２０１９ 入試対策
２次数学アーカイブ

確　率

文系＋理系

２００１－２０１８

外林康治 編著

電送数学舎

確　　率

【問題一覧】

1　コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A，B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは，A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは，B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A，B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果，A，B の到達した点の座標をそれぞれ a，b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2)　X_n を求めよ。　[2001 東京大・文]

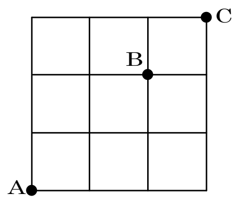
2　箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う。このとき，はじめから j 回目 $(j=1,\ \cdots,\ k)$ までに取り出したカードの番号の和を X_j とし，X_1，$\cdots$，X_k のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする。

(1)　$N \geqq 3$ のとき $P_N(1)$，$P_N(2)$，$P_N(3)$ を N で表せ。

(2)　$P_3(4)$，$P_3(5)$ を求めよ。

(3)　$k \leqq N$ のとき，$P_N(k)$ を N と k で表せ。　[2001 東京工大]

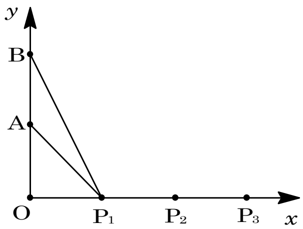
3　右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。



n を 8 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。

[2002 東北大・理]

4 座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ をとる。自然数 k に対し点 P_k の座標を $(k,\ 0)$ とする。自然数 n に対し，$2n$ 本の線分 AP_1，AP_2，…，AP_n，BP_1，BP_2，…，BP_n により分けられる第 1 象限の部分の個数を a_n とする。たとえば $n=1$ のとき，図のように第 1 象限が 3 つの部分に分けられるので $a_1=3$ である。次の問いに答えよ。



(1) a_2，a_3 の値を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n と n を用いて表し，その理由を述べよ。

(3) a_n を n を用いて表せ。 ［2003 神戸大・文］

5 1 が書かれたカードが 2 枚，2 が書かれたカードが 2 枚，…，n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後，1 枚ずつ左から順に並べる。このとき，カードに書かれている数の列を，a_1，a_2，…，a_{2n} とする。$a_k \geqq a_{k+1}\ (1 \leqq k < 2n)$ となる最小の k を X とする。

(1) $X=1$ となる確率を求めよ。

(2) $X=n$ となる確率を求めよ。

(3) m は $1 \leqq m < n$ を満たす整数とする。$X \geqq m$ となる確率を求めよ。 ［2003 一橋大］

6 さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして，X_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$ を定める。

(1) $X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2) 各 n に対し，$X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3) 各 n に対し，$X_n=1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。 ［2003 東京大・文］

7 次のようなゲームを考える。右のように 1 から 9 までの数字が書かれている表を用意する。

5	2	8
1	9	3
7	4	6

一方，9 枚のカードがあり 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれている。これらのカードをよくまぜ，順に並べる。カードを並べた順に見て，カードに書いてある数字を表から消し，かわりに＊印を書き込む。この表で縦，横あるいは斜めのいずれかに＊印が 3 つ初めて並んだとき，その時点で表にある＊印の個数を得点とする。

たとえば，最初の 4 枚のカードが，順に 5, 4, 6, 9 であれば，下のように変化する。

＊	2	8
1	9	3
7	4	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	＊

＊	2	8
1	＊	3
7	＊	＊

その結果，＊印が初めて 3 つ並んだ。このとき，得点は 4 である。次の問いに答えよ。

(1) このゲームで起こり得る最小の得点を求めよ。また，得点が最小となる確率を求めよ。

(2) このゲームで起こり得る最大の得点を求めよ。また，得点が最大となる確率を求めよ。

[2004 神戸大・理]

8 サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1) p_2 を求めよ。

(2) p_3 を求めよ。

(3) 4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。

[2004 名古屋大・理]

9 片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。 [2004 東京大・理]

10 1 から 6 の番号のつけられた 6 個の箱に，それぞれ 3 枚ずつの皿が重ねて置かれている。白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ 1 個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする。2 つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない。2 つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿 1 枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す。

(1) サイコロを 3 回振るとき，皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなる確率を求めよ。

(2) サイコロを 3 回振るとき，皿が 3 枚の箱が 2 個，5 枚の箱，4 枚の箱，2 枚の箱，1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率を求めよ。 [2005 東北大・文]

11 1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし，$n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする。この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号を大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ。 [2005 京都大・文]

12 先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n \geqq 2$ とする。各車両を赤色，青色，黄色のいずれか 1 色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。 [2005 京都大・理]

13 コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) P_3 を p で表せ。

(3) $n \geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。 ［2006 東京大・文］

14 正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n \geqq 1)$ で表す。$q_n = p_n(1) + p_n(6)$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ とおく。

(1) q_1，q_2 を求めよ。

(2) q_n を q_{n-1} で表し，q_n を求めよ。

(3) $p_n(1)$ を求めよ。 ［2006 名古屋大・文］

15 数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1，a_2，…，a_n を考える。

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし，$j = 1,\ 2,\ 3$ とする。

(i) $A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ。

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ で表し，$A_n(3)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。 ［2007 北海道大・文］

16 表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R) ① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率を求めよ。

(2) (1)で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

［2007 東京大］

17 白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき, 次の操作(A)を考える。

(A) 手もちの 4 枚の中から 1 枚を, 等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し, それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは, 白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1), (2)に答えよ。

(1) 操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

［2008 東京大・文］

18 n 枚のカードを積んだ山があり, 各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n\geqq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では, 一番上のカードを取り, 山の一番上にもどすか, あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。n 回の試行を終えたとき, 最初一番下にあったカード(番号 n)が山の一番上にきている確率を求めよ。

［2009 京都大・理］

19 はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える。この操作を n 回($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれa_n, b_n, c_nとおく。

(1) a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2を求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}をa_n, b_n, c_nで表せ。

(3) n が奇数ならば$a_n=b_n>c_n$が成り立ち, n が偶数ならば$a_n>b_n=c_n$が成り立つことを示せ。

(4) b_nを求めよ。 ［2010 名古屋大・文］

20 数字の 2 を書いた玉が 1 個, 数字の 1 を書いた玉が 3 個, 数字の 0 を書いた玉が 4 個あり, これら合計 8 個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて, この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し, 取り出した玉は袋に戻さないものとする。

(1) 玉を 2 度取り出すとき, 取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ。

(2) 玉を 4 度取り出すとき, 取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ。

(3) 玉を 8 度取り出すとき, 次の条件が満たされる確率を求めよ。
条件：すべての$n=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$に対して, 1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。 ［2011 名古屋大・文］

21 $k+1$ 個 ($k\geqq1$) の部屋A_0, A_1, A_2, $\cdots$, A_kがある。千葉君はある部屋から, その部屋以外の部屋を等しい確率$\dfrac{1}{k}$で 1 つ選び, そこへ移動する。最初, 部屋A_0にいた千葉君が, n 回 ($n\geqq1$) 部屋を移動した後に部屋A_1にいる確率を求めよ。

［2011 千葉大・理］

22 AとBの2人が, 1個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1回目はAが投げる。

1, 2, 3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4, 5の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら，投げた人を勝ちとし，それ以降は投げない。

(1) n回目にAがサイコロを投げる確率a_nを求めよ。

(2) ちょうどn回目のサイコロ投げでAが勝つ確率p_nを求めよ。

(3) n回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率q_nを求めよ。 [2011 一橋大]

23 さいころをn回$(n\geqq 2)$投げ，k回目$(1\leqq k\leqq n)$に出る目をX_kとする。

(1) 積X_1X_2が18以下である確率を求めよ。

(2) 積$X_1X_2\cdots X_n$が偶数である確率を求めよ。

(3) 積$X_1X_2\cdots X_n$が4の倍数である確率を求めよ。

(4) 積$X_1X_2\cdots X_n$を3で割ったときの余りが1である確率を求めよ。

[2012 千葉大・医]

24 nを2以上の整数とする。1からnまでの整数が1つずつ書かれているn枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。このn枚のカードから，1枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を3回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値をX，最大値をYとする。次の問いに答えよ。ただし，jとkは正の整数で，$j+k\leqq n$を満たすとする。また，sは$n-1$以下の正の整数とする。

(1) $X\geqq j$かつ$Y\leqq j+k$となる確率を求めよ。

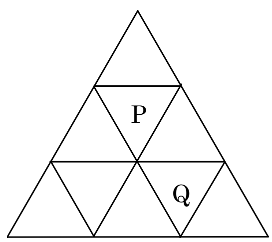
(2) $X=j$かつ$Y=j+k$となる確率を求めよ。

(3) $Y-X=s$となる確率を$P(s)$とする。$P(s)$を求めよ。

(4) nが偶数のとき，$P(s)$を最大にするsを求めよ。 [2012 名古屋大]

25 図のように，正三角形を9つの部屋に辺で区切り，部屋P，Qを定める。1つの球が部屋Pを出発し，1秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球がn秒後に部屋Qにある確率を求めよ。

[2012 東京大]



$\boxed{26}$　サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1)　s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。　［2013 一橋大］

$\boxed{27}$　1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。　［2014 東北大］

$\boxed{28}$　数直線上の点 P を次の規則で移動させる。1 枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる。P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする。

(1)　$a_3=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_4=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ。　［2014 一橋大］

29 m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) $m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2) $n \geqq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3) $n \geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば，$n=3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は，

$$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\},\ \{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\},$$
$$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\},\ \{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$$

の 5 通りであるので，$p_3=\dfrac{3}{5}$ である。

(4) (3)の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の値の範囲を求めよ。 [2015 広島大・理]

30 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点} k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{ にあるならば，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点} k-1 \text{に，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点} k+1 \text{に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。また，石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。

[2015 名古屋大・理]

31 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って, AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B, 5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

［2015 東京大・文］

32 2 つの関数を，$f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率$\dfrac{1}{2}$で$x_n=f_0(x_{n-1})$または$x_n=f_1(x_{n-1})$と定める。このとき$x_n<\dfrac{2}{3}$となる確率P_nを求めよ。

［2015 京都大・理］

33 n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2) 1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3) $n=5$のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

［2016 信州大・医］

34 サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2) a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

［2016 東北大・理］

35 A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目で A と B が対戦する。

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

［2016 東京大・文］

36 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

［2016 名古屋大・理］

37　n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　変量 x のデータの値が x_1, x_2, …, x_n であるとし，$f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は x_1, x_2, …, x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1, x_2, …, x_n の分散であることを示せ。

(2)　c を定数として，変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \ z_k=ck\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとする。このとき y_1, y_2, …, y_n の分散が z_1, z_2, …, z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3)　変量 x のデータの値が x_1, x_2, …, x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする。x_1, x_2, …, x_n, x_{n+1} の平均値を x_{n+1}, $\overline{x}$ および n を用いて表せ。

(4)　次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった。このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ。ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ。　［2016 広島大・文］

38　n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1)　$X=1$ である確率を求めよ。

(2)　$X=5$ である確率を求めよ。　［2017 京都大・文］

39 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

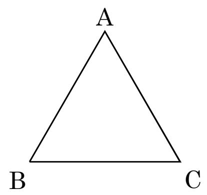
(a) 最初に，点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点$(m,\ n)$にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点$(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ$\dfrac{1}{4}$である。

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線$y=x$上にある確率を求めよ。

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。 ［2017 東京大・理］

40 表が出る確率が p，裏が出る確率が$1-p$であるようなコインがある。ただし，$0<p<1$である。このとき，右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

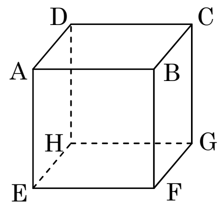
R は最初 A にあり，全部で$(2N+3)$回移動する。ここで，Nは自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$とする。次の問いに答えよ。

(1) P_2，P_3を求めよ。

(2) P_{2m}，P_{2m+1} $(2\leqq m\leqq N+1)$を求めよ。

(3) $p=\dfrac{1}{2}$とする。移動回数がちょうど$2N+3$に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。 ［2017 広島大・理］

41　右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は, 今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると, 時刻 $n+1$ では, それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して, (i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n, (ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n, (iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず, かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n, とする。このとき, 次の問いに答えよ。



(1)　p_2, q_2, r_2 と p_3, q_3, r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき, p_n, q_n, r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して, 点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

［2017 名古屋大・文］

42　赤色, 青色, 黄色のサイコロが 1 つずつある。この 3 つのサイコロを同時に投げる。赤色, 青色, 黄色のサイコロの出た目の数をそれぞれ R, B, Y とし, 自然数 s, t, u を $s=100R+10B+Y$, $t=100B+10Y+R$, $u=100Y+10R+B$ で定める。

(1)　s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率を求めよ。

(2)　$s>t>u$ となる確率を求めよ。　［2018 北海道大・文］

43　箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1)　確率 $P(4)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(6)$ を求めよ。

