２０１９ 入試対策
２次数学アーカイブ

図形と計量

文系＋理系

２００１－２０１８

外林康治 編著

電送数学舎

図形と計量

【問題一覧】

1 四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。
［2006 東京大・文］

2 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に，それぞれ点 P, Q, R, S を，$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{QPC}$，$\angle \mathrm{PQC} = \angle \mathrm{RQD}$，$\angle \mathrm{QRD} = \angle \mathrm{SRA}$ となるようにとる。ただし，点 P, Q, R, S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。$f(t)$ の最大値を求めよ。 ［2006 大阪大・理］

3 地球上の北緯 $60°$ 東経 $135°$ の地点を A，北緯 $60°$ 東経 $75°$ の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1，R_2 を考える。R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。
［2008 京都大・理］

4 平面上で，鋭角三角形 $\triangle \mathrm{OAB}$ を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を $\triangle \mathrm{OBC}$，$\triangle \mathrm{OBC}$ を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を $\triangle \mathrm{OCD}$，$\triangle \mathrm{OCD}$ を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を $\triangle \mathrm{ODE}$ とする。$\triangle \mathrm{OAB}$ と $\triangle \mathrm{OBE}$ の面積比が $2:3$ のとき，$\sin \angle \mathrm{AOB}$ の値を求めよ。 ［2009 京都大・文］

5 xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1, 2) で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している。$\angle\mathrm{AOD}=\theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2) S を a と θ を用いた式で表せ。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，$20\leqq S\leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ。

［2011 神戸大・文］

6 平面上の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，△ABC の面積の最大値を求めよ。［2013 一橋大］

7 鋭角三角形 △ABC について，∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD, OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。［2014 九州大・文］

8 半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が，辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とし，三角形 ABC の面積を S とする。

(1) 線分 AQ の長さを α を用いて表し，線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2) $t=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。このとき，S を t を用いて表せ。

(3) 不等式 $S\geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するのは，三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。［2015 筑波大・理］

9 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b) 半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。［2015 京都大］

10 $t>0$を実数とする。座標平面において，3 点$\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。 ［2015 東北大］

11 t を$0<t<1$を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ$2:1$，$t:1-t$，$1:3$に内分する点を D, E, F とする。また, AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値t_0を求めよ。

以下，t は$0<t<t_0$を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。 ［2016 九州大］

12 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 ［2016 京都大・理］

13 座標平面上に 3 点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(9,\ 0)$がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を$\angle\mathrm{PAQ}=90^\circ$となるようにとる。ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。$\angle\mathrm{APQ}=\theta$とし，$\triangle\mathrm{APQ}$の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3) S が$\triangle\mathrm{AOB}$の面積の$\dfrac{2}{3}$倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

［2017 千葉大・文］

14 △ABC は鋭角三角形であり，$\angle \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また△ABC の外接円の半径は 1 であるとする。

(1) △ABC の内心を P とするとき，∠BPC を求めよ。

(2) △ABC の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。 [2017 京都大・理]

15 $0 < t < 3$ を満たす実数 t に対し，平面上の相異なる 4 点 O，A，B，C を次の条件(a), (b)を満たすようにとる。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta = \dfrac{1}{t+1}$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t-3$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$

線分 OA を $t:1$ に内分する点を D とし，△OCD の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ の最大値を求めよ。 [2018 信州大・医]

16 α は $0 < \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，四角形 ABCD に関する次の 2 つの条件を考える。

(i) 四角形 ABCD は半径 1 の円に内接する。

(ii) $\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{DAB} = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで，4 辺の長さの積 $k = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ が最大となるものについて，k の値を求めよ。 [2018 京都大・理]

17 三角形 ABC の内接円の半径を r，外接円の半径を R とし，$h = \dfrac{r}{R}$ とする。また，$\angle \mathrm{A} = 2\alpha$，$\angle \mathrm{B} = 2\beta$，$\angle \mathrm{C} = 2\gamma$ とおく。

(1) $h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

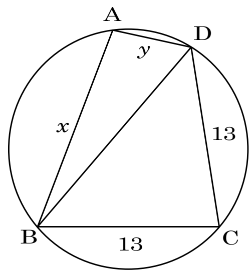
(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leqq \sqrt{2}-1$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leqq \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのはどのような場合か。 [2018 東北大・理]

図形と計量

【解答例一覧】

1　　　　[2006 東京大・文]



△BCD において，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin C}=2\times\frac{65}{8},\ \ \mathrm{BD}=\frac{65}{4}\sin C\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，余弦定理より，

$$\mathrm{BD}^2=13^2+13^2-2\cdot 13^2\cos C$$
$$=2\cdot 13^2(1-\cos C)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{65^2}{4^2}\sin^2 C=2\cdot 13^2(1-\cos C)$

$$5^2\cdot 13^2(1+\cos C)(1-\cos C)=2\cdot 13^2\cdot 4^2(1-\cos C)$$

$1-\cos C>0$ より，$25(1+\cos C)=32$，$\cos C=\dfrac{7}{25}\ \cdots\cdots\cdots③$

②より，$\mathrm{BD}^2=2\times 13^2\times\dfrac{18}{25}$，$\mathrm{BD}=\dfrac{6\times 13}{5}=\dfrac{78}{5}$

