および直線⑤と⑥が，平行で，しかも原点対称であることより，右上図の平行四辺形の内部または辺上となる。

そして，直線③と⑤を連立すると，$-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ より，

$$(a+c)x=2,\ x=\frac{2}{a+c}$$

よって，領域 D の面積を S とおくと，対称性より，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{2}{a+c}\right)=\frac{4}{b(a+c)}=\frac{4}{b(1-b)}=\frac{4}{-b^2+b}$$

ここで，$f(b)=-b^2+b$ とおくと，$f(b)=-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より，$0<b<1$ において，

$$0<f(b)\leqq\frac{1}{4}\quad\left(\text{等号は}\,b=\frac{1}{2}\,\text{のとき成立}\right)$$

したがって，S は $b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 16 をとる。

［解 説］

領域についての問題です。ただ，平行四辺形の 1 つの対角線が y 軸上にあったり，また面積が 1 文字で表せたり，かなり解きやすい設定になっています。

33 [2018 広島大・理]

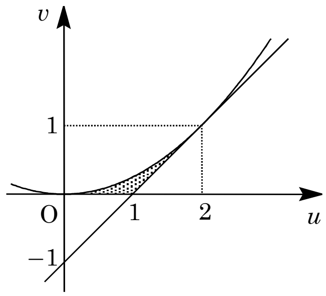
(1) まず，$f(t)=t^2-ut+v=\left(x-\dfrac{u}{2}\right)^2-\dfrac{u^2}{4}+v$ とおく。

条件(A)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ なので，

$-\dfrac{u^2}{4}+v\leqq 0$ ………①，$0\leqq\dfrac{u}{2}\leqq 1$ ………②

$f(0)=v\geqq 0$ ………③

$f(1)=1-u+v\geqq 0$ ………④



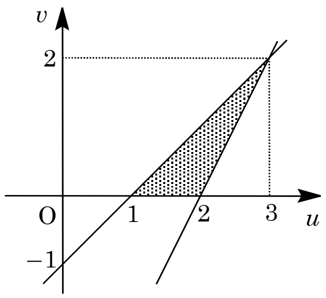
①③から $0\leqq v\leqq\dfrac{u^2}{4}$，②から $0\leqq u\leqq 2$，④から $v\geqq u-1$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2) 条件(B)より，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ なので，

$f(0)=v\geqq 0$ ………⑤

$f(1)=1-u+v\leqq 0$ ………⑥

$f(2)=4-2u+v\geqq 0$ ………⑦

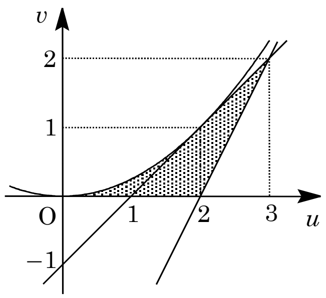


⑤⑥から $0\leqq v\leqq u-1$，⑦から $v\geqq 2u-4$ となるので，点 $(u,\ v)$ の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(3) 点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，$x,\ y$ の条件は $0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 2$ と表せ，これは(1), (2)で与えられた「条件(A)または条件(B)」と一致する。

ここで，$f(t)=0$ の 2 解 $t=x,\ y$ について，解と係数の関係から，

$x+y=u$，$xy=v$



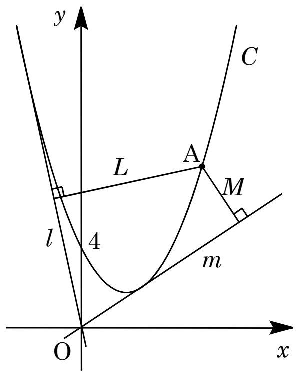
これより，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲は点 $(u,\ v)$ の動く範囲に対応し，(1), (2)の結果を合わせると右図の網点部となる。そして，その面積 S は，

$$S=\int_0^2\frac{1}{4}u^2du+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{1}{12}\left[u^3\right]_0^2+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$$

［解 説］

領域と 2 次方程式の解の配置を題材とした問題です。(1)と(2)の結果が(3)にストレートにつながっています。

34 ［2018 東京大・文］



(1) $C: y=x^2-3x+4$ ……①に対し，原点を通る接線を $y=ax$ ……②とおく。

①と②を連立して，$x^2-(a+3)x+4=0$ となり，

$$D=(a+3)^2-4^2=0\,,\ a+3=\pm 4$$

よって，$a=-7,\ 1$ から，$l: y=-7x$ ，$m: y=x$ とおく。

ここで，C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^2-3t+4)$ に対し，A と $l,\ m$ の距離をそれぞれ L, M とすると，

$$L=\frac{|7t+t^2-3t+4|}{\sqrt{49+1}}=\frac{|t^2+4t+4|}{5\sqrt{2}}=\frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}}$$

$$M=\frac{|t-t^2+3t-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-t^2+4t-4|}{\sqrt{2}}=\frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}$$