(3)　確率 $P(11)$ を求めよ。　［2018 千葉大・文］

44 n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2) $p(2)$ を求めよ。

(3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。 ［2018 東北大・理］

45 図 1 のような経路の図があり, 次のようなゲームを考える。最初はⒶから出発し, 1 回の操作で, 1 個のさいころを投げて, 出た目の数字が矢印にあればその方向に進み, なければその場にとどまる。この操作を繰り返し, Ⓓに到達したらゲームは終了する。

例えばⒷにいるときは, 1, 3, 5 の目が出ればⒸへ進み, 4 の目が出ればⒹへ進み, 2, 6 の目が出ればその場にとどまる。n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

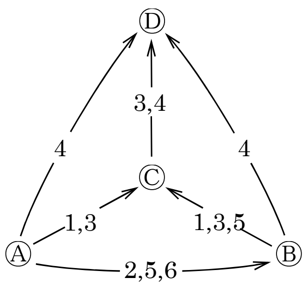


図1：経路の図

(1) ちょうど n 回の操作を行った後にⒷにいる確率を n の式で表せ。

(2) ちょうど n 回の操作を行った後にⒸにいる確率を n の式で表せ。

(3) ちょうど n 回の操作でゲームを終了する確率を n の式で表せ。 ［2018 岡山大・理］

46 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし, 積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。 ［2018 九州大・理］

47 p, q を $0<p<1$, $0<q<1$ を満たす実数とし, n を 2 以上の整数とする。2 つのチーム A, B が野球の試合を n 回行う。1 試合目に A が勝つ確率は p であるとする。また, A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p であり, B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であるとする。なお, 試合結果に引き分けはなく, 勝敗が決まるとする。

(1) n 試合目に A が勝つ確率 a_n を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ とする。B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n を求めよ。

［2018 大阪大・理］

確　　率

【解答例と解説】

1 ［2001 東京大・文］

(1) 最初, 2 点 A, B はともに原点にあるので, n 回の試行の後, 2 点 A, B の距離は 1 以下である。すなわち，$a=b$ または $a=b\pm1$ となる。

ここで，n 回の試行の後，$a=b$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表，裏のいずれでも $a\neq b$ となる。

また, n 回の試行の後，$a=b+1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが裏のとき $a=b$ となり，n 回の試行の後，$a=b-1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表のとき $a=b$ となる。

条件より，n 回の試行の後 $a=b$ となる場合の数が X_n，$a\neq b$ となる場合の数が 2^n-X_n より，

$$X_{n+1}=2^n-X_n$$

(2) 1 回目の試行の後, A, B の位置は $(a,\ b)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ より $X_1=0$ となる。

(1)より，$X_{n+1}-\dfrac{1}{3}\cdot2^{n+1}=-\left(X_n-\dfrac{1}{3}\cdot2^n\right)$

$$X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n=\left(X_1-\frac{1}{3}\cdot2^1\right)(-1)^{n-1}=-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}=\frac{2}{3}(-1)^n$$

よって，$X_n=\dfrac{2}{3}(-1)^n+\dfrac{1}{3}\cdot2^n$

［解 説］

コインの表裏がどんな出方をしても，A，B の距離の差は，つねに 1 以下です。この点を見つけるのがポイントとなっています。

２ ［2001 東京工大］

(1) カードを 1 回取り出したとき，番号が 1 である確率は，$P_N(1)=\dfrac{1}{N}$

カードを 2 回取り出したとき，その番号が 1 回目が 2，1 回目と 2 回目の和が 2 である確率は，$P_N(2)=\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{N^2}=\dfrac{N+1}{N^2}$

カードを 3 回取り出したとき，その番号が 1 回目が 3，1 回目と 2 回目の和が 3，1 回目と 2 回目と 3 回目の和が 3 である確率は，

$$P_N(3)=\frac{1}{N}+\frac{2}{N^2}+\frac{1}{N^3}=\frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(2) 1，2，3 の 3 枚のカードを 1 枚取り出して戻すという試行を 4 回行ったとき，2 回目までの和が 4 となる組合せは(1，3)，(2，2)，3 回目までの和が 4 となる組合せは(1，1，2)，4 回目までの和が 4 となる組合せは(1，1，1，1)なので，それらの順列を考えて，

$$P_3(4)=\frac{2+1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}=\frac{37}{81}$$

次に，同じ試行を 5 回行ったとき，2 回目までの和が 5 となる組合せは(2，3)，3 回目までの和が 5 となる組合せは(1，1，3)，(1，2，2)，4 回目までの和が 5 となる組合せは(1，1，1，2)，5 回目までの和が 5 となる組合せは(1，1，1，1，1)なので，それらの順列を考えて，

$$P_3(5)=\frac{2}{3^2}+\frac{3+3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{1}{3^5}=\frac{121}{243}$$

(3) j 回目に取り出したカードの番号を Y_j とすると，$X_j=Y_1+Y_2+\cdots+Y_j$

ここで，N 枚のカードから 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行ったとき，j 回目($j=1,\ \cdots,\ k$)までの和が k となるのは，

$$Y_1+Y_2+\cdots+Y_j=k\ (1\leqq Y_1\leqq N,\ 1\leqq Y_2\leqq N,\ \cdots,\ 1\leqq Y_j\leqq N)$$

この方程式を満たす$(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_j)$は，$k\leqq N$ より ${}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}$ 通りなので，

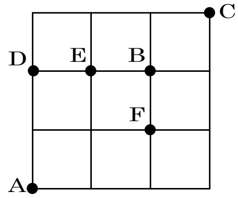
$$P_N(k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}}{N^j}=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0}{N}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{N^2}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2}{N^3}+\cdots+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}$$

$$=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0N^{k-1}+{}_{k-1}\mathrm{C}_1N^{k-2}+{}_{k-1}\mathrm{C}_2N^{k-3}+\cdots+{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}=\frac{(N+1)^{k-1}}{N^k}$$

［解 説］

(3)の具体例が(1)であり，(3)の条件である $k\leqq N$ が成り立たない場合の具体例が(2)という構成です。

3 [2002 東北大・理]



6 回目に B 以外の地点から進んで B に止まるという条件より, 6 回目では D→B, E→B, F→B のいずれかになる。

(i) 6 回目が D→B のとき

6 回目では 1 の目が出ることになり, その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると, 5 回目までに D に到達していることになり, A→D と進むには, 3 の目が 2 回出て, 4 か 5 か 6 の目が 3 回出ればよく, その確率は,
$\dfrac{5!}{2!\,3!}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{144}$ である。

(ii) 6 回目が E→B のとき

6 回目では 2 の目が出ることになり, その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると, 5 回目までに E に到達していることになり, A→E と進むには, 2 の目が 1 回, 3 の目が 2 回出て, 4 か 5 か 6 の目が 2 回出ればよく, その確率は,
$\dfrac{5!}{2!\,2!}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{144}$ である。

(iii) 6 回目が F→B のとき

6 回目では 3 の目が出ることになり, その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると, 5 回目までに F に到達していることになり, A→F と進むには次の 2 つの場合がある。1 つは, 1 の目が 1 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 3 回出るときで, その確率は$\dfrac{5!}{3!}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{72}$ である。もう 1 つは, 2 の目が 2 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 2 回出るときで, その確率は$\dfrac{5!}{2!\,2!}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{144}$ である。よって, 5 回目までに F に到達している確率は, $\dfrac{5}{72}+\dfrac{5}{144}=\dfrac{5}{48}$ である。

(i)(ii)(iii)より, 6 回目に B に到達する確率は,

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{144}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{144}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{48}=\frac{25}{864}\cdots\cdots\cdots①$$

次に, 7 回目以降に B→C と進むには, 7 回目から n 回目までに, 1 か 2 の目が少なくとも 1 回出て, しかも 3 の目が少なくとも 1 回出ればよい。

ここで, 1 か 2 の目が少なくとも 1 回出るという事象を X, 3 の目が少なくとも 1 回出るという事象を Y とおくと, それぞれ余事象の確率は,

$$P(\overline{X})=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6},\ P(\overline{Y})=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}$$

また, $\overline{X}\cap\overline{Y}$ は 4 か 5 か 6 の目だけ出るという事象を表すので, その確率は,

$$P(\overline{X}\cap\overline{Y})=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$$

$$\begin{aligned} P(X\cap Y) &= 1-P(\overline{X\cap Y}) = 1-P(\overline{X}\cup\overline{Y}) \\ &= 1-\{P(\overline{X})+P(\overline{Y})-P(\overline{X}\cap\overline{Y})\} \\ &= 1-P(\overline{X})-P(\overline{Y})+P(\overline{X}\cap\overline{Y}) \\ &= 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\cdots\cdots\cdots② \end{aligned}$$

①②より, n 回目までに C 地点に到達する確率は,

$$\frac{25}{864}\times P(X\cap Y)=\frac{25}{864}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\right\}$$

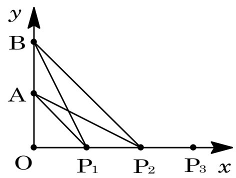
［解 説］

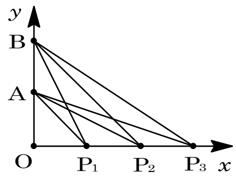
A→B の確率を求めるのと B→C の確率を求めるには, 異なる方法が必要で, 1 つの問題の中に 2 つの問題が入っています。

4 ［2003 神戸大・文］

(1) 右図より，$a_2=a_1+2+1=6$

$$a_3=a_2+3+1=10$$





(2) $2n$ 本の線分 AP_1，…，AP_n，BP_1，…，BP_n によって第 1 象限が a_n 個の部分に分けられているとする。

このとき，線分 AP_{n+1} を引くと，この線分は BP_1，BP_2，…，BP_n と 1 つずつ交点をもつことより，分けられた部分が $n+1$ 個増加する。さらに，線分 BP_{n+1} を引くと，この線分は他の線分と交点をもたないことから，分けられた部分は 1 個だけ増加する。よって，分けられた部分は，合わせて $n+2$ 個増加することより，

$$a_{n+1}=a_n+n+2$$

(3) (2)より，$n\geqq 2$ で，$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=3+\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=3$ となり成立するので，

$$a_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$$

［解 説］

分割される平面の個数についての頻出問題です。交点の個数に注目するのがポイントです。

5 ［2003 一橋大］

(1)　$X=1$ となるのは $a_1 \geqq a_2$ の場合で，a_3，…，a_{2n} は任意である。

(i)　$a_1 > a_2$ のとき

1 から n までの数から 2 つ選び，大きい方を a_1，小さい方を a_2 に対応させる。各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，このときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times 2^2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}$$

(ii)　$a_1 = a_2$ のとき

1 から n までの数から 1 つ選び，それを a_1，a_2 に対応させる。その数の書かれているカードは 2 枚あるので，このときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times 2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

(i)(ii)より，$X=1$ となる確率は，$\dfrac{n-1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{n}{2n-1}$ である。

(2)　$X=n$ となるのは $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n \geqq a_{n+1}$ の場合で，a_{n+2}，…，a_{2n} は任意である。このときは，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，…，$a_{n-1}=n-1$，$a_n=n$ の場合しかなく，しかも $a_n \geqq a_{n+1}$ はつねに成立する。

各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，$X=n$ となる確率は，

$$\frac{2^n}{{}_{2n}\mathrm{P}_n} = \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

(3)　$1 \leqq m < n$ を満たす整数に対して，$X \geqq m$ となるのは $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m$ の場合で，a_{m+1}，…，a_{2n} は任意である。

すると，1 から n までの数から m 個選び，小さい方から a_1，a_2，…，a_m を対応させる。各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，$X \geqq m$ となる確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_m \times 2^m}{{}_{2n}\mathrm{P}_m} = \frac{\dfrac{n!}{(n-m)!m!} \cdot 2^m}{\dfrac{(2n)!}{(2n-m)!}} = \frac{2^m n!(2n-m)!}{(2n)!(n-m)!m!}$$

［解 説］

題意を読みとることができれば，有名な対応問題であることがわかります。このことは，(3)についても同様です。

$\boxed{6}$　　　　［2003 東京大・文］

(1) 17 を 1 から 6 までの数で割った余りが X_1 より，X_1 の各々の値に対する確率は右表のようになる。

X_1	0	1	2	5
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

次に，X_n を 1 から 6 までの数で割った余りが X_{n+1} より，$X_n=0$ のとき，どんな場合も $X_{n+1}=0$ である。

$X_n=1$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\frac{1}{6}$，$X_{n+1}=1$ となる確率は $\frac{5}{6}$ である。

$X_n=2$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=2$ となる確率は $\frac{2}{3}$ である。

さらに，$X_n=5$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=1$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=2$ となる確率は $\frac{1}{6}$，$X_{n+1}=5$ となる確率は $\frac{1}{6}$ である。

ここで，$X_n=0$，$X_n=1$，$X_n=2$，$X_n=5$ となる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とおくと，$a_1=\frac{1}{6}$，$b_1=\frac{1}{3}$，$c_1=\frac{1}{3}$，$d_1=\frac{1}{6}$ であり，

$$a_2=a_1+\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{7}{18},\quad b_2=\frac{5}{6}b_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{1}{3}$$

$$c_2=\frac{2}{3}c_1+\frac{1}{6}d_1=\frac{1}{4},\quad d_2=\frac{1}{6}d_1=\frac{1}{36}$$