ここで，$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{DA}=y$ とおくと，条件より，

$$x+y=44-13\times 2,\ \ x+y=18\ \cdots\cdots\cdots④$$

△ABD に余弦定理を適用して，$\dfrac{78^2}{25}=x^2+y^2-2xy\cos(180°-C)$

$$\frac{6^2\times 13^2}{25}=(x+y)^2-2xy+2xy\cos C$$

③より，$\dfrac{6^2\times 13^2}{25}=(x+y)^2-\dfrac{36}{25}xy$，$6^2\times 13^2=25(x+y)^2-36xy\ \cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$36xy=-6^2\times 13^2+5^2\times 18^2$，$36xy=(78+90)(-78+90)$

$$xy=\frac{168\times 12}{36}=56\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑥より, x, y は方程式 $t^2-18t+56=0$ の 2 つの解となるので,

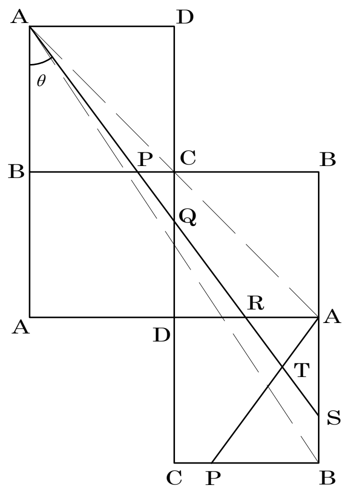
$$(t-4)(t-14)=0,\ \ t=4,\ 14$$

よって，$(\mathrm{AB},\ \mathrm{DA})=(4,\ 14)$，$(14,\ 4)$

［解　説］

センター試験でよく見かける構図の問題ですが，いろいろな考え方が浮かび，方針の決めにくい良問です。また，計算にも工夫が必要です。

２　　［2006 大阪大・理］



(1)　右図のように，正方形ABCDを辺BC，CD，DAに関して，順に折り返していく。すると，条件より，折れ線APQRSは1本の直線になる。

さて，点Sが辺AB上にあるとき，点P, Q, Rは，それぞれ辺BC, CD, DA上に存在する。

ここで，点Sが点Aと一致するとき$BP=1$，点Sが点Bと一致するとき$BP=\dfrac{2}{3}$となり，求める条件は，$BP=t$から$\dfrac{2}{3}<t<1$である。

(2)　まず，$\angle BAP=\theta$とおくと，$\tan\theta=t$となる。

そこで，$\angle CQP=\angle DQR=\angle ASR=\theta$から，

$$CP=1-t,\ CQ=\frac{1-t}{\tan\theta}=\frac{1-t}{t}$$

$$DQ=1-\frac{1-t}{t}=\frac{2t-1}{t},\ DR=\frac{2t-1}{t}\tan\theta=2t-1,\ AR=1-(2t-1)=2-2t$$

これより，$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot t=\dfrac{t}{2}$，$\triangle PCQ=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{1-t}{t}=\dfrac{(1-t)^2}{2t}$

$$\triangle QDR=\frac{1}{2}(2t-1)\cdot\frac{2t-1}{t}=\frac{(2t-1)^2}{2t}$$

また，RSとAPの交点をTとするとき，$\angle TAS=\angle TSA=\theta$から，$\triangle TAS$は二等辺三角形となり，TからARへの垂線の長さは，ASの$\dfrac{1}{2}$であるので，

$$AS=\frac{2-2t}{\tan\theta}=\frac{2-2t}{t},\ \triangle RAT=\frac{1}{2}(2-2t)\cdot\frac{2-2t}{2t}=\frac{(1-t)^2}{t}$$

したがって，四角形PQRTの面積$f(t)$は，

$$f(t)=1-\frac{t}{2}-\frac{(1-t)^2}{2t}-\frac{(2t-1)^2}{2t}-\frac{(1-t)^2}{t}=1-\frac{t^2+3(1-t)^2+(2t-1)^2}{2t}$$

$$=1-\frac{4t^2-5t+2}{t}=\frac{-4t^2+6t-2}{t}=6-\left(4t+\frac{2}{t}\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$4t+\dfrac{2}{t}\geqq2\sqrt{4t\cdot\dfrac{2}{t}}=4\sqrt2$

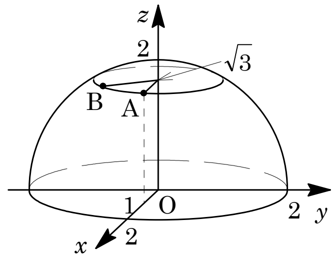
等号成立は$4t=\dfrac{2}{t}$のときであり，$\dfrac{2}{3}<t<1$から$t=\dfrac{\sqrt2}{2}$の場合となる。

以上より，$f(t)$の最大値は$6-4\sqrt2$である。

［解　説］

有名な反射の問題です。上の解のように折り返しを利用するのが常套手段です。なお，平行四辺形PQRTの面積は，まわりの三角形を除く方針で計算しています。

3 [2008 京都大・理]