すると，$\sqrt{L}=\dfrac{|t+2|}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}$，$\sqrt{M}=\dfrac{|t-2|}{\sqrt[4]{2}}$ となり，

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}(|t+2|+\sqrt{5}|t-2|)$$

ここで，$f(t)=|t+2|+\sqrt{5}|t-2|$ とおくと，

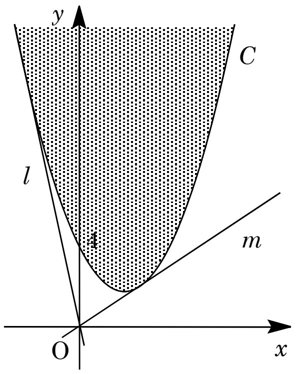
(i) $t\geqq 2$ のとき　$f(t)=t+2+\sqrt{5}(t-2)=(1+\sqrt{5})t+2-2\sqrt{5}$

(ii) $-2\leqq t<2$ のとき　$f(t)=t+2-\sqrt{5}(t-2)=(1-\sqrt{5})t+2+2\sqrt{5}$

(iii) $t<-2$ のとき　$f(t)=-(t+2)-\sqrt{5}(t-2)=(-1-\sqrt{5})t-2+2\sqrt{5}$

$f(t)$ は $t=-2,\ 2$ で連続なので，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となる。すなわち，$t=2$ のとき $\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は最小となり，このとき $\mathrm{A}(2,\ 2)$ である。

(2) 領域 $D: y\geqq x^2-3x+4$ は右図の網点部のようになる。



そこで，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy\leqq 0$ ……③が成り立つ条件は，

(a) $q=0$ のとき　③は $px\leqq 0$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$p=0$ である。

(b) $q>0$ のとき　③は $y\leqq -\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する場合はない。

(c) $q<0$ のとき　③は $y\geqq -\dfrac{p}{q}x$ となる。

すると，領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し成立する条件は，$l,\ m$ の傾きから，

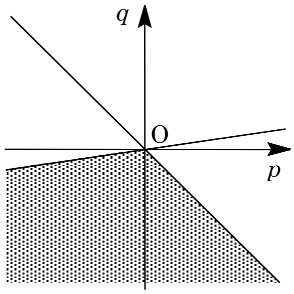
$$-7 \leqq -\frac{p}{q} \leqq 1,\ 7q \leqq p \leqq -q$$

すなわち，$q \leqq \dfrac{1}{7}p$ かつ $q \leqq -p$ である。

以上より，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲は，

$$q \leqq \frac{1}{7}p \text{ かつ } q \leqq -p$$

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

図形と式に関する標準的な問題です。(1)の結論が(2)への誘導かとも思ったのですが，実際は(1)の途中結果が(2)への誘導でした。なお，(2)は，詳しく記述していませんが，集合の包含関係を用いて考えています。

$\boxed{35}$ [2018 東北大・理]

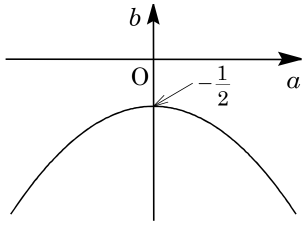
(1) $C: y=(x-a)^2+b$ ……①, $D: y=-x^2$ ……②を連立すると,

$$(x-a)^2+b=-x^2,\ 2x^2-2ax+a^2+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

条件より, $D/4=a^2-2(a^2+b)=-a^2-2b>0$ のもとで, ③の異なる 2 実数解 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{-a^2-2b}}{2}$ の差が 1 から,

$$\frac{\sqrt{-a^2-2b}}{2}\cdot 2=1,\ -a^2-2b=1$$

よって, $b=-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ ……④となり, C の頂点$(a,\ b)$ の軌跡は右図の放物線となる。



(2) (1)のとき, C と D の 2 交点をを結ぶ直線は, ①＋②より,

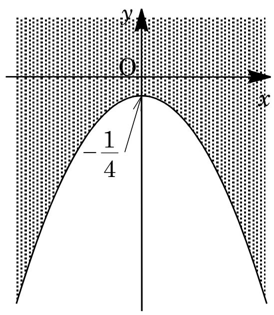
$$2y=(x-a)^2+b-x^2,\ 2y=-2ax+a^2+b$$

④を代入すると, $2y=-2ax+a^2-\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}$ から, $4y=-4ax+a^2-1$ ………⑤