よって，$X_3=0$ となる確率は,

$$a_3=a_2+\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}c_2+\frac{1}{3}d_2=\frac{29}{54}$$

(2) (1)と同様にすると，$d_{n+1}=\frac{1}{6}d_n$ となり，$X_n=5$ となる確率は,

$$d_n=d_1\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3) (1)と同様にし, (2)の結果を用いると，$b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{3}d_n=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{5}{6}\left\{b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

$$b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(b_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{5}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$X_n=1$ となる確率は,

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

［解 説］

(1)で一般的に考えておくと, (2)と(3)は漸化式を解くだけで済みます。

7 ［2004 神戸大・理］

(1) ＊印が 3 つ並べば終了なので，最小の得点は 3 である。

このとき，縦に 3 つ並ぶのが 3 種類，横に 3 つ並ぶのが 3 種類，斜めの 3 つ並ぶのが 2 種類，合わせて 8 種類の場合がある。

そのいずれの場合も，起こる確率は $\dfrac{1}{{}_9\mathrm{C}_3}$ より，最小の得点となる確率は，

$$\frac{1}{{}_9\mathrm{C}_3}\times 8=\frac{2}{21}$$

(2) まず，＊印が 7 つのときは，数字は 2 つだけしか残っておらず，このときいずれかの行または列に＊印が 3 つ並んでいる。

次に，＊印が 6 つのときは，数字は 3 つ残っている。この数字が，どの行にも，どの列にもあり，さらに斜めにも＊印が 3 つないのは，右の 2 つの場合だけである。これより，最大の得点は 7 である。

＊	＊	8
＊	9	＊
7	＊	＊

5	＊	＊
＊	9	＊
＊	＊	6

数字が 8, 9, 7 と残っているとき，7 回目はいずれのカードを並べても＊印が 3 つ並ぶので，その確率は，$\dfrac{1}{{}_9\mathrm{C}_6}\times 1=\dfrac{1}{84}$ である。数字が 5, 9, 6 と残っているときも，同様に，7 回目に＊印が 3 つ並ぶ確率は $\dfrac{1}{84}$ である。

よって，最大の得点となる確率は，$\dfrac{1}{84}\times 2=\dfrac{1}{42}$ となる。

［解 説］

パズルを解いていくおもしろさを感じます。もっとも，その過程を記述するのは，別ですが。

8 ［2004 名古屋大・理］

(1) サイコロを 2 回投げて 8 に進むとき, 1 回目と 2 回目に出る数の組合せは,

$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$

よって，$p_2=\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$

(2) サイコロを 1 回投げて 8 に進む場合はないので，$p_1=0$ である。

また, サイコロを 2 回投げてゴールに移動していないとき, その位置を k とすると $2\leqq k\leqq 7$ なので, 3 回目に $8-k$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-k$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_3=(1-p_2)\times\frac{1}{6}=\frac{31}{36}\times\frac{1}{6}=\frac{31}{216}$$

(3) (2)と同様に考えて，サイコロを n 回$(n\geqq 2)$投げてゴールに移動していないとき，その位置を l とすると $2\leqq l\leqq 7$ なので，$n+1$ 回目に $8-l$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-l$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_{n+1}=(1-p_2-\cdots-p_{n-1}-p_n)\times\frac{1}{6}$$

これより，$1-6p_{n+1}=p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n\quad(n\geqq 2)$ ………①

$1-6p_n=p_2+\cdots+p_{n-1}\quad(n\geqq 3)$ ………②

①－②から，$p_n=-6p_{n+1}+6p_n$，$p_{n+1}=\dfrac{5}{6}p_n\quad(n\geqq 3)$

よって，$p_n=p_3\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}=\dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$

［解 説］

サイコロを 2 回以上投げたとき, 0 や 1 に移動している可能性はありません。つまり, あと 1 回投げてゴールに進むことができるわけです。この状況の把握がポイントです。

9 ［2004 東京大・理］

(1) 正方形の 3 枚の板を, 左から A, B, C とする。3 回の操作の結果, 色の並び方が「黒白白」となるのは 3 つの場合があり, 確率はそれぞれ次のようになる。

(i) A を 3 回裏返す場合 $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ii) A を 1 回裏返し B を 2 回裏返す場合 ${}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(iii) A を 1 回裏返し C を 2 回裏返す場合 ${}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(i)(ii)(iii)より, 求める確率は, $\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{7}{27}$ である。

(2) 3 枚の板の両端の色に注目して, n 回の操作の結果, A と C の板が「白・白」となる確率を p_n,「白・黒」または「黒・白」となる確率を q_n,「黒・黒」となる確率を r_n おく。このとき, $p_1=\frac{1}{3}$, $q_1=\frac{2}{3}$, $r_1=0$ である。

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\ q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$p_n+q_n+r_n=1$ より, ②から, $q_{n+1}=\frac{2}{3}(1-q_n)+\frac{1}{3}q_n=-\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}$

$$q_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(q_n-\frac{1}{2}\right),\ q_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって, $q_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots③$

①③より, $p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{1}{3}p_n-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots④$

④を満たす 1 つの数列を, α, β を定数として, $p_n=\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\beta$ とおくと,

$$\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\beta=\frac{1}{3}\left\{\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\beta\right\}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots⑤$$

すると, $-\frac{1}{3}\alpha=\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{6}$, $\beta=\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{6}$ より, $\alpha=\beta=\frac{1}{4}$ となる。

④⑤より, $p_{n+1}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left\{p_n-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\right\}$

$$p_n-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

以上より, 求める両端が白の確率は, $p_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$

［解 説］

確率の計算に, 漸化式を利用する頻出問題です。なお, 漸化式の解き方の詳細については,「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

10 ［2005 東北大・文］

(1) 皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなるのは, 1 回目に異なる目, 2 回目に 1 回目に出た以外の異なる目が出て, さらに 3 回目に 1 回目, 2 回目に出た以外の異なる目が出ることより, その確率は,

$$\frac{{}_6P_2}{6^2}\times\frac{{}_4P_2}{6^2}\times\frac{{}_2P_2}{6^2}=\frac{5}{324}$$

(2) まず, 皿が 1 番の箱に 5 枚, 2 番の箱に 4 枚, 3 番の箱に 2 枚, 4 番の箱に 1 枚, 5 番と 6 番の箱に 3 枚ずつとなるのは, 次の 2 つの場合がある。

(i) サイコロの目が(白, 黒) = (1, 3), (1, 4), (2, 4) と出るとき

出る順序は $3!=6$ 通りより, この確率は,

$$\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times 6=\frac{6}{6^6}$$

(ii) サイコロの目が(白, 黒) = (1, 4), (1, 4), (2, 3) と出るとき

出る順序は 3 通りより, この確率は,

$$\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times 3=\frac{3}{6^6}$$

すると, 皿が 3 枚の箱が 2 個, 5 枚の箱, 4 枚の箱, 2 枚の箱, 1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率は, 箱の番号と皿の枚数との対応を考えると,

$$\left(\frac{6}{6^6}+\frac{3}{6^6}\right)\times{}_6P_4=\frac{1}{2^2 6^4}\times 6\times 5\times 4\times 3=\frac{5}{72}$$

［解 説］

おもしろい確率の問題です。(2)では, イメージをはっきりさせるために, 具体例から考えました。どんな解法をとるにせよ, 注意深く, 疑い深く, 論を進める必要があります。

11 ［2005 京都大・文］

n 枚の札から 3 枚を取り出す場合の数は,

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

ここで, 取り出した札の番号を, 小さい方から a, b, c とすると,

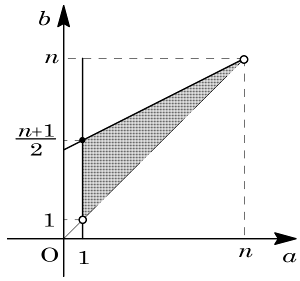
$$1\leqq a<b<c\leqq n\cdots\cdots\cdots①$$

条件より, a, b, c が等差数列をなすので, $2b=a+c\cdots\cdots\cdots②$

①②より, $1\leqq a<b<2b-a\leqq n\cdots\cdots\cdots③$

③より, $1\leqq a<b$ かつ $2b-n\leqq a$

ab 平面上で, $a=1$ と $a=2b-n$ の交点は, $\left(1,\ \dfrac{n+1}{2}\right)$ となり, ③の表す領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 実線の境界は領域に含み, 破線の境界は含まない。



これから, a, b, c が等差数列となる場合の数は, この網点部の格子点の個数として数えることができる。

さて, $b=k\ (1\leqq k\leqq n)$ と固定し, $\dfrac{n+1}{2}$ が整数がどうか, すなわち n を偶奇に分けて, その線分上の格子点の個数を数える。

(i) n が奇数のとき

$\dfrac{n+1}{2}$ は整数となるので, $b=k$ 上の格子点は, $1\leqq k\leqq\dfrac{n+1}{2}$ のとき $k-1$ 個, $\dfrac{n+3}{2}\leqq k\leqq n$ のとき $k-(2k-n)=n-k$ 個ある。これより, 格子点の総数は,

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(k-1)+\sum_{k=\frac{n+3}{2}}^{n}(n-k)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{n-1}{2}\right)\frac{n+1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n-3}{2}+0\right)\left(n-\frac{n+3}{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{8}(n^2-1)+\frac{1}{8}(n^2-4n+3)=\frac{1}{4}(n-1)^2$$

したがって, 札の番号が等差数列となる確率は,

$$\frac{\frac{1}{4}(n-1)^2}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

(ii) n が偶数のとき

$\dfrac{n+1}{2}$ は整数でないので, $b=k$ 上の格子点は, $1\leqq k\leqq\dfrac{n}{2}$ のとき $k-1$ 個, $\dfrac{n+2}{2}\leqq k\leqq n$ のとき $k-(2k-n)=n-k$ 個ある。これより, 格子点の総数は,

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(k-1)+\sum_{k=\frac{n+2}{2}}^{n}(n-k)=\frac{1}{2}\Big(0+\frac{n-2}{2}\Big)\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big(\frac{n-2}{2}+0\Big)\Big(n-\frac{n+2}{2}+1\Big)$$

$$=\frac{1}{8}(n^2-2n)+\frac{1}{8}(n^2-2n)=\frac{1}{4}n(n-2)$$

したがって，札の番号が等差数列となる確率は，

$$\frac{\frac{1}{4}n(n-2)}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\frac{3}{2(n-1)}$$

［解 説］

いろいろな考え方ができますが，1 文字を固定し，格子点の個数を対応させて場合の数を数えるという最初に考えた解法で記述しました。なお，後半のシグマ計算は，等差数列の和として公式を適用しています。

12 [2005 京都大・理]

隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となる条件を満たす塗り方のうち，n 番目が赤色である塗り方をa_n通り，赤色以外である塗り方をb_n通りとする。

$n=2$のとき，条件を満たすのは，(赤，赤)，(赤，青)，(赤，黄)，(青，赤)，(黄，赤)より，$a_2=3$，$b_2=2$である。

さて，$n+1$番目が赤のときは n 番目は任意の色であり，$n+1$番目が赤以外（青または黄）のときはn番目は赤なので，

$$a_{n+1}=a_n+b_n\cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=2a_n\cdots\cdots\cdots②$$

①－②×k より，$a_{n+1}-kb_{n+1}=(1-2k)a_n+b_n$

$$=(1-2k)\left(a_n-\frac{1}{2k-1}b_n\right)$$

$k=\dfrac{1}{2k-1}$とすると，$2k^2-k-1=0$ より，$k=-\dfrac{1}{2}$，1

$k=-\dfrac{1}{2}$のとき，$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n+\dfrac{1}{2}b_n\right)$

$$a_n+\frac{1}{2}b_n=\left(a_2+\frac{1}{2}b_2\right)2^{n-2}=(3+1)2^{n-2}=2^n\cdots\cdots\cdots③$$

$k=1$のとき，$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$

$$a_n-b_n=(a_2-b_2)(-1)^{n-2}=(3-2)(-1)^{n-2}=(-1)^n\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{3}{2}b_n=2^n-(-1)^n$，$b_n=\dfrac{1}{3}\cdot2^{n+1}-\dfrac{2}{3}(-1)^n$

$$a_n=b_n+(-1)^n=\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}-\frac{2}{3}(-1)^n+(-1)^n=\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}+\frac{1}{3}(-1)^n$$

よって，求める色の塗り方は，

$$a_n+b_n=\frac{2}{3}\cdot2^{n+1}-\frac{1}{3}(-1)^n=\frac{1}{3}\left\{2^{n+2}-(-1)^n\right\}$$

［解 説］

ストレートには考えにくいので，漸化式を立てました。1 両目の車両の色で場合分けをして，隣接 3 項間型の漸化式を立てることもできますが，最初に考えた連立漸化式で記述しました。なお，漸化式の解法は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

13 ［2006 東京大・文］

(1) ×が 3 個出る前に○が 2 個出る場合は，×○○，××○○，×○×○のいずれかなので，その確率P_2は，

$$P_2=(1-p)p+p(1-p)p+(1-p)^3=(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=(1-p)(1-p+2p^2)$$