まず，地球の半径を 2，赤道面を xy 平面，北極を点 $(0,\ 0,\ 2)$ とし，東経$135°$を xz 平面上とする座標系を設定する。

すると，地点 A は北緯$60°$東経$135°$より，その座標は $\mathrm{A}(1,\ 0,\ \sqrt{3})$ となる。また，地点 B は北緯$60°$東経$75°$より，$\mathrm{B}(x,\ y,\ \sqrt{3})$ とおくと，

$$x = 2\cos 60°\cos(-60°) = \frac{1}{2}$$

$$y = 2\cos 60°\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，経路 R_1 は，平面 $z=\sqrt{3}$ 上での弧 AB より，その長さを l_1 とおくと，

$$l_1 = 2\pi\cdot 1\times\frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = \frac{30}{90}\pi$$

また，経路 R_2 は，半径 2 の大円上での弧 AB であり，$\angle\mathrm{AOB}=\theta°$ とおくと，

$$l_2 = 2\pi\cdot 2\times\frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{90}\theta$$

ここで，$\cos\theta° = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{2\cdot 2} = \dfrac{7}{8} = 0.875$ から，三角関数表を用いると，

$$28° < \theta° < 29°$$

よって，$\dfrac{28}{90}\pi < l_2 < \dfrac{29}{90}\pi$ となり，$\dfrac{l_2}{l_1} < \dfrac{29}{30} < 0.97$ である。

すなわち，R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3％以上短くなる。

［解 説］

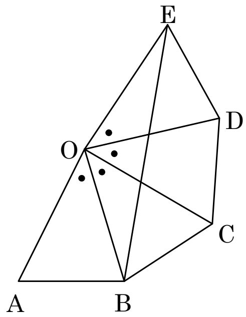
大圏航路を題材にした問題です。これは，メルカトル図法で書かれた世界地図で，最短の飛行経路が直線としては表されないことと関連しています。なお，与えられていた三角関数表は省略しました。

4 [2009 京都大・文]

$\angle AOB=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta$

また，題意より，$OA=OC=OE$，$OB=OD$

(i) $0<3\theta\leqq\pi\left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$のとき



$$\triangle OBE=\frac{1}{2}OB\cdot OE\sin 3\theta=\frac{1}{2}OB\cdot OA\sin 3\theta$$

ここで，$\triangle OAB:\triangle OBE=2:3$より，

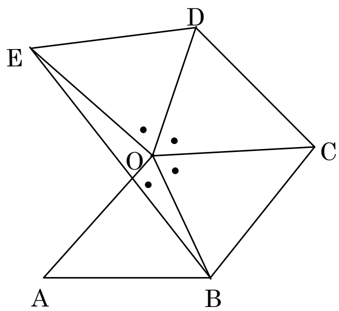
$\sin\theta:\sin 3\theta=2:3$，$2\sin 3\theta-3\sin\theta=0$

$2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-3\sin\theta=0$

$8\sin^3\theta-3\sin\theta=0$

$0<\sin\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(ii) $\pi<3\theta\left(\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき



$$\triangle OBE=\frac{1}{2}OB\cdot OE\sin(2\pi-3\theta)$$
$$=-\frac{1}{2}OB\cdot OA\sin 3\theta$$

ここで，$\triangle OAB:\triangle OBE=2:3$より，

$\sin\theta:(-\sin 3\theta)=2:3$

$2\sin 3\theta+3\sin\theta=0$，$8\sin^3\theta-9\sin\theta=0$

すると，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$より，適する$\sin\theta$の値は存在しない。

(i)(ii)より，$\sin\angle AOB=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

［解 説］

図を描いて場合分けをしましたが，絶対値を用いると，場合分けが回避できます。

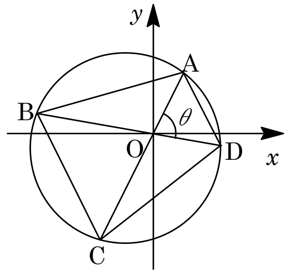
$\boxed{5}$ ［2011 神戸大・文］

(1) 3 点 A, O, C は同一直線上にあり，点 A(1, 2) で，点 C の x 座標が a から，C$(a,\ 2a)$ とおくことができる。ただし，$a<0$ である。これより，

$$\mathrm{OC}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}|a|=-\sqrt{5}a$$

また，方べきの定理から，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}$

すると，条件より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ なので，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$



(2) (1)より，$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=\sqrt{5}-\sqrt{5}a=\sqrt{5}(1-a)$ より，四角形 ABCD の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\{\sqrt{5}(1-a)\}^2\sin\theta=\frac{5}{2}(1-a)^2\sin\theta$$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$S=\dfrac{5}{2}(1-a)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}(1-a)^2$

条件より, $20\leqq S\leqq 40$ なので，$20\leqq\dfrac{5}{4}(1-a)^2\leqq 40$ となり,

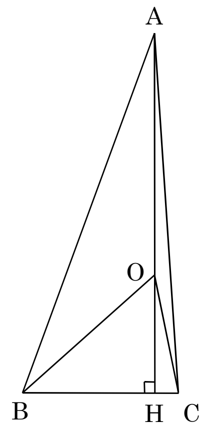
$$16\leqq(1-a)^2\leqq 32,\ 4\leqq 1-a\leqq 4\sqrt{2},\ 1-4\sqrt{2}\leqq a\leqq -3$$