ここで, 直線⑤が点$(x,\ y)$を通過する条件は, ⑤を a についての 2 次方程式 $a^2-4xa-4y-1=0$ ……⑥とみたとき, ⑥を満たす実数 a が存在する条件に対応するので,

$$D/4=4x^2-(-4y-1)=4x^2+4y+1\geqq 0$$

まとめると, $y\geqq -x^2-\dfrac{1}{4}$ となり, 図示すると右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



［解 説］

放物線と直線に関する基本的な問題です。なお, (2)の 2 交点をを結ぶ直線の求め方は, 交わる 2 つの円の共通弦の方程式を求める方法と同じです。また, 通過領域は実数解条件で処理しています。

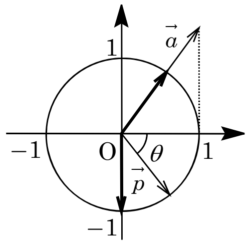
36 ［2018 信州大・医］

直線$l: y=(\sin\theta)x+\cos\theta$に対し，$\vec{a}=(1,\ x)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$とおくと，

$$l: y=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi=\sqrt{x^2+1}\cos\varphi\quad(\varphi \text{は} \vec{a} \text{と} \vec{p} \text{のなす角})\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，θが$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$を動くとき，$(*)$の$y$のとりうる値の範囲を考えると，

(i) $x\geqq 0$のとき

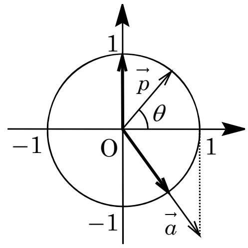


右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$の値は，$\vec{p}$が$\vec{a}$と同じ向き$(\varphi=0)$のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ -1)$のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot(-1)\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$-x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(ii) $x<0$のとき



右図より，$\vec{a}\cdot\vec{p}$の値は，$\vec{p}$が$\vec{a}$と同じ向き$(\varphi=0)$のとき最大になり，$\vec{p}=(0,\ 1)$のとき最小になるので，

$$1\cdot 0+x\cdot 1\leqq\vec{a}\cdot\vec{p}\leqq\sqrt{x^2+1}\cos 0$$

$$x\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$$

(i)(ii)より，まとめると，$-|x|\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$である。

［解 説］

直線の通過領域の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここでは$\cos\theta$と$\sin\theta$のセット，およびその係数に文字の入っていることに着目して内積を利用しました。なお，本問は結論が与えられていますので，不等式の証明という形での記述も可能です。

$\boxed{37}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2018　東京大・文］

(1)　$C: y = x^2\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)\ (-1 \leqq p \leqq 1)$ に対して,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2p,\ 2p^2)$$

ここで, $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと, $x = 2p$, $y = 2p^2$ から,

$$y = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2,\ \ y = \frac{1}{2}x^2\ (-2 \leqq x \leqq 2)$$

したがって, 点 Q の軌跡は, 放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ の $-2 \leqq x \leqq 2$ の部分である。

(2)　線分 OA 上の点 $\mathrm{R}(r,\ 0)\ (0 \leqq r \leqq 1)$ に対して,

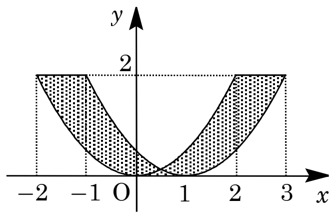
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

ここで, 点 R を固定すると, (1)から, 点 S は点 R を頂点とする放物線の一部を動き, その方程式は,

$$y = \frac{1}{2}(x-r)^2\quad (r-2 \leqq x \leqq r+2)\cdots\cdots\cdots(*)$$

そして, 点 R を $0 \leqq r \leqq 1$ で動かすと, $(*)$で表される放物線の一部は, x 軸方向に平行移動する。

これより点 S が動く領域は, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



この領域の面積を S とおくと, 直線 $x = \dfrac{1}{2}$ についての対称性から,

$$S = 2\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}x^2dx + 1\cdot 2 - \int_{1}^{3}\frac{1}{2}(x-1)^2dx\right\}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{2}x^2dx + 4 - \int_{1}^{3}(x-1)^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} + 4 - \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{63}{8} + 4 - \frac{1}{3}\cdot 8 = \frac{95}{24}$$

［解　説］

軌跡を求める問題です。(2)は, 東大で頻出の 1 文字固定をして考えるタイプです。