(2) ×が 3 個出る前に○が 3 個出る場合は，×○○○，××○○○，×○×○○，×○○×○のいずれかなので，その確率P_3は，

$$P_3=(1-p)p^2+p(1-p)p^2+(1-p)^3p+(1-p)p(1-p)^2$$
$$=p(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=p(1-p)(2-3p+3p^2)$$

(3) ×が 3 個出る前に○が n 個出る場合は，

(i) 最初の×の後，○が続けて n 個出るとき

このときの確率は，$(1-p)p^{n-1}$ である。

(ii) 最初×が 2 個出た後，○が続けて n 個出るとき

このときの確率は，$p(1-p)p^{n-1}=(1-p)p^n$ である。

(iii) 最初の×の後，○が続けて k 個，次に×さらに○が続けて $n-k$ 個出るとき

このときの確率は，$1\leqq k\leqq n-1$ として，

$$(1-p)p^{k-1}(1-p)^2p^{n-k-1}=(1-p)^3p^{n-2}$$

(i)～(iii)より，×が 3 個出る前に○が n 個出る確率P_nは，

$$P_n=(1-p)p^{n-1}+(1-p)p^n+\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-1}(1+p)+(n-1)(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{p(1+p)+(n-1)(1-p)^2\}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{np^2-(2n-3)p+n-1\}$$

［解 説］

(1)と(2)で具体例を練習し，(3)で一般化する問題です。注意深く考えていけば，完答できます。

14 ［2006 名古屋大・文］

(1) まず，試行後の新しい底面の数字と，その数値になる確率を表にまとめる。

(i) 底面の数字が 1 または 6 のとき

新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかとなる。

新しい底面	2	3	4	5
確　率	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$

(ii) 底面の数字が 2 または 5 のとき

新しい底面の数字は 1, 3, 4, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	3	4	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

(iii) 底面の数字が 3 または 4 のとき

新しい底面の数字は 1, 2, 5, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	2	5	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$

さて，底面の数字が 1 であるとき，試行を 1 回行うと，新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかであるので，

$$q_1 = p_1(1) + p_1(6) = 0$$

次に，試行を 2 回行ったとき，底面が 1 となるのは，$1\to2\to1$，$1\to3\to1$，$1\to4\to1$，$1\to5\to1$ の場合，底面が 6 となるのは，$1\to2\to6$，$1\to3\to6$，$1\to4\to6$，$1\to5\to6$ の場合で，それぞれの確率は，

$$p_2(1) = \frac{2}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{1}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{1}{14} = \frac{1}{14}$$

$$p_2(6) = \frac{2}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{3}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{4}{14}\times\frac{6}{14} + \frac{5}{14}\times\frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

よって，$q_2 = p_2(1) + p_2(6) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$

(2) n 回の試行の後，底面の数字が 1 または 6 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときである。

$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 となる確率は，$\frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$ なので，

$$q_n = \frac{1}{2}(1 - q_{n-1}),\quad q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_{n-1} - \frac{1}{3}\right)\quad (n \geqq 2)$$

$q_1 = 0$ より，$q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$に $n = 1$ をあてはめると $q_1 = 0$ となり，$n = 1$ のときも満たしている。

(3) n 回の試行の後，底面の数字が 1 となるのは，$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときである。$n-1$ 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 になる確率は $\frac{1}{14}$ なので，

$$p_n(1)=\frac{1}{14}(1-q_{n-1})\quad(n\geqq 2)$$

すると, (2)より, $p_n(1)=\frac{1}{14}\cdot 2q_n=\frac{1}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$………(＊＊)

(＊＊) に $n=1$ をあてはめると $p_1(1)=0$ となり, $n=1$ のときも満たしている。

［解 説］

一見, 難しそうな題意を把握するために, (1)では, 考えた順にやや詳しく書きました。なお, 漸化式の威力が発揮されるこの手の問題は頻出です。名大では 1995 年に類題が出ています。

15 ［2007 北海道大・文］

(1) (i) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 1$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ の場合だけより，

$$A_n(1) = 1$$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるのは，$a_1 = 1$ のとき ${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1$ 通り，$a_1 = 2$ のとき１通りより，

$$A_n(2) = (n-1)+1 = n$$

(ii) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$ のとき，a_{n-1} は，$a_{n-1} = 1$，$a_{n-1} = 2$，$a_{n-1} = 3$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ より，

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

(i)より，$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) = A_{n-1}(3) + n$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2) $a_{n-1} > a_n$ より，$a_{n-1} = 2,\ 3$ である。

(i) $a_{n-1} = 2$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(2)$ 通り，また $a_n = 1$ より，この場合は，$A_{n-1}(2) \times 1 = n-1$ 通りある。

(ii) $a_{n-1} = 3$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(3)$ 通り，また $a_n = 1,\ 2$ より，この場合は，$A_{n-1}(3) \times 2 = \frac{1}{2}(n-1)n \times 2 = (n-1)n$ 通りある。

(i)(ii)より，条件を満たす数列の数は，

$$(n-1) + (n-1)n = (n-1)(n+1)$$

［解 説］

漸化式を立てるという誘導がついていますが，場合の数の有名問題です。不等号に等号のついていないタイプが，2002 年に神戸大で出題されています。

16 ［2007 東京大］

(1) n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となるのは，最初 $n-m-1$ 回は任意，次の 1 回が裏で，その後 m 回続けて表が出る場合より，その確率 p_m は，

$$p_m=(1-p)p^m \quad (0\leqq m<n)$$

ただし，$m=n$ のとき，$p_m=p^m$ である。

(2) 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m は, (1)より,

(i) $0\leqq m<n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k=(1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p}=1-p^{m+1}$$

(ii) $m=n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)p^k+p^m=(1-p)\cdot\frac{1-p^m}{1-p}+p^m=1$$

(3) 2 度のゲームにおいて，高い方のブロックの高さが m であるのは，1 度目 m で 2 度目 $m-1$ 以下，または 1 度目 $m-1$ 以下で 2 度目 m，または 1 度目 2 度目とも m のいずれかである。その確率 r_m は, (1)(2)より,

(i) $0\leqq m<n$ のとき

$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=p_m(2q_{m-1}+p_m)$$
$$=(1-p)p^m(2-2p^m+p^m-p^{m+1})=(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})$$

(ii) $m=n$ のとき

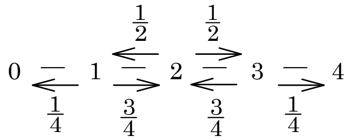
$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=2p^m(1-p^m)+p^{2m}=2p^m-p^{2m}$$

［解 説］

裏がでれば，過去を清算できるタイプのゲームです。ただ，$m=n$ の場合を特別に考えなくてはいけない点が要注意です。

17 ［2008 東京大・文］

(1) まず操作(A)を 4 回繰り返した後, 4 回目に初めて白が 4 枚になるのは, 白の枚数に注目して場合分けをすると, その確率は,



(i) 2→1→2→3→4 のとき $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

(ii) 2→3→2→3→4 のとき $\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

(i)(ii)より, $\frac{3}{64}+\frac{3}{64}=\frac{3}{32}$

(A)を 4 回繰り返した後, 4 回目に初めて黒が 4 枚となる確率も同じく $\frac{3}{32}$ より, 4 枚とも同じ色のカードになる確率は,

$$\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

(2) まず, 操作(A)を n 回繰り返した後, 白が 1 枚または 3 枚の確率を a_n, 白が 2 枚の確率を b_n とおくと,

$$a_{n+1}=b_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ b_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $b_{n+1}=\frac{3}{4}b_{n-1}$

ここで, 条件より, $b_0=1$, $b_1=0$ なので,

(i) n が奇数のとき, $b_n=0$

(ii) n が偶数のとき, $b_n=b_0\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

さて, 操作(A)を n 回繰り返した後, n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は, $\frac{1}{4}a_{n-1}=\frac{1}{4}b_{n-2}$ から,

(i) n が奇数のとき, $\frac{1}{4}b_{n-2}=0$ （$n=1$ のときも成立している）

(ii) n が偶数のとき, $\frac{1}{4}b_{n-2}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

［解 説］

状態の推移の対称性を利用して, (2)では漸化式を立てました。

18 [2009 京都大・理]

n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にあるためには，$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上または上から二番目でなくていはいけない。

(i) $n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上にあるとき

$n-1$ 回目までの試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどし，n 回目の試行では，番号 n のカードを山の一番上にもどすことより，その確率は,

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}$$

(ii) $n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが上から二番目にあるとき

$1\leqq k\leqq n-1$ として，k 回目の試行で，一番上のカードを番号 n のカードより上にもどし，それ以外の試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどす。このときの確率は,

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdots\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}=\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}$$

(i)(ii)より，n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にある確率 P は,

$$P=\frac{(n-1)!}{n^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\right\}$$

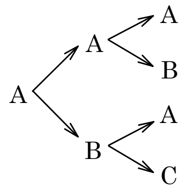
$$=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{l=1}^{n-1}l\right\}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\frac{1}{2}(n-1)n\right\}=\frac{(n^2-n+2)(n-1)!}{2n^n}$$

［解 説］

題意を把握するために，$n=5$ の場合を具体的に考えました。その部分は，上の解からは省いていますが。

19 ［2010 名古屋大・文］

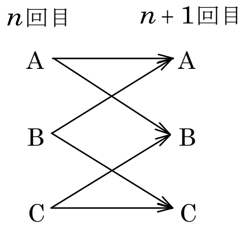
(1) はじめに，A が赤玉を持っていて，題意の操作をしたところ，赤玉は右図のように移動する。その確率は，いずれも$\dfrac{1}{2}$なので，



$$a_1=b_1=\frac{1}{2},\ \ c_1=0$$

$$a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\ \ b_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\ \ c_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(2) n 回目の操作後から，$n+1$ 回目の操作後への赤玉の移動は右図のようになり，移動の確率は，いずれも$\dfrac{1}{2}$から，



$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots\cdots③$$

(3) n が奇数ならば$a_n=b_n>c_n$，n が偶数ならば$a_n>b_n=c_n$であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき

(1)から，$a_1=b_1>c_1$，$a_2>b_2=c_2$となり，成立する。

(ii) $n=k$ のとき

$a_{2k-1}=b_{2k-1}>c_{2k-1}$，$a_{2k}>b_{2k}=c_{2k}$であると仮定すると，①②③より，

$$a_{2k+1}=\frac{1}{2}a_{2k}+\frac{1}{2}b_{2k},\ \ b_{2k+1}=\frac{1}{2}a_{2k}+\frac{1}{2}c_{2k},\ \ c_{2k+1}=\frac{1}{2}b_{2k}+\frac{1}{2}c_{2k}$$

よって，$a_{2k+1}=b_{2k+1}>c_{2k+1}$となり，さらに，

$$a_{2k+2}=\frac{1}{2}a_{2k+1}+\frac{1}{2}b_{2k+1},\ \ b_{2k+2}=\frac{1}{2}a_{2k+1}+\frac{1}{2}c_{2k+1},\ \ c_{2k+2}=\frac{1}{2}b_{2k+1}+\frac{1}{2}c_{2k+1}$$

よって，$a_{2k+2}>b_{2k+2}=c_{2k+2}$である。

(i)(ii)より，n が奇数ならば$a_n=b_n>c_n$，n が偶数ならば$a_n>b_n=c_n$である。

(4) $a_n+b_n+c_n=1$なので，②から，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-b_n)$となり，

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

よって，$b_n-\dfrac{1}{3}=\left(b_0-\dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$より，$b_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

［解 説］

確率と連立漸化式についての有名問題です。当たり前すぎて忘れがちなポイントは，$a_n+b_n+c_n=1$です。

20 ［2011 名古屋大・文］

(1) 玉を 2 度取り出すとき，数字の合計が 2 であるのは，$2+0$，$1+1$，$0+2$ の 3 通りより，その確率は，

$$\frac{1}{8}\times\frac{4}{7}+\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}+\frac{4}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{4}$$

(2) 玉を 4 度取り出すとき，玉に書かれた数字の合計が 5 以上となるのは，2 を 1 度，1 を 3 度取り出す場合より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}\right)\times\frac{4!}{3!}=\frac{1}{70}$$

よって，玉を 4 度取り出すとき，玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率は，

$$1-\frac{1}{70}=\frac{69}{70}$$

(3) まず，8 個の玉の数字の合計が 5 より，与えられた条件が満たされないのは，次の 4 つの場合である。

(i) 玉を 1 度取り出したとき，その数字が 2 以上

このときの確率は，$\dfrac{1}{8}$である。

(ii) 玉を 2 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 3 以上

$1+2$の場合より，このときの確率は，$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{3}{56}$である。

(iii) 玉を 3 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 2 以下，3 度目までの合計が 4 以上

$1+1+2$の場合より，このときの確率は，$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{56}$である。

(iv) 玉を 4 度取り出したとき，1 度目の数字が 1 以下，2 度目までの合計が 2 以下，3 度目までの合計が 3 以下，4 度目までの合計が 5 以上

$1+1+1+2$の場合より，このときの確率は，$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{280}$である。