したがって, a のとりうる値の最大値は-3である。

［解 説］

対角線の長さとその交角をもとに, 四角形の面積を導く有名な問題です。注意しなくてはいけないのは, a が負ということです。

$\boxed{6}$ ［2013 一橋大］



$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ より，$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ である。

すると，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin60^\circ=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となり，

$$\mathrm{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos60^\circ=7,\ \mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

ここで，点 O から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とすると，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\mathrm{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \mathrm{OH}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

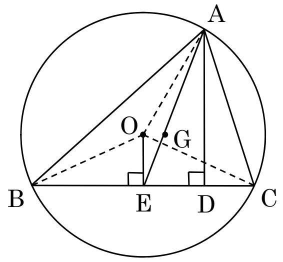
以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるのは，点 A が HO の延長線上にあるときで，$\mathrm{OA}=4$ から，その値は，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+4\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{7}$$

［解 説］

$\triangle\mathrm{OBC}$ は決定されるので，点 A が辺 BC からいちばん離れたところに位置する場合を求めればよいことになります。なお，OH の長さは勢いで求めてしまいましたが，必要ありませんでした。

$\boxed{7}$ ［2014 九州大・文］



(1) $\triangle$ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2R\sin C,\ \mathrm{BC}=2R\sin A,\ \mathrm{CA}=2R\sin B$$

ここで，$\triangle$ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C\cdots\cdots\cdots①$$

A から辺 BC に下ろした垂線が AD より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AD}\cdot R\sin A\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\mathrm{AD}\cdot R\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$

また，O から辺 BC に下ろした垂線が OE で，$\angle\mathrm{BOE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\frac{1}{2}\cdot 2\angle\mathrm{A}=A$

よって，$\mathrm{OE}=R\cos\angle\mathrm{BOE}=R\cos A$

(2) 直線 AG と辺 BC は BC の中点，すなわち点 E で交わり，G と O が一致するならば，$\mathrm{GE}\perp\mathrm{BC}$ すなわち $\mathrm{AE}\perp\mathrm{BC}$ となる。これより $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

同様に考えると，$\mathrm{BG}\perp\mathrm{AC}$ となり，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となり，$\triangle$ABC は正三角形である。

(3) OG が BC と平行であるとき，$\triangle\mathrm{OGE}\backsim\triangle\mathrm{DEA}$ となり，$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=\mathrm{GE}:\mathrm{EA}$

ここで，点 G は$\triangle$ABC の重心より，$\mathrm{GE}:\mathrm{EA}=1:3$ となり，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=1:3,\ \mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$$

(1)の結果から，$2R\sin B\sin C=3R\cos A$，$2\sin B\sin C=-3\cos(B+C)$ となり，

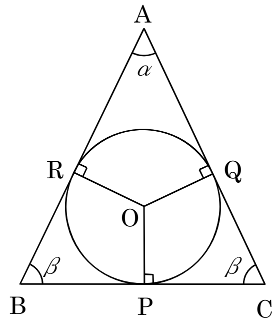
$$2\sin B\sin C=-3(\cos B\cos C-\sin B\sin C),\ 3\cos B\cos C=\sin B\sin C$$

よって，$\tan B\tan C=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=3$ となる。

［解 説］

図形の計量についての標準的な問題です。誘導に従えば，一見，難しそうな(3)の関係式が証明できます。

8 ［2015 筑波大・理］



(1) 二等辺三角形 ABC の半径 1 の内接円の中心を O とおくと，△AOQ において，

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\mathrm{AQ}},\ \ \mathrm{AQ}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

△COQ において同様に，$\mathrm{QC}=\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}$

(2) まず，$\mathrm{BC}=2\mathrm{PC}=2\mathrm{QC}=\dfrac{2}{\tan\frac{\beta}{2}}=\dfrac{2}{t}$

また，A, O, P は同一直線上にあるので，

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PC}\tan\beta=\mathrm{QC}\tan\beta=\frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2}{1-t^2}$$

よって，△ABC の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{2}{1-t^2}=\dfrac{2}{t(1-t^2)}$

(3) $\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi-\alpha}{4}$ より $0<\dfrac{\beta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ となり，$0<\tan\dfrac{\beta}{2}<1$ すなわち $0<t<1$ である。

さて，$f(t)=t(1-t^2)$ とおくと，$S=\dfrac{2}{f(t)}$ となり，

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$0<t<1$ において $0<f(t)\leqq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ であり，

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

$$S\geqq2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

等号が成り立つのは，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\left(\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のときなので，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$ である。このとき $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ となり，△ABC は正三角形である。

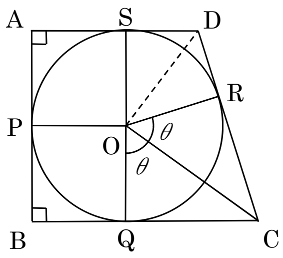
［解 説］

三角比と図形についての基本問題です。加えて，最小値を求めるときに微分法を利用するように構成されています。

9 ［2015 京都大］

四角形 ABCD について，その内接円の中心を O，また内接円との接点を P，Q，R，S とおく。条件(a)より，$90°$ の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i) $90°$ の内角が隣り合う（$\angle A=\angle B=90°$）のとき

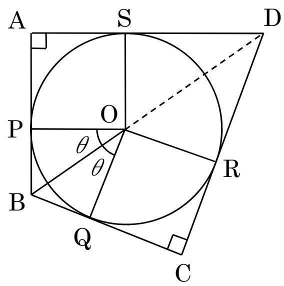


右図のように $\angle COQ=\angle COR=\theta$ $(0°<\theta<90°)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\geqq 2+2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}}=4$$

等号成立は $\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ $(\theta=45°)$ のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii) $90°$ の内角が向かい合う（$\angle A=\angle C=90°$）のとき



右図のように $\angle BOP=\angle BOQ=\theta$ $(0°<\theta<90°)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$

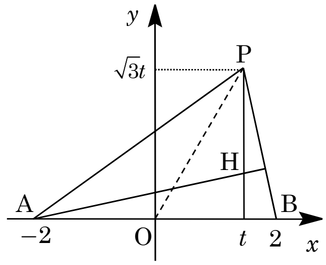
(i)と同様に，四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

［解 説］

いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

10 ［2015 東北大］



(1) $t>0$ のとき $\angle\mathrm{PAB}<\dfrac{\pi}{2}$ であるので，△APB が鋭角三角形となる条件は $\angle\mathrm{PBA}<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle\mathrm{APB}<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，$t<2$ かつ $\mathrm{OP}>2$ $(2t>2)$ となる。

よって，求める t の範囲は，$1<t<2$ である。

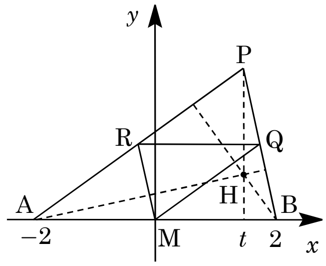
(2) P から辺 AB に引いた垂線の式は，$x=t$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ より，A から辺 BP に引いた垂線の式は，

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$(t-2)(t+2)+\sqrt{3}ty=0$ より，$y=\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$

よって，△APB の垂心 H の座標は，$\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。



(3) M, Q, R は，それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので，

$$\mathrm{RQ}/\!/\mathrm{AB},\ \mathrm{QM}/\!/\mathrm{PA},\ \mathrm{RM}/\!/\mathrm{PB}$$

ここで，H は△APB の垂心より，

$$\mathrm{PH}\perp\mathrm{RQ},\ \mathrm{BH}\perp\mathrm{QM},\ \mathrm{AH}\perp\mathrm{RM}\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，xy 平面に垂直に z 軸をとり，△ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において，P, A, B が重なってできる頂点を C とする。

すると，③より，s を正の実数として，$\mathrm{C}\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ s\right)$ と表せる。

そこで，$\mathrm{CM}=2$ から，$t^2+\left(\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+s^2=4$ となり，

$$s^2=4-t^2-\frac{(4-t^2)^2}{3t^2}=\frac{-4t^4+20t^2-16}{3t^2}$$

よって，$s=\dfrac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}$ となり，四面体 CMQR の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABP}\right)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

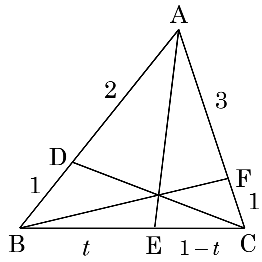
$1<t<2$ から，$t^2=\dfrac{5}{2}\left(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ のとき，V は最大値 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

［解 説］

一見，無関係と思える(2)と(3)ですが，(2)は(3)に不可欠な誘導です。なお，直角三角形が題材になっている類題が，北大で 2009 年に出ています。

$\boxed{11}$ ［2016 九州大］

(1) $\triangle$ABC において，AD : DB＝2 : 1，BE : EC＝t : $1-t$，CF : FA＝1 : 3 であり，$t=t_0$ のとき，AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から，

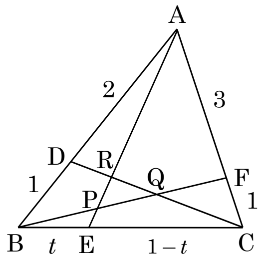


$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\ \ \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0=3(1-t_0)$ から，$t_0=\dfrac{3}{5}$ となる。

(2) 条件より，AP＝kAE，CR＝lCD なので，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=k:1-k,\ \ \mathrm{CR}:\mathrm{RD}=l:1-l$$



さて，$\triangle$AEC と直線 BF にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\ \ \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt=3(1-k)$ より，$k=\dfrac{3}{3+t}$ となる。

また，$\triangle$CDB と直線 AE にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1,\ \ \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt=3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l=3-3t$，$l=\dfrac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3) BQ : QF＝m : $1-m$ とし，$\triangle$BFA と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1,\ \ \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m=4(1-m)$ より，$m=\dfrac{2}{3}$ となる。