(i)～(iv)より，与えられた条件が満たされる確率は，

$$1-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{56}+\frac{1}{56}+\frac{1}{280}\right)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

［解 説］

(3)は読解力がポイントです。具体的に考えて，題意を言い換える力が必要です。

21 ［2011 千葉大・理］

千葉君が部屋を n 回移動した後に部屋 A_1 にいる確率を p_n とおくと，最初，部屋 A_0 にいたので，$p_1=\dfrac{1}{k}$ である。

また，$n+1$ 回移動した後に部屋 A_1 にいるのは，n 回移動した後に部屋 A_1 以外にいて，A_1 を $\dfrac{1}{k}$ の確率で選んで移動する場合より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{k}(1-p_n)\,,\ \ p_{n+1}=-\frac{1}{k}p_n+\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{k+1}=-\dfrac{1}{k}\Big(p_n-\dfrac{1}{k+1}\Big)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{k+1}=\Big(p_1-\frac{1}{k+1}\Big)\Big(-\frac{1}{k}\Big)^{n-1}=\frac{1}{k(k+1)}\Big(-\frac{1}{k}\Big)^{n-1}=-\frac{1}{k+1}\Big(-\frac{1}{k}\Big)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{k+1}\Big\{1-\Big(-\dfrac{1}{k}\Big)^n\Big\}$ である。

［解 説］

最初の移動で場合分けをし，隣接 3 項間型の漸化式を立式して解いたところ，そのプロセスで$(*)$が導かれ，考え直したのが，上の解答例です。

22 ［2011 一橋大］

(1) n 回目に A, B がサイコロを投げる確率を，それぞれ a_n，b_n とおくと，条件より，$a_1=1$，$b_1=0$ である。

さて，$n+1$ 回目に A がサイコロを投げるのは，n 回目に A がサイコロを投げ 1, 2, 3 のいずれかの目が出るか，または n 回目に B がサイコロを投げ 4, 5 のいずれかの目が出るときなので，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$ 回目に B がサイコロを投げるのは，n 回目に A がサイコロを投げ 4, 5 のいずれかの目が出るか，または n 回目に B がサイコロを投げ 1, 2, 3 のいずれかの目が出るときなので，

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n)$ となり，

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\Big(\frac{5}{6}\Big)^{n-1}=\Big(\frac{5}{6}\Big)^{n-1}\cdots\cdots\cdots③$$

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n)$ となり，

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}=\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a_n=\frac{1}{2}\Big\{\Big(\frac{5}{6}\Big)^{n-1}+\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}\Big\}$

(2) n 回目のサイコロ投げで A が勝つのは，n 回目に A がサイコロを投げ, 6 の目を出すときより，その確率 p_n は, (1)より，

$$p_n=\frac{1}{6}a_n=\frac{1}{12}\Big\{\Big(\frac{5}{6}\Big)^{n-1}+\Big(\frac{1}{6}\Big)^{n-1}\Big\}$$

(3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n は, (2)より，

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\Big\{\Big(\frac{5}{6}\Big)^{k-1}+\Big(\frac{1}{6}\Big)^{k-1}\Big\}=\frac{1}{12}\Bigg\{\frac{1-\Big(\frac{5}{6}\Big)^n}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\Big(\frac{1}{6}\Big)^n}{1-\frac{1}{6}}\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 6\Big\{1-\Big(\frac{5}{6}\Big)^n\Big\}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{5}\Big\{1-\Big(\frac{5}{6}\Big)^n\Big\}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\Big(\frac{5}{6}\Big)^n-\frac{1}{10}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n$$

［解 説］

確率を計算するときに，漸化式を立てることが有効なタイプの問題です。なお, (2)は疑心暗鬼になってしまう不思議な設問です。

23 ［2012 千葉大・医］

(1) 積 X_1X_2 が 18 より大となるのは，$X_1=X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$，$(6,\ 6)$ である。また，$X_1<X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(5,\ 6)$，$X_1>X_2$ のときも同様になる。

よって，積 X_1X_2 が 18 以下である確率は，$1-\dfrac{2+3\cdot 2}{6^2}=\dfrac{7}{9}$ である。

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ が奇数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ から，偶数である確率は,

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数でない偶数であるのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_n のうちの 1 つが 2 または 6, 残りが奇数の場合より，その確率は，${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

よって，積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率は, (2)より,

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(4) さいころの出る目を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の場合をそれぞれ R_0，R_1，R_2 とおくと，いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで，自然数を 3 で割った余りについて, 2 数とその積の関係をまとめると右表のようになる。

	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_0	R_0
R_1	R_0	R_1	R_2
R_2	R_0	R_2	R_1

すると，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 であるのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_n のうち，R_1 が n 回，または R_1 が $n-2$ 回で R_2 が 2 回，または R_1 が $n-4$ 回で R_2 が 4 回，……という場合がある。その確率は, n を偶奇で分けると,

(i) n が偶数のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(ii) n が奇数のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

さて，二項定理を用いて,

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1+1)^n=2^n\ \cdots\cdots\cdots①$$

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n\,{}_n\mathrm{C}_n=(1-1)^n=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　n が偶数のとき

①＋②より，$2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)=2^n$，${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$

(ii)　n が奇数のとき

①＋②より，$2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})=2^n$，${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$

(i)(ii)より，n の偶奇にかかわらず，求める確率は，$2^{n-1}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ である。

［解 説］

確率の頻出問題です。(4)は，積が R_1 となるのは，R_0 が 0 回で，R_2 が 0 または偶数回という意味です。

24 ［2012 名古屋大］

(1) n 枚のカードをもとに戻しながら 1 枚ずつ取り出す試行を 3 回繰り返すとき，n^3 通りの場合が同様に確からしい。

さて，書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とするとき，$j\leqq X$ かつ $Y\leqq j+k$ であるのは，j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚のカードを 3 回取り出すことより，その確率 $P(j\leqq X$かつ$Y\leqq j+k)$は，

$$P(j\leqq X\text{かつ}Y\leqq j+k)=\frac{(k+1)^3}{n^3}$$

(2) 「$X=j$ かつ $Y=j+k$」となるのは，「$j\leqq X$ かつ $Y\leqq j+k$」の場合から「$j+1\leqq X$ または$Y\leqq j+k-1$」の場合を除いたものになる。

ここで，(1)と同様に考えると，$P(j+1\leqq X\text{かつ}Y\leqq j+k)=\dfrac{k^3}{n^3}$

$$P(j\leqq X\text{かつ}Y\leqq j+k-1)=\frac{k^3}{n^3},\ \ P(j+1\leqq X\text{かつ}Y\leqq j+k-1)=\frac{(k-1)^3}{n^3}$$

すると，求める確率$P(j=X\text{かつ}Y=j+k)$は，

$$P(j\leqq X\text{かつ}Y\leqq j+k)-P(j+1\leqq X\text{または}Y\leqq j+k-1)$$
$$=\frac{(k+1)^3}{n^3}-\left\{\frac{k^3}{n^3}+\frac{k^3}{n^3}-\frac{(k-1)^3}{n^3}\right\}=\frac{(k+1)^3}{n^3}-\frac{2k^3}{n^3}+\frac{(k-1)^3}{n^3}=\frac{6k}{n^3}$$

(3) (2)より，$X=j$ かつ $Y=j+s\ \ (1\leqq j\leqq n-s)$ となる確率は，それぞれ $\dfrac{6s}{n^3}$ であり，$Y-X=s$ となる確率$P(s)$は，

$$P(s)=\frac{6s}{n^3}\times(n-s)=-\frac{6}{n^3}(s^2-ns)$$

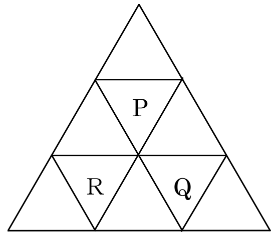
(4) (3)より，$P(s)=-\dfrac{6}{n^3}\left(s-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2n}$

すると，n は偶数より，$s=\dfrac{n}{2}$ のとき $P(s)$ は最大となる。

［解 説］

最大，最小の確率を問う有名問題です。(2)の考え方はオーソドックスなものです。

$\boxed{25}$ ［2012 東京大］



まず，部屋 R を右図のように決め，球が n 秒後に P, Q, R にある確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。

さて，球は P より出発し，1 秒ごとに辺を共有する隣の部屋に移動することより，奇数秒後には P, Q, R 以外の部屋，偶数秒後には P, Q, R のいずれかの部屋にある。

これより，k を 1 以上の整数として，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0\ \cdots\cdots\cdots①,\quad p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，球が $2k$ 秒後に部屋 P, Q, R のいずれかにあり，$2k+2$ 秒後に部屋 Q に移動する確率は，

(i) 部屋 P にあるとき P→Q と移動する確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(ii) 部屋 Q にあるとき Q→Q と移動する確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{2}{3}$

(iii) 部屋 R にあるとき R→Q と移動する確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(i)(ii)(iii)より，$q_{2k+2}=\dfrac{1}{6}p_{2k}+\dfrac{2}{3}q_{2k}+\dfrac{1}{6}r_{2k}\ \cdots\cdots\cdots③$

また，Q, R の対称性より，$q_{2k}=r_{2k}$ なので，②③に代入すると，

$$p_{2k}+2q_{2k}=1\ \cdots\cdots\cdots④,\quad q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{5}{6}q_{2k}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$q_{2k+2}=\dfrac{1}{6}(1-2q_{2k})+\dfrac{5}{6}q_{2k}=\dfrac{1}{2}q_{2k}+\dfrac{1}{6}$ となり，$q_0=0$ に注意して，

$$q_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(q_{2k}-\frac{1}{3}\right),\quad q_{2k}-\frac{1}{3}=\left(q_0-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

よって，$q_{2k}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\ \cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥から，n が奇数のとき $q_n=0$，n が偶数のとき $q_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ となる。

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。最初は，すべての部屋に名称をつけましたが，そうするまでもありませんでした。

26 ［2013 一橋大］

(1) $s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k=10^{n-1}a_1+\cdots+10^2a_{n-2}+10a_{n-1}+a_n$ に対して，

(i) $n\geqq 2$ のとき

s_n が 4 で割り切れる条件は，下 2 桁が 4 の倍数であることなので，

$(a_{n-1},\ a_n)=(1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (5,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 4),\ (6,\ 4),\ (1,\ 6),$
$(3,\ 6),\ (5,\ 6)$

この確率は，$\dfrac{6^{n-2}\times 9}{6^n}=\dfrac{1}{4}$ である。

(ii) $n=1$ のとき　s_n が 4 で割り切れる確率は，$\dfrac{1}{6}$ である。

(2) $n\geqq 2$ のとき，$s_n=10(10^{n-2}a_1+\cdots+10a_{n-2}+a_{n-1})+a_n=10s_{n-1}+a_n$

ここで，s_{n-1} を 6 で割った余りが，それぞれ 0, 1, 2, 3, 4, 5 であるとき，s_n が 6 で割り切れるのは，a_n が順に 6, 2, 4, 6, 2, 4 である場合だけとなる。

s_n が 6 で割り切れる確率を p_n とおくと，

$$p_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots①$$

なお，$p_1=\dfrac{1}{6}$ より，①は $n=1$ のときも成立している。

(3) まず，s_{n-1} を 7 で割った余りが 0 であるとき，a_n がどんな値でも s_n が 7 で割り切れる場合はない。

また，s_{n-1} を 7 で割った余りがそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6 であるとき，s_n が 7 で割り切れるのは，a_n が順に 4, 1, 5, 2, 6, 3 である場合だけとなる。

s_n が 7 で割り切れる確率を q_n とおくと，$q_1=0$ で，

$$q_n=0\times q_{n-1}+\frac{1}{6}(1-q_{n-1})=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}q_{n-1}$$

変形すると，$q_n-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(q_{n-1}-\dfrac{1}{7}\right)$ となり，

$$q_n-\frac{1}{7}=\left(q_1-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$q_n=\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$

なお，$q_1=0$ より，②は $n=1$ のときも成立している。

［解 説］

(1)については，有名な知見をもとに解きましたが，それと同じ立脚点では，続く設問に対して難攻します。考え方の融通無碍な切り換えの要求されるところが，最大の難所となっています。

$\boxed{27}$ ［2014 東北大］

(1) 10 個の玉から 2 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，$10 = 2\times 5$ より，${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{4}{45}$ である。

(2) 10 個の玉から 4 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$100 = 2^2\times 5^2$ より，次の 2 つの場合がある。

(i) 4 つの数字が $(2,\ 2,\ 5,\ 5)$ の場合　1 通り

(ii) 4 つの数字が $(1,\ 4,\ 5,\ 5)$ の場合　${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通り

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1+4}{210} = \dfrac{1}{42}$ である。

(3) 10 個の玉から 6 個を順に取り出す ${}_{10}\mathrm{P}_6$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，1 個目から 3 個目，4 個目から 6 個目に書かれている数字の組合せを，それぞれ A, B とすると，A の 3 つの数字の積と B の 3 つの数字の積が等しい場合は，

(i) $A = B$ のとき

数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り，A, B への数字の振り分けが 2^3 通り，出る順序が $3!\times 3!$ 通りより，${}_5\mathrm{C}_3 \times 2^3 \times 3!\times 3! = 5\times 2^4 \times (3!)^2$ 通りである。