よって，$\triangle$ABC の面積が 1 から，$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}$

(4) (2)から，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=\dfrac{3}{3+t}:\left(1-\dfrac{3}{3+t}\right)=3:t$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{3+t}\triangle\mathrm{ABE}=\frac{3}{3+t}\cdot t\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3t}{3+t}$$

また，$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=\dfrac{3-3t}{3-t}:\left(1-\dfrac{3-3t}{3-t}\right)=3-3t:2t$ から，

$$\triangle\mathrm{CAR}=\frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle\mathrm{CAD}=\frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2-2t}{3-t}$$

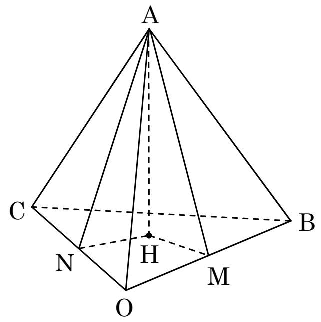
すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{BCQ}-\triangle\mathrm{CAR}-\triangle\mathrm{ABP}$ より，

$$\triangle\mathrm{PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

［解 説］

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

12 ［2016 京都大・理］



四面体 OABC において，頂点 A から面 OBC に下ろした垂線の足を H，また辺 OB，OC の中点をそれぞれ M，N とおく。

条件より，点 H は△OBC の外心なので，

$$\mathrm{HM}\perp\mathrm{OB} \quad \text{かつ} \quad \mathrm{HN}\perp\mathrm{OC}$$

すると，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HM}\perp\mathrm{OB}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{OB}$ となる。すなわち，△AOB は $\mathrm{AO}=\mathrm{AB}$ の二等辺三角形である。

同様に，AH は面 OBC に垂直で $\mathrm{HN}\perp\mathrm{OC}$ なので，三垂線の定理から，$\mathrm{AN}\perp\mathrm{OC}$ となる。すなわち，△AOC は $\mathrm{AO}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

したがって，$\mathrm{AO}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

また，頂点 B から面 OCA に下ろした垂線の足が△OCA の外心なので，同様にすると，$\mathrm{BO}=\mathrm{BC}=\mathrm{BA}$ である。

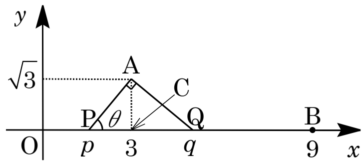
さらに，頂点 C から面 OAB に下ろした垂線の足が△OAB の外心なので，同様にすると，$\mathrm{CO}=\mathrm{CA}=\mathrm{CB}$ である。

以上より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，四面体 OABC は正四面体である。

［解 説］

空間図形の証明問題です。同じ構図の問題で「重心」となっているのが文系で出題されていますが，そこではベクトル利用で解答例をつくりました。それに対して，理系では「外心」ですので，ベクトルでの表現が難しく，ここでは三垂線の定理を適用した解答例にしています。

13 [2017 千葉大・文]



(1) $O(0,\ 0)$, $A(3,\ \sqrt{3})$, $B(9,\ 0)$に対し，線分 OB 上に点$P(p,\ 0)$，$Q(q,\ 0)$があり，$\angle PAQ=90^\circ$を満たしている。ただし，$0\leqq p<3<q\leqq 9$である。

$\angle APQ=\theta$とすると，$AP\sin\theta=\sqrt{3}$ ………①

$AQ\sin(90^\circ-\theta)=\sqrt{3}$，$AQ\cos\theta=\sqrt{3}$ ………②

ここで，$\triangle APQ$の面積をSとすると，①②から，

$$S=\frac{1}{2}AP\cdot AQ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta}=\frac{3}{\sin 2\theta}$$

(2) まず，(1)から$S=\dfrac{3}{\sin 2\theta}\geqq 3$である。ここで，等号が成立するのは$\sin 2\theta=1$，すなわち$\theta$は鋭角から$\theta=45^\circ$のときである。

このとき，$\triangle APQ$ は直角二等辺三角形となり，$C(3,\ 0)$とおくと$PC=QC=\sqrt{3}$から，P, Q はともに線分 OB 上にある。

よって，S の最小値は 3 であり，このとき P の x 座標は$3-\sqrt{3}$，Q の x 座標は$3+\sqrt{3}$となる。

(3) まず，$\triangle AOB=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{3}=\dfrac{9}{2}\sqrt{3}$となり，条件より$S=\dfrac{2}{3}\triangle AOB$から，

$$\frac{3}{\sin 2\theta}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3},\quad \sin 2\theta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \text{………③}$$

ここで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$なので，③と合わせると，

$$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2\sqrt{3},\quad \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=2\sqrt{3},\quad \tan^2\theta-2\sqrt{3}\tan\theta+1=0$$

よって，$\tan\theta=\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$ ……④となる。

さて，$PC=\sqrt{3}\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{\tan\theta}$，$QC=\sqrt{3}\tan\theta$で，条件から，$0<PC\leqq 3$，$0<QC\leqq 6$であるので，

$$0<\frac{\sqrt{3}}{\tan\theta}\leqq 3\ \text{………⑤},\quad 0<\sqrt{3}\tan\theta\leqq 6\ \text{………⑥}$$

⑤より$\tan\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，⑥より$0<\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$となり$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqq\tan\theta\leqq 2\sqrt{3}$

すると，④から$\tan\theta=\sqrt{3}+\sqrt{2}$となり，このとき，

$$PC=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=3-\sqrt{6},\quad QC=\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=3+\sqrt{6}$$

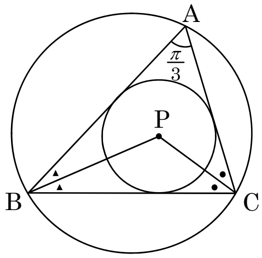
よって，P の x 座標$3-(3-\sqrt{6})=\sqrt{6}$，Q の x 座標$3+(3+\sqrt{6})=6+\sqrt{6}$である。

［解 説］

三角関数の図形への応用問題で，いろいろな解法が考えられます。

14 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2017 京都大・理]

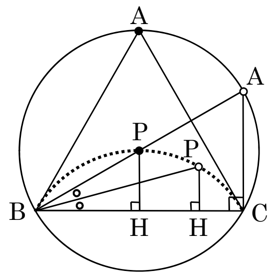
(1)　△ABC の内心を P とするとき，



$$\angle\mathrm{BPC}=\pi-(\angle\mathrm{PBC}+\angle\mathrm{PCB})$$
$$=\pi-\frac{1}{2}(\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ACB})=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle\mathrm{A})$$
$$=\pi-\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

(2)　△ABC の外接円の半径は 1 から，正弦定理より，

$$\mathrm{BC}=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$



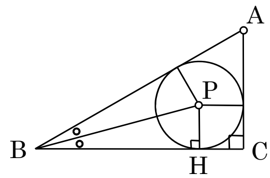
さて，△ABC は$\angle\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$である鋭角三角形である。ここで，$\triangle\mathrm{A_1BC}$を正三角形，$\triangle\mathrm{A_2BC}$を$\angle\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$の直角三角形としたとき，対称性から一般性を失うことなく，点 A は右図の弧$\mathrm{A_1A_2}$上を動くとしてもよい。ただし，点$\mathrm{A_1}$は含み，点$\mathrm{A_2}$は含まない。

また，点 P は$\angle\mathrm{BPC}=\frac{2}{3}\pi$から BC を弦とする点線の円弧上を動く。そして，$\mathrm{A}=\mathrm{A_1}$のとき$\mathrm{P}=\mathrm{P_1}$，$\mathrm{A}=\mathrm{A_2}$のとき$\mathrm{P}=\mathrm{P_2}$とする。さらに，$\mathrm{P_1}$から BC に垂線$\mathrm{P_1H_1}$，$\mathrm{P_2}$から BC に垂線$\mathrm{P_2H_2}$を引く。

すると，△ABC の内接円の半径rのとりうる値は，$\mathrm{P_2H_2}<r\leqq\mathrm{P_1H_1}$である。

そこで，$\angle\mathrm{P_1BH_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$から，$\mathrm{P_1H_1}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

また，$\triangle\mathrm{A_2BC}$は，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$なので，右図から，



$$(\sqrt{3}-\mathrm{P_2H_2})+(1-\mathrm{P_2H_2})=2,\ \mathrm{P_2H_2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

以上より，$\frac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\frac{1}{2}$である。

[解　説]

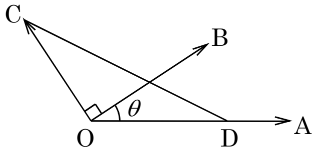
平面図形の計量についての基本的な問題です。(1)の誘導により，内心の軌跡が導けます。

15 ［2018 信州大・医］

条件(a)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角 θ に対し，$\tan\theta=\dfrac{1}{t+1}$ ………①

条件(b)から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t-3$ ……②，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ ……③

ここで，$0<t<3$ より，①から $\theta=\angle\mathrm{AOB}$ は鋭角，②から $\angle\mathrm{AOC}$ は鈍角となり，③より $\angle\mathrm{BOC}$ は直角なので，



$$\angle\mathrm{AOC}=\theta+\frac{\pi}{2}$$

すると，②より，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=t-3$

$$-\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\theta=t-3,\ \ \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\frac{3-t}{\sin\theta}\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，線分 OA を $t:1$ に内分する点 D に対して，△OCD の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OC}\cdot\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t+1}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}\cdot\cos\theta$$

④を代入すると，$S(t)=\dfrac{t}{2(t+1)}\cdot\dfrac{3-t}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=\dfrac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot\dfrac{1}{\tan\theta}$ となり，①から，

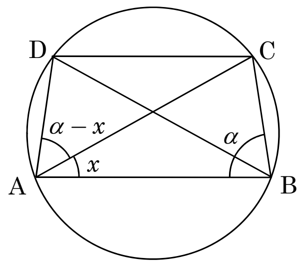
$$S(t)=\frac{t(3-t)}{2(t+1)}\cdot(t+1)=-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t=-\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