(ii) $A = (2,\ 2,\ 3)$, $B = (1,\ 4,\ 3)$，または $A = (1,\ 4,\ 3)$, $B = (2,\ 2,\ 3)$ のとき

A, B への数字の振り分けが $2\times 2^2 = 2^3$ 通り，出る順序が $3!\times 3!$ 通りより，$(2^3\times 3!\times 3!)\times 2 = 2^4\times (3!)^2$ 通りである。

(iii) $A = (2,\ 2,\ 5)$, $B = (1,\ 4,\ 5)$，または $A = (1,\ 4,\ 5)$, $B = (2,\ 2,\ 5)$ のとき

(ii)と同様に，$(2^3\times 3!\times 3!)\times 2 = 2^4\times (3!)^2$ 通りである。

(i)～(iii)より，求める確率は，

$$\frac{(5+1+1)\times 2^4\times (3!)^2}{{}_{10}\mathrm{P}_6} = \frac{7\times 2^4\times (3!)^2}{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5} = \frac{2}{75}$$

［解 説］

$2\times 2 = 1\times 4$ に注目するために(2)の設問があり，それが(3)へとつながっています。注意深さの要求される問題です。

28 ［2014 一橋大］

(1) 1 枚の硬貨を投げて表，裏が出る確率は，それぞれ$\dfrac{1}{2}$ずつとする。

$a_3=0$ となるのは，表→裏→表または裏→裏→裏のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{4}$$

(2) $a_4=1$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

(i) $a_3=0$ で 4 回目に表が出る場合

この場合の確率は，(1)より，$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ となる。

(ii) $a_3=-1$ で 4 回目に裏が出る場合

$a_3=-1$ となるのは裏→表→裏のときだけであり，これよりこの場合の確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{16}$ となる。

(i)(ii)より，$a_4=1$ となる確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{16}$ である。

(3) $a_n=n-3$ $(n\geqq 3)$ となるのは，次の 2 つの場合があり，その確率 p_n について，

(i) $a_{n-1}=n-4$ で n 回目に表が出る場合

この場合の確率は，$p_{n-1}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}p_{n-1}$ となる。

(ii) $a_{n-1}=-n+3$ で n 回目に裏が出る場合

まず，$-n+3\leqq a_{n-2}\leqq n-2$ なので，$a_{n-1}=-n+3$ となるのは，$a_{n-2}=n-3$ で $n-1$ 回目に裏が出る場合だけ，すなわち裏→表→表→…→表→裏と 1 回目と $n-1$ 回目に裏が出て，それ以外は表が出る場合である。

n 回目は裏が出ることより，この場合の確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となる。

(i)(ii)より，$p_n=\dfrac{1}{2}p_{n-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $(n\geqq 4)$………(＊)

すると，(＊)より，$2^np_n=2^{n-1}p_{n-1}+1$ となり，$p_3=\dfrac{1}{4}$ から，

$$2^np_n=2^3p_3+(n-3)=8\cdot\frac{1}{4}+n-3=n-1$$

よって，$p_n=\dfrac{n-1}{2^n}$ $(n\geqq 3)$ である。

［解 説］

(1)と(2)が，(3)の漸化式を立式するための誘導となっています。特に，(ii)の場合に注意深さが要求されます。解答例では省きましたが，$a_5=2$ のときも考えて，一般化しています。

29 ［2015 広島大・理］

(1) 異なる m 種類の文字から 2 種類の文字を選ぶ方法は，${}_m\mathrm{C}_2=\dfrac{m(m-1)}{2}$ 通り。

そして，この文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，2^n 通り。この中で，2 種類の文字を含むのは, 1 種類が 2 通りあるので，2^n-2 通りである。

よって，求める場合は，$\dfrac{m(m-1)}{2}(2^n-2)=m(m-1)(2^{n-1}-1)$ 通りである。

(2) 3 種類の文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，3^n 通り。

この中で，1 種類となるのは 3 通り，2 種類となるのは ${}_3\mathrm{C}_2(2^n-2)=3(2^n-2)$ 通りなので, 3 種類の文字を含む方法は,

$$3^n-3-3(2^n-2)=3^n-3\cdot 2^n+3 \text{（通り）}$$

(3) (i) n 人を 1 組にグループ分けするとき　明らかに 1 通り。

(ii) n 人を 2 組にグループ分けするとき

2 組のグループを区別したとき，その分け方は, 2 種類の文字を 1 列に並べ, 2 種類とも含む場合に一致するので，(1)から 2^n-2 通りとなる。これより，グループを区別しないときは，$\dfrac{2^n-2}{2!}=2^{n-1}-1$ 通りである。

(iii) n 人を 3 組にグループ分けするとき

3 組のグループを区別したとき，その分け方は, 3 種類の文字を 1 列に並べ, 3 種類とも含む場合に一致するので, (2)から $3^n-3\cdot 2^n+3$ 通りとなる。そして，グループを区別しないときは，$\dfrac{3^n-3\cdot 2^n+3}{3!}=\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{2}$ 通りである。

(i)～(iii)より, n 人を最大 3 組までグループ分けする方法は,

$$1+(2^{n-1}-1)+\frac{3^{n-1}-2^n+1}{2}=\frac{3^{n-1}+1}{2} \text{（通り）}$$

すると，このときグループ数が 2 である確率 p_n は，$p_n=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}+1}=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}$

(4) $p_n\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}\leqq\dfrac{1}{3}$ となり，$3^{n-1}-3\cdot 2^n+7\geqq 0$ ………(＊)

ここで，$f(n)=3^{n-1}-3\cdot 2^n+7=3^{n-1}-6\cdot 2^{n-1}+7$ とおくと，

$$f(3)=-8<0,\ f(4)=-14<0,\ f(5)=-8<0,\ f(6)=58>0$$

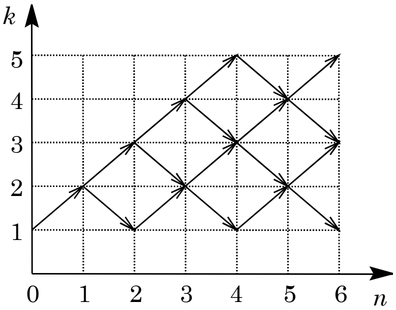
さて，$n\geqq 6$ において，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\geqq\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}>6$ より，$f(n)>7>0$ である。

よって，(＊)が成り立つ n の値の範囲は，$n\geqq 6$ である。

［解 説］

ポイントは，(1)(2)が(3)の誘導となっていることです。樹形図で要確認。

30　　［2015 名古屋大・理］



(1)　与えられた試行により，石が点 k にある確率を $P_n(k)$ とすると，初めは点 1 にあることより，右図より計算すると，

$P_1(1)=0$，$P_1(2)=1$，$P_1(3)=0$，

$P_1(4)=0$，$P_1(5)=0$

$P_2(1)=\frac{1}{2}$，$P_2(2)=0$，$P_2(3)=\frac{1}{2}$，

$P_2(4)=0$，$P_2(5)=0$

$P_3(1)=0$，$P_3(2)=\frac{3}{4}$，$P_3(3)=0$，$P_3(4)=\frac{1}{4}$，$P_3(5)=0$

$P_4(1)=\frac{3}{8}$，$P_4(2)=0$，$P_4(3)=\frac{1}{2}$，$P_4(4)=0$，$P_4(5)=\frac{1}{8}$

$P_5(1)=0$，$P_5(2)=\frac{5}{8}$，$P_5(3)=0$，$P_5(4)=\frac{3}{8}$，$P_5(5)=0$

$P_6(1)=\frac{5}{16}$，$P_6(2)=0$，$P_6(3)=\frac{1}{2}$，$P_6(4)=0$，$P_6(5)=\frac{3}{16}$

(2)　試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点にすべてに印がついているのは，

(i)　4 回目に 5 のとき　5 回目以降は任意なので，その確率は $P_4(5)\cdot 1=\frac{1}{8}$ となる。

(ii)　4 回目に 3 のとき　5 回目に 4 で，6 回目に 5 のときだけなので，その確率は $P_4(3)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ である。

(3)　まず，試行を n 回繰り返した後に，印が 3 つの点についているとき，点 1 と 2 は必ず印がつくことより，印のつく 3 つの点は 1 と 2 と 3 である。言い換えると，点 3 に少なくとも 1 回印がつき，点 4 と 5 には印がつかない場合となる。

さて，点 2→点 3→点 2 となる確率は $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，点 2→点 1→点 2 となる確率は $\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ である。これより，点 1 と 2 と 3 に印がつく確率は，l を自然数として，

(i)　n が奇数 $(n=2l+1)$ のとき　$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^l-\left(\frac{1}{2}\right)^l=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

なお，$n=1$ のときも成立している。

(ii)　n が偶数 $(n=2l)$ のとき　$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)^{l-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^l=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

［解　説］

頻出のランダムウォークが題材になっている確率の問題です。具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。

31 [2015 東京大・文]

(1) まず，文字列 AA について，左右を区別し A_1A_2 とする。

さて，表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げ，表が出たときは文字列 A_1A_2，裏が出たときは文字 B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして，n 回コインを投げ，文字列の左から n 番目の文字が A_1，A_2，B である確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。すると，$p_1=r_1=\dfrac{1}{2}$，$q_1=0$ で，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ q_{n+1}=p_n\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$p_{n+1}=\dfrac{1}{2}(q_n+r_n)=\dfrac{1}{2}(1-p_n)=-\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}$ となり，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right),\ \ p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，②より，$n\geqq 2$ において，

$$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

なお，この式は，$n=1$ のときも満たしている。

以上より，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率 p_n+q_n は，

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，文字列が A_2B となる場合より，その確率は，

$$q_{n-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

［解 説］

直接的に求めるのは難しそうだったので，漸化式を立てました。そして，いったん AA の文字列について左側と右側を区別し，3 つの状態に分けて考えたわけです。

32 ［2015 京都大・理］

まず，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2}$ または $x_n=\dfrac{x_{n-1}+1}{2}$ から，帰納的に $0<x_n<1$ である。

そこで，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となる確率を Q_n とおくと，条件より $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率が P_n より，$\dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率は P_n-Q_n，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となる確率は $1-P_n$ である。

さて，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となるのは，$0<x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ のときより，

$$Q_n=\frac{1}{2}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1}),\ Q_n=\frac{1}{2}P_{n-1}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となるのは，$\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ または $\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ のときより，

$$1-P_n=\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1})+\frac{1}{2}(1-P_{n-1}),\ Q_{n-1}=-1+2P_n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-1+2P_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_{n-1}$，$P_{n+1}=\dfrac{1}{4}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}$

$$P_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{2}{3}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_1=f_0(x_0)=\dfrac{1}{4}$ または $x_1=f_1(x_0)=\dfrac{3}{4}$ から，$P_0=1$，$P_1=\dfrac{1}{2}$

(i) $n=2k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k}-\dfrac{2}{3}=\left(P_0-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii) $n=2k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k+1}-\dfrac{2}{3}=\left(P_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k+1}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

［解 説］

与えられた関数は，数直線上で，点 x と原点との中点または点 x と点 1 との中点を出力するという意味をもちます。このことに着目して，初めは樹形図を書いたり，さらに 2^n を 3 で割った余りを考えたりして，大雑把に結論は出ました。ただ，突っ込みどころが多すぎたため，考えを改め，状態を 3 つに分けて確率漸化式の出番となったわけです。

33 [2016 信州大・医]

(1) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，勝者がただ 1 人に決まるのは，勝者の選び方が ${}_n\mathrm{C}_1 = n$ 通りで，手の出方が 3 通りである。

これより，この場合の確率は，$\dfrac{n\cdot 3}{3^n} = \dfrac{n}{3^{n-1}}$ である。

(2) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，あいこにならないのは，2 種類の手が出た場合である。このとき，種類の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り，出方が $2^n - 2$ 通りとなり，その確率は，$\dfrac{3(2^n-2)}{3^n} = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$ である。

よって，あいこになる確率は，$1 - \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} = \dfrac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$ である。

(3) 5 人でじゃんけんをし，2 回のじゃんけんで勝者がただ 1 人に決まるのは，

(i) 5 人→5 人→1 人のとき

5 人→5 人の確率は(2)より $\dfrac{3^4-2^5+2}{3^4} = \dfrac{17}{3^3}$，5 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{5}{3^4}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{17}{3^3}\cdot\dfrac{5}{3^4} = \dfrac{85}{3^7}$ である。

(ii) 5 人→4 人→1 人のとき

5 人→4 人は敗者がただ 1 人決まると考え，その確率は(1)から $\dfrac{5}{3^4}$，4 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{4}{3^3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{5}{3^4}\cdot\dfrac{4}{3^3} = \dfrac{20}{3^7}$ である。

(iii) 5 人→3 人→1 人のとき

5 人→3 人は勝者の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り，手の出方が 3 通りより，その確率は $\dfrac{10\cdot 3}{3^5} = \dfrac{10}{3^4}$ となる。3 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{3}{3^2}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{3}{3^2} = \dfrac{30}{3^6}$ である。

(iv) 5 人→2 人→1 人のとき

5 人→2 人は敗者が 3 人決まると考え，その確率は(iii)から $\dfrac{10}{3^4}$，2 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{2}{3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{20}{3^5}$ である。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{85}{3^7} + \dfrac{20}{3^7} + \dfrac{30}{3^6} + \dfrac{20}{3^5} = \dfrac{375}{3^7} = \dfrac{125}{729}$

［解 説］

じゃんけんを題材としたよく見かける確率問題ですが，意外なほど手こずります。

34 ［2016 東北大・理］

(1) $a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が直角三角形となるのは，斜辺の長さが c のとき，

$$a^2+b^2=c^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

そこで，a^2 と b^2，およびその和をまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

すると，和が平方数なのは 25 だけより，①を満たすのは，

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 3,\ 5)$$

また，斜辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様なので，求める直角三角形となる確率は，$\dfrac{2\times3}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

(2) $a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が鈍角三角形となるのは，最大辺の長さが c のとき，

$$a+b>c\ \cdots\cdots\cdots②,\quad a^2+b^2<c^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

まず，$c=1,\ 2$ では成立しないので $c\geqq3$ となり，それぞれの場合を(1)の表をもとに調べる。

(i) $c=3$ のとき

②より $a+b>3$，③より $a^2+b^2<9$ から，$(a,\ b)=(2,\ 2)$

(ii) $c=4$ のとき

②より $a+b>4$，③より $a^2+b^2<16$ から，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(iii) $c=5$ のとき

②より $a+b>5$，③より $a^2+b^2<25$ から，$(a,\ b)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$

(iv) $c=6$ のとき

②より $a+b>6$，③より $a^2+b^2<36$ から，

$$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3)$$

(i)〜(iv)より，$(a,\ b)$ の組は $1+2+3+7=13$ 通りとなる。

また，最大辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様に 13 通りずつなので，求める鈍角三角形となる確率は，$\dfrac{13\times3}{6^3}=\dfrac{13}{72}$ である。

［解 説］

丁寧に数え上げるタイプの確率の問題です。このような場合は，表を作ると数えもれが防げます。

$\boxed{35}$ [2016 東京大・文]

(1) 5 試合目で A が優勝するのは, 4 試合目の対戦までどのチームも 2 連勝せず, しかも 4 試合目と 5 試合目に A が勝つ場合である。

そこで, 各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと,

(i) 1 試合目に A が勝つとき ACBAA の場合となり, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(ii) 1 試合目に B が勝つとき BCAB…となり, この場合は不適。

(i)(ii)より, 5 試合目で A が優勝する確率は $\frac{1}{32}$ である。

(2) n 試合目 $(n\geqq 2)$ で A が優勝する場合, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

(i) 1 試合目に A が勝つとき ACBACBACB…ACBAA となる場合で, n を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii) 1 試合目に B が勝つとき BCABCABCA…BCAA となる場合で, n を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより, n 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると,

$$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (n\text{ が 3 の倍数でないとき}),\quad p(n)=0\ (n\text{ が 3 の倍数のとき})$$

(3) l を正の整数とするとき, (2)より,

(i) n を 3 で割った余りが 2 $(n=3l-1)$ のとき $p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii) n を 3 で割った余りが 1 $(n=3l+1)$ のとき $p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii) n を 3 で割った余りが 0 $(n=3l)$ のとき $p(n)=0$

さて, m を正の整数とするとき, 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m とすると, $m\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}P_m&=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}+0=2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}\\&=2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}\\&=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\end{aligned}$$

ここで, $m=1$ をあてはめると, $P_1=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$ となり, 成立している。

したがって, $P_m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$ である。

［解 説］

巴戦を題材にした有名問題です。誘導がたいへん丁寧です。

36 ［2016 名古屋大・理］

(1) 袋 A に赤玉 2 個, 袋 B に白玉 2 個の状態から始めて, 与えられた操作を 1 回行った後, 袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について, その確率 $P_1(k)$ は,

(i) $k=0$ のとき B→A に白, 次に A→B に白の場合より, $P_1(0)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii) $k=1$ のとき B→A に白, 次に A→B に赤の場合より, $P_1(1)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(iii) $k=2$ のとき この場合は起こりえないので, $P_1(2)=0$

(2) 袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について,

(i) 与えられた操作を n 回行った後, $k=0$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(1)から, $k=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$, $k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(ii) 与えられた操作を n 回行った後, $k=1$ のときに操作をもう 1 回行うとき
$k=0$ となるのは, B→A に赤, 次に A→B に白の場合より, その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$k=1$ となるのは, B→A に赤, 次に A→B に赤の場合, もしくは B→A に白, 次に A→B に白の場合より, その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$k=2$ となるのは, B→A に白, 次に A→B に赤の場合より, その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(iii) 与えられた操作を n 回行った後, $k=2$ のときに操作をもう 1 回行うとき
(i)と同様に考えて, $k=2$ となる確率は $\frac{1}{3}$, $k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(i)〜(iii)より, $P_n(k)$ と $P_{n+1}(k)$ の関係は, $P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$ に留意すると,

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)\ \cdots\cdots\cdots ①$$

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)=\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②より, $P_n(1)=\frac{2}{3}\ (n\geqq 2)$ となり, (1)から $P_1(1)=\frac{2}{3}$ なので, $P_n(1)=\frac{2}{3}\ (n\geqq 1)$

①に代入すると, $P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9}$ となり, $P_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{P_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left\{P_1(0)-\frac{1}{6}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

したがって, $P_n(0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$ となり,

$$P_n(2)=1-P_n(0)-P_n(1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

［解 説］

確率と漸化式について, よく見かける頻出問題です。

37 [2016 広島大・文]

(1) x_1, x_2, …, x_n の平均値を $\overline{x}$, 分散を s^2 とすると,

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\overline{x^2}-2a\overline{x}+a^2=(a-\overline{x})^2+\overline{x^2}-(\overline{x})^2=(a-\overline{x})^2+s^2$$

よって, $f(a)$ は $a=\overline{x}$ のとき最小となり, 最小値は s^2 である。

(2) $z_k=cy_k$ で, y_1, y_2, …, y_n の平均を $\overline{y}$, z_1, z_2, …, z_n の平均を $\overline{z}$ とすると,

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cy_k=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=c\overline{y}$$

また, y_1, y_2, …, y_n の分散を ${s_y}^2$, z_1, z_2, …, z_n の分散を ${s_z}^2$ とすると,

$${s_z}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{z_k}^2-(\overline{z})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(cy_k)^2-(c\overline{y})^2=c^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2-c^2(\overline{y})^2=c^2{s_y}^2$$

条件 ${s_y}^2>{s_z}^2$ から, ${s_y}^2>c^2{s_y}^2$ となり $c^2<1$, すなわち $-1<c<1$ である。

(3) $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ より, $\sum_{k=1}^{n}x_k=n\overline{x}$ となり, x_1, x_2, …, x_n, x_{n+1} の平均値は,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}x_k=\frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\Big)=\frac{1}{n+1}(n\overline{x}+x_{n+1})$$

(4) 与えられた 40 個のデータに, 値 40 のデータを新たに加えたときを考える。

40 個のデータの平均値は 40 なので, 41 個のデータの平均値は,

$$\frac{1}{41}(40\cdot40+40)=40$$

40 個のデータの分散は 670 なので, 41 個のデータの分散は,

$$\frac{1}{41}\{670\cdot40+(40-40)^2\}\fallingdotseq653.6\cdots$$

よって, 小数第 1 位を四捨五入すると, 654 である。

40 個のデータの中央値は, 小さい方から 20 番目(30)と 21 番目(40)の平均値から 35 なので, 41 個のデータの中央値は 21 番目より 40 である。

［解 説］

データの分析に関して, 平均値や分散などの定義の確認問題です。

$\boxed{38}$ [2017 京都大・文]

(1) さいころを n 回振り，出た目の最大値を M，最小値を L としたとき，$M-L=1$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 6)$ の場合である。

まず，$(L,\ M)=(1,\ 2)$ のときは，出た目がすべて 1 または 2 のいずれかという事象から，1 だけおよび 2 だけという事象を除いたものより，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

また，他の場合も同様なので，$M-L=1$ である確率は，

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2) $M-L=5$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 6)$ の場合だけである。

そこで，出た目がすべて 1 以上 5 以下の事象を A，2 以上 6 以下の事象を B とすると，$M-L=5$ である確率は，

$$1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$
$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

［解 説］

余事象の考え方がポイントである確率の有名問題です。頭を整理するには，図を書くと効果的です。

$\boxed{39}$ ［2017 東京大・理］

(1) 点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，1 秒後に $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ に移る事象を，それぞれ $A,\ B,\ C,\ D$ とする。そして，6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り，A, B, C, D がそれぞれ a 回，b 回，c 回，d 回起こったとすると，

$$a+b+c+d=6\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b-d=a-c\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，A または D が 3 回，B または C が 3 回起こったことより，その確率は，

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2) (1)と同様に設定して，6 秒後に O から O に移る条件は，

$$a+b+c+d=6\ \cdots\cdots\cdots③,\quad a-c=0\ \cdots\cdots\cdots④,\quad b-d=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$a+b=3$，$c=a$，$d=b$

これより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，

$$(0,\ 3,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2,\ 1),\ (3,\ 0,\ 3,\ 0)$$

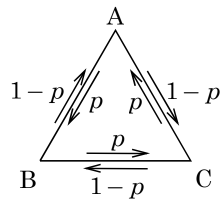
すると，求める確率は，

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{25}{256}$$

［解 説］

ランダムウォークのついての標準的な問題です。なお，(1)でも(2)と同じように，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組を求めて，確率を計算しても構いません。

40 ［2017 広島大・理］



(1) まず, R が 2 回目に A に初めて戻るのは, $A \to B \to A$ または $A \to C \to A$ から, その確率 P_2 は,

$$P_2 = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

また, R が 3 回目に A に初めて戻るのは, $A \to B \to C \to A$ または $A \to C \to B \to A$ から, その確率 P_3 は,

$$P_3 = p^3 + (1-p)^3 = 1 - 3p + 3p^2$$

(2) R が $2m$ 回目に A に初めて戻るのは, A→B→C→B→C→B→⋯→C→B→A または A→C→B→C→B→C→⋯→B→C→A から, その確率 P_{2m} は,

$$P_{2m} = p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p = 2p^m(1-p)^m$$

また, R が $2m+1$ 回目に A に初めて戻るのは, A→B→C→B→C→⋯→B→C→A または A→C→B→C→B→⋯→C→B→A から, その確率 P_{2m+1} は,

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= p^3\{p(1-p)\}^{m-1} + (1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1} \\ &= (1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

(3) $p = \dfrac{1}{2}$ のとき, (2)より, $P_{2m} = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1} = \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻るのは,

(i) R が A に初めて戻るのが $2m$ 回目 $(m = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は, $P_{2m}P_{2N+3-2m} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(ii) R が A に初めて戻るのが $2m+1$ 回目 $(m = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は, $P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

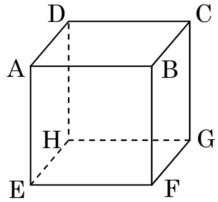
(i)(ii)より, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻る確率 Q は,

$$Q = \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} + \sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = 2N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = \frac{N}{2^{2N}}$$

［解 説］

確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

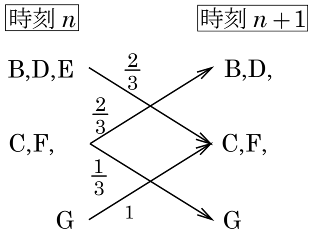
41 ［2017 名古屋大・文］



(1) 時刻 0 で A にいた点 P が，時刻 n において，A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n，A に戻らず C, F, H のいずれかにいる確率 q_n，A に戻らず G にいる確率 r_n について，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③$$



ここで，$p_1=1$，$q_1=r_1=0$ なので，①②③より，

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=0,\quad q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\frac{2}{3},\quad r_2=\frac{1}{3}q_1=0$$

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\frac{4}{9},\quad q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=0,\quad r_3=\frac{1}{3}q_2=\frac{2}{9}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき，①より $p_n=\frac{2}{3}q_{n-1}$，③より $r_n=\frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると，$q_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}$，$q_{n+1}=\frac{7}{9}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots④$

さて，④に $n=2k$ を代入すると $q_{2k+1}=\frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり，$q_{2k-1}=q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=0$

$$p_{2k}=\frac{2}{3}q_{2k-1}=0,\quad r_{2k}=\frac{1}{3}q_{2k-1}=0$$

④に $n=2k+1$ を代入すると $q_{2k+2}=\frac{7}{9}q_{2k}$ となり，$q_{2k}=q_2\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\quad r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より，$q_n=0$ (n が奇数)，$q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ (n が偶数)

また，$n=2k+1$ のとき，$k-1=\frac{n-3}{2}$ から，

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\quad p_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\quad r_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

(3) 時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m は，$m\geqq 2$ のとき，

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお，$m=1$ のときは，$s_1=\frac{1}{3}p_1=\frac{1}{3}$ である。