よって，$S(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

［解 説］

ベクトルの内積が絡んだ形式をしていますが，内容は三角比の応用です。

16 ［2018 京都大・理］



半径 1 の円に内接する四角形 ABCD に対して，$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{DAB}=\alpha\left(0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$から，

$$\angle\mathrm{BCD}=\angle\mathrm{ADC}=\pi-\alpha$$

これより，四角形 ABCD は AB // DC の等脚台形である。

さて，$\angle\mathrm{BAC}=x\ (0<x<\alpha)$ とおくと，$\angle\mathrm{CAD}=\alpha-x$，$\angle\mathrm{ACB}=\pi-(\alpha+x)$ となり，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin x}=2\cdot1,\quad\frac{\mathrm{CD}}{\sin(\alpha-x)}=2\cdot1,\quad\frac{\mathrm{AB}}{\sin(\alpha+x)}=2\cdot1$$

すると，$\mathrm{BC}=2\sin x$，$\mathrm{CD}=2\sin(\alpha-x)$，$\mathrm{AB}=2\sin(\alpha+x)$ となり，$\mathrm{DA}=\mathrm{BC}$ から，4 辺の長さの積 $k=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}$ は，

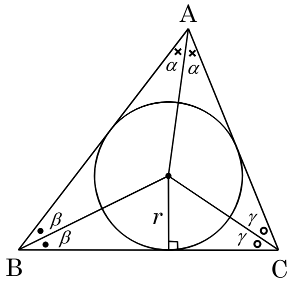
$$k=16\sin^2x\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x)=8\sin^2x(\cos2x-\cos2\alpha)$$
$$=8\sin^2x(1-2\sin^2x-1+2\sin^2\alpha)=-16\sin^4x+16\sin^2\alpha\sin^2x$$
$$=-16\left(\sin^2x-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)^2+4\sin^4\alpha$$

$0<x<\alpha$ なので $0<\sin x<\sin\alpha$ となり，$\sin^2x=\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha\left(\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right)$のとき，$k$ は最大値 $4\sin^4\alpha$ をとる。

［解 説］

円に内接する台形は等脚台形となりますが，これに正弦定理の適用させて 4 辺の長さを評価する問題です。

17　　　　[2018 東北大・理]



(1)　△ABC において，$\angle A=2\alpha$，$\angle B=2\beta$，$\angle C=2\gamma$ より，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\text{①}$$

ここで，△ABC の内接円の半径 r に対して，

$$BC=\frac{r}{\tan\beta}+\frac{r}{\tan\gamma}=r\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$

$$=r\cdot\frac{\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}=r\cdot\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}$$

①より，$\sin(\beta+\gamma)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ となり，$BC=r\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\cdots\cdots$②

また，△ABC の外接円の半径 R に対して，正弦定理から，

$$BC=2R\sin2\alpha=4R\sin\alpha\cos\alpha\cdots\cdots\text{③}$$

②③から，$r\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}=4R\sin\alpha\cos\alpha$ となり，$r=4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ より，

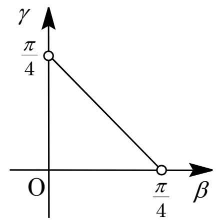
$$h=\frac{r}{R}=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\cdots\cdots\text{④}$$

(2)　△ABC が直角三角形のとき，$\angle A=\frac{\pi}{2}\left(\alpha=\frac{\pi}{4}\right)$としても一般性を失わない。

このとき，①から $\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$ となり，④より，

$$h=4\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta\sin\gamma=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\frac{\pi}{4}\right\}=\sqrt{2}\cos(\beta-\gamma)-1$$



ここで，$-\frac{\pi}{4}<\beta-\gamma<\frac{\pi}{4}$ なので，$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

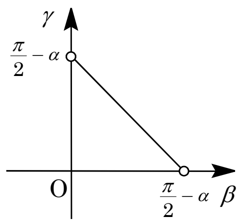
$$h\leqq\sqrt{2}\cdot1-1=\sqrt{2}-1$$

等号は $\cos(\beta-\gamma)=1$ すなわち $\beta=\gamma$ のとき成立するので，このとき△ABC は直角二等辺三角形となる。

(3)　まず，α を $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で固定すると，①から $\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}-\alpha$ となり，(2)と同様に，

$$h=4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)\}=2\sin\alpha\left\{\cos(\beta-\gamma)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right\}$$

$$=2\sin\alpha\{\cos(\beta-\gamma)-\sin\alpha\}$$



ここで，$-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\beta-\gamma<\frac{\pi}{2}-\alpha$ なので，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$$

すると，$\sin\alpha<\cos(\beta-\gamma)\leqq1$ から，

$$h\leqq2\sin\alpha(1-\sin\alpha)=2\sin\alpha-2\sin^2\alpha=-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdots\cdots\text{⑤}$$

そこで，α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすと，$0<\sin\alpha<1$ から，

$$-2\left(\sin\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$h\leqq\dfrac{1}{2}$ となる。

そして，等号が成立するのは，$\beta=\gamma$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ のときで，$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{6}$ から，△ABC は正三角形となる。

［解 説］

三角関数の三角形への応用問題です。(3)は 1 文字を固定して最大・最小を考える設問ですが，(2)を誘導としてとらえると，その方針は明快です。