［解 説］

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，n を偶奇に分けて記しています。

42　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2018 北海道大・文］

(1)　赤色，青色，黄色のサイコロを同時に投げ，出た目の数をそれぞれ R，B，Y とし，自然数 s，t，u を $s=100R+10B+Y$，$t=100B+10Y+R$，$u=100Y+10R+B$ で定める。

ここで，s が 500 以上になるのは，$R=5$，6 で B，Y は任意より，その確率は $\dfrac{1}{3}$ である。同様に，t, u が 500 以上になるのも，確率はそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ である。

(i)　s, t, u がすべて 500 以上のとき　その確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$ である。

(ii)　s, t, u の 2 つが 500 以上となるとき　その確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{27}$ である。

(i)(ii)より，s, t, u のうち少なくとも 2 つが 500 以上となる確率は，

$$\frac{1}{27}+\frac{6}{27}=\frac{7}{27}$$

(2)　$s>t$ より $100R+10B+Y>100B+10Y+R$ となり，$11R>10B+Y$ ………①

すると，①を満たす R, B, Y の条件は，

(i)　$R>B$ のとき　任意の Y で①は成立する。

(ii)　$R=B$ のとき　①は $B>Y$ のとき成立する。

(i)(ii)より，$R>B$ または $R=B>Y$ である。

同様に，$t>u$ より $100B+10Y+R>100Y+10R+B$ となり，

$$11B>10Y+R\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②を満たす R, B, Y の条件は，$B>Y$ または $B=Y>R$ である。

よって，$s>t>u$ となる R, B, Y の条件は，①かつ②から，

$$R>B>Y\ \cdots\cdots\cdots③,\quad R=B>Y\ \cdots\cdots\cdots④$$

以上より，③となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通り，④となる場合の数は ${}_6\mathrm{C}_2=15$ 通りなので，求める確率は，$\dfrac{20+15}{6^3}=\dfrac{35}{216}$ である。

［解　説］

確率の標準的な問題です。(2)の①式については，初めは R の値で場合分けをしたのですが，規則性がみつかったため，それをまとめて記したのが上の解答例です。

$\boxed{43}$ ［2018 千葉大・文］

(1) もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき，金，銀，白である確率は，それぞれ$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{n-2}{n}$である。そして，金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，その合計点を考える。

さて，4 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，3 回目までの合計点が 50 点で，4 回目に金という場合だけである。すると，3 回目までは金が 1 回，白が 2 回となり，その確率$P(4)$は，

$$P(4)={}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^2\times\frac{1}{n}=\frac{3(n-2)^2}{n^4}$$

(2) 6 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，5 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i) 5 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 6 回目は金であり，5 回目までは金 1 回，白 4 回または銀 5 回となるので，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^4\times\frac{1}{n}+\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}=\frac{5(n-2)^4+1}{n^6}$$

(ii) 5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 6 回目は銀であり，5 回目までは金 1 回，銀 4 回となるので，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\times\frac{1}{n}=\frac{5}{n^6}$$

(i)(ii)より，求める確率$P(6)$は，$P(6)=\dfrac{5(n-2)^4+1}{n^6}+\dfrac{5}{n^6}=\dfrac{5(n-2)^4+6}{n^6}$

(2) 11 回目に合計点がはじめて 100 点となるのは，10 回目までの合計点が 50 点または 90 点の 2 つの場合がある。

(i) 10 回目までの合計点が 50 点のとき

このとき 11 回目は金であり，10 回目までは金 1 回，白 9 回または銀 5 回，白 5 回となるので，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\frac{1}{n}\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^9\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_5\Big(\frac{1}{n}\Big)^5\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}$$

(ii) 5 回目までの合計点が 90 点のとき

このとき 11 回目は銀であり，10 回目までは金 1 回，銀 4 回，白 5 回または銀 9 回，白 1 回となるので，その確率は，

$${}_{10}\mathrm{C}_1\,{}_9\mathrm{C}_4\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^4\Big(\frac{n-2}{n}\Big)^5\times\frac{1}{n}+{}_{10}\mathrm{C}_9\Big(\frac{1}{n}\Big)^9\cdot\frac{n-2}{n}\times\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

(i)(ii)より，求める確率 $P(11)$ は,

$$P(11)=\frac{10(n-2)^9+252(n-2)^5}{n^{11}}+\frac{1260(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$
$$=\frac{10(n-2)^9+1512(n-2)^5+10(n-2)}{n^{11}}$$

［解 説］

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので，その 1 回手前の状態に着目しています。

44 ［2018 東北大・理］

(1) 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ，合計 n 枚入っている箱から，1 枚の札を無作為に取り出して元に戻すとき，k 回目に取り出した札の番号を X_k とおく。

まず，$X_1 \geqq n$ となるのは $X_1 = n$ から，その確率 $p(1)$ は，$p(1) = \dfrac{1}{n}$ である。

次に，$X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n \geqq n$ となるのは，$X_1 = X_2 = \cdots = X_{n-1} = 1$ で X_n は任意より，その確率 $p(n)$ は，

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \times 1 = \frac{1}{n^{n-1}}$$

(2) $X_1 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 \geqq n$ となるのは，$X_1 = k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ のときは，$X_2 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より，その確率 $p(2)$ は，

$$p(2) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n + (n-1)\right\}$$
$$= \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2}$$

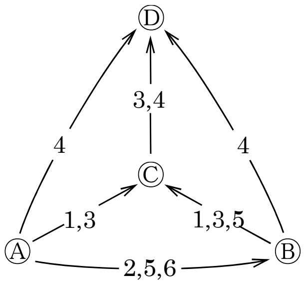
(3) $n \geqq 3$ のとき，$X_1 + X_2 \leqq n-1$ かつ $X_1 + X_2 + X_3 \geqq n$ となるのは，$X_1 + X_2 = k$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ のときは，$(X_1,\ X_2)$ の組が $(1,\ k-1)$，$(2,\ k-2)$，$\cdots$，$(k-1,\ 1)$ の $k-1$ 通りで，$X_3 = n-k,\ n-k+1,\ \cdots,\ n$ より，その確率 $p(3)$ は，

$$p(3) = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{n^2} \cdot \frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=2}^{n-1} (k^2 - 1) = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1)$$
$$= \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) - (n-1)\right\} = \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。題意を読み取る力が問われています。

45 [2018 岡山大・理]



(1) n 回の操作の後，Ⓐ，Ⓑ，Ⓒにいる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とおくと，条件より，$a_n = 0\ (n \geqq 1)$ である。

また，$b_1 = \dfrac{1}{2}$ のもとで，条件より，

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{1}{3}b_n$$

よって，$b_n = b_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ ………①

(2) $c_1 = \dfrac{1}{3}$ のもとで，条件より，

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n = \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n$$

①を代入すると，$c_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{2}{3}c_n$ ………②

ここで，②を満たす 1 つの数列を，α を定数として，$c_n = \alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ とおくと，

$$\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

すると，$\dfrac{1}{3}\alpha = \dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\alpha$ から $\alpha = -\dfrac{3}{4}$ となるので，

$$-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdots\cdots\cdots ③$$

②－③より，$c_{n+1} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} = \dfrac{2}{3}\left\{c_n + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ となり，

$$c_n + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left\{c_1 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right\}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$c_n = \dfrac{13}{12}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(3) Ⓓに到達したらゲームは終了するので，その確率を P_n とおくと，

(i) $n = 1$ のとき　Ⓐ→Ⓓの場合から，$P_1 = \dfrac{1}{6}$

(ii) $n \geqq 2$ のとき　$a_n = 0$ から，Ⓑ→ⒹまたはⒸ→Ⓓの場合より，

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{3}\left\{\frac{13}{12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{13}{24}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

［解 説］

確率と漸化式の標準的な問題です。与えられた図から，立式は容易です。なお，漸化式②の解法については，「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

46 ［2018 九州大・理］

1 から 4 までの 4 枚のカードが入っている箱から 1 枚カードを取り出し，もとに戻す試行を行う。このとき，k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n，s_n とする。

さて，$(X_1X_2\cdots X_n)\times X_{n+1}=(X_1X_2\cdots X_nX_{n+1})$ であるが，この式の両辺について 4 で割った余りの関係を調べるために，mod 4 ですべてのパターンを記述すると，右表のようになる。

$0\times1\equiv0$	$0\times2\equiv0$	$0\times3\equiv0$	$0\times4\equiv0$
$1\times1\equiv1$	$1\times2\equiv2$	$1\times3\equiv3$	$1\times4\equiv0$
$2\times1\equiv2$	$2\times2\equiv0$	$2\times3\equiv2$	$2\times4\equiv0$
$3\times1\equiv3$	$3\times2\equiv2$	$3\times3\equiv1$	$3\times4\equiv0$

そこで，この表をもとに $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りの確率について漸化式を作ると，$p_1=q_1=r_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ で，

$$p_{n+1}=p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{2}r_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}s_n\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$n\geqq2$ で $q_n=s_n$ となり，$q_1=s_1=\dfrac{1}{4}$ から $q_n=s_n\cdots\cdots\cdots⑤$

②⑤から，$q_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n$ となり，

$$q_n=q_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},\quad s_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

③に代入すると，$r_{n+1}=\dfrac{1}{2}r_n+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ となり，$2^{n+1}r_{n+1}=2^nr_n+\dfrac{1}{2}$ から，

$$2^nr_n=2r_1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n,\quad r_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

さらに，$p_n=1-q_n-r_n-s_n$ から，

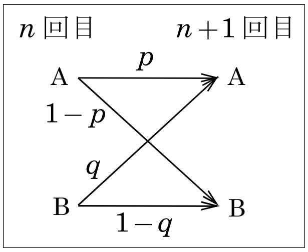
$$p_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1-(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

［解 説］

確率と漸化式の標準的な問題です。①から④が立式できれば，その処理は難しくありません。なお，p_n は①を解いても求まりますが，(等差)×(等比)という面倒な和が出てきます。

47 ［2018 大阪大・理］

(1) n 試合目に A が勝つ確率を a_n とすると，引き分けがないことより，B が勝つ確率は $1-a_n$ となる。



また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は p，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は q であることより，

$$a_{n+1}=pa_n+q(1-a_n)=(p-q)a_n+q$$

変形すると，$a_{n+1}-\dfrac{q}{1-p+q}=(p-q)\left(a_n-\dfrac{q}{1-p+q}\right)$ となり，$a_1=p$ から，

$$a_n-\frac{q}{1-p+q}=\left(a_1-\frac{q}{1-p+q}\right)(p-q)^{n-1}=\left(p-\frac{q}{1-p+q}\right)(p-q)^{n-1}$$
$$=\frac{(1-p)(p-q)}{1-p+q}(p-q)^{n-1}=\frac{1-p}{1-p+q}(p-q)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{1-p+q}\{(1-p)(p-q)^n+q\}$ である。

(2) $n\geqq 3$ として，n 回試合を行うとき，B が連勝せずに k 回目と l 回目 $(k<l)$ に勝つとする。このとき勝つチームを並べて示すと，

(i) $k=1$ かつ $l=n$ のとき　B→A→A→A→A→……→A→A→B

A→B が 1 回，B→A が 1 回，A→A が $n-3$ 回より，その確率は，

$$(1-p)\times(1-p)qp^{n-3}=p^{n-3}(1-p)^2q$$

(ii) $2\leqq k\leqq n-2$ かつ $l=n$ のとき　A→B→A→A→A→……→A→A→B など

A→B が 2 回，B→A が 1 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)^2qp^{n-4}=(n-3)p^{n-3}(1-p)^2q$$

(iii) $k=1$ かつ $3\leqq l\leqq n-1$ のとき　B→A→B→A→A→……→A→A→A など

A→B が 1 回，B→A が 2 回，A→A が $n-4$ 回より，その確率は，$n\geqq 4$ で，

$$(1-p)\times{}_{n-3}\mathrm{C}_1(1-p)q^2p^{n-4}=(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(iv) $2\leqq k<k+1<l\leqq n-1$ のとき　A→B→A→B→A→……→A→A→A など

A→B が 2 回，B→A が 2 回，A→A が $n-5$ 回で，$(k,\ l)$ の決め方が ${}_{n-3}\mathrm{C}_2$ 通りとなるので，その確率は，$n\geqq 5$ で，

$$p\times{}_{n-3}\mathrm{C}_2(1-p)^2q^2p^{n-5}=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$

(i)～(iv)より，B が連勝せずにちょうど 2 試合に勝つ確率 b_n は，

$$b_n=\{1+(n-3)\}p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-3)\{2+(n-4)\}p^{n-4}(1-p)^2q^2$$
$$=(n-2)p^{n-3}(1-p)^2q+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)p^{n-4}(1-p)^2q^2$$
$$=\frac{1}{2}(n-2)p^{n-4}(1-p)^2q\{2p+(n-3)q\}\quad(n=3,\ 4\text{ のときも成立})$$

［解 説］

(1)は確率と漸化式という頻出題，(2)は数え上げるタイプの確率問題でミスに要注意です。そのため，(2)では n に具体的な数値を代入して，チェックしながら計算を進めていくのが，1 つの有効な方法となります。