2019 入試対策
2次数学アーカイブ

整数と数列

文系＋理系

2001–2018

外林康治 編著

電送数学舎

整数と数列

【問題一覧】

1 半径１の円周上に，$4n$ 個の点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} が，反時計回りに等間隔に並んでいるとする。ただし, n は自然数である。

(1) 線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ。

(2) 点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} のうちの相異なる 3 点を頂点にもつ三角形のうち, 各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ。 ［2001 大阪大・理］

2 数列 $\{a_n\}$ において，各項 a_n が $a_n \geqq 0$ をみたし，かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ が成り立つとする。さらに各 n に対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n),\quad c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく。

(1) すべての n に対し不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2) ある n について $b_{n+1} = c_{n+1}$ が成り立てば，$b_n = c_n$ となることを示せ。

(3) $b_3 = \dfrac{1}{2}$ となるとき，$c_3 = \dfrac{1}{2}$ であることを示せ。また $b_3 = \dfrac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ。 ［2001 大阪大・理］

3 n を 2 以上の整数とする。実数 a_1，a_2，…，a_n に対し，$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。$k = 1$，2，…，n について，不等式 $-1 < S - a_k < 1$ が成り立っているとする。
$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つことを示せ。

［2001 京都大・文］

4 4 個の整数 1, a, b, c は $1 < a < b < c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。 ［2002 京都大・文］

5 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数のとき，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。 ［2002 千葉大・理］

6 p は 3 以上の素数であり, x, y は $0 \leqq x \leqq p$, $0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x = y$ であることを示せ。 ［2003 京都大・文］

7 素数 p, q に対して，$a_n = p^n - 4(-q)^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって整数 a_n を定める。ただし，$p > 2q$ とする。

(1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，$m = 3$ であることを示せ。

(2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ。 ［2004 大阪大・理］

8 n, a, b を 0 以上の整数とする。a, b を未知数とする方程式

$$(*) \quad a^2 + b^2 = 2^n$$

を考える。

(1) $n \geqq 2$ とする。a, b が方程式(∗)を満たすならば，a, b はともに偶数であることを証明せよ。（ただし, 0 は偶数に含める。）

(2) 0 以上の整数 n に対して，方程式(∗)を満たす 0 以上の整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。 ［2004 京都大・文］

9 3 以上 9999 以下の奇数 a で，$a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。 ［2005 東京大］

10 2 以上の自然数 n に対し，n と $n^2 + 2$ がともに素数になるのは $n = 3$ の場合に限ることを示せ。 ［2006 京都大・理］

11 次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で，$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ で, $y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 $(a,\ b,\ c)$ が条件(A)を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ。 ［2006 東京大・理］

12 p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0,\quad ad - bc + p = 0,\quad a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。 ［2007 京都大］

13 n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

[2007 東京大・理]

14 以下の問いに答えよ。

(1) x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2) a, b を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3) r は整数, s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。

[2008 千葉大]

15 p を素数, n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。

[2009 京都大・文]

16 t を実数として，数列 a_1，a_2，…を

$$a_1=1,\ a_2=2t,\ a_{n+1}=2ta_n-a_{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t\geqq 1$ ならば, $0<a_1<a_2<a_3<\cdots$ となることを示せ。

(2) $t\leqq -1$ ならば, $0<|a_1|<|a_2|<|a_3|<\cdots$ となることを示せ。

(3) $-1<t<1$ ならば，$t=\cos\theta$ となる θ を用いて，

$$a_n=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n\geqq 1)$$

となることを示せ。

[2009 神戸大・理]

17 4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち,

$$A=\{4k+1 \mid k\text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2) 0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ。

(3) m, n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4) m, n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。

[2010 広島大・理]

18 a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の２次方程式

$$x^2 + ax + b = 0\,,\ \ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1) $a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2) $a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

［2011 名古屋大・理］

19 すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p + qn + rn^2\,,\ \ b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q + r + s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。 ［2012 千葉大・医］

20 4 個の整数 $n + 1$，$n^3 + 3$，$n^5 + 5$，$n^7 + 7$ がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。 ［2013 大阪大・理］

21 n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x - k)(x - k - 1)$ で割った余りを $ax + b$ とする。

(1) a と b は整数であることを示せ。

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 ［2013 京都大・文］

22 n を自然数とし，整式 x^n を整式 $x^2 - 2x - 1$ で割った余りを $ax + b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 ［2013 京都大・理］

23 次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2 + b^2 = 3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。［2014 九州大］

24 $a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

［2014 一橋大］

25 r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r\,,\ a_2=r+1\,,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 $n,\ m$ に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0\,,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，…に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

［2014 東京大・理］

26 $k,\ m,\ n$ を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2) $4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。

［2015 千葉大・文］

27 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3) $p,\ q$ を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす $p,\ q$ の組をすべて求めよ。

［2015 九州大・理］

28 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

［2015 京都大・理］

29 次の性質をもつ数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=3,\ a_{n+1}>a_n,\ {a_n}^2-2a_na_{n+1}+{a_{n+1}}^2=3(a_n+a_{n+1})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，a_n+a_{n+2} を a_{n+1} を用いて表せ。

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。 [2015 東北大・文]

30 n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする。ただし，p_1，q_1 は ${p_1}^2-4q_1=4$ を満たすとする。2 次方程式$x^2-p_nx+q_n=0$は異なる実数解α_n，β_nをもつとする。ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする。$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列$\{c_n\}$は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ。

(2) c_n を n の式で表せ。

(3) $p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ。 [2015 広島大・文]

31 b と c を$b^2+4c>0$を満たす実数として，x に関する 2 次方程式$x^2-bx-c=0$の相異なる解をα，βとする。数列$\{a_n\}$を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすことを示せ。

(2) 数列$\{a_n\}$の項a_nがすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。これを証明せよ。 [2015 千葉大・理]

32 数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ。 [2015 東京大・理]

33 x, y を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。 ［2016 北海道大・文］

34 次の問いに答えよ。

(1) a を正の実数とし, k を 1 以上の実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は, 不等式 $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たすような実数解 s をもつことを示せ。

(2) a を 3 以上の整数とする。n^2+a が $an+1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ。 ［2016 大阪大・文］

35 約数, 公約数, 最大公約数を次のように定める。

・ 2 つの整数 $a,\ b$ に対して, $a=bk$ を満たす整数 k が存在するとき, b は a の約数という。

・ 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という。

・ 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という。

以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c, p は 0 でない整数で $a=pb+c$ を満たしているとする。

(i) $a=18$, $b=30$, $c=-42$, $p=2$ のとき, a と b の公約数の集合 S, および b と c の公約数の集合 T を求めよ。

(ii) a と b の最大公約数を M, b と c の最大公約数を N とする。M と N は等しいことを示せ。ただし, a, b, c, p は 0 でない任意の整数とする。

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を, $a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$, $a_1=3$, $a_2=4$ で定める。

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。 ［2016 神戸大・理］

$\boxed{36}$ 以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。　［2016 東京大・文］

$\boxed{37}$ 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。　［2016 九州大］

$\boxed{38}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。　［2016 東北大・理］

$\boxed{39}$ n を 2 以上の自然数とする。

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

［2016 東京工大］

$\boxed{40}$ 素数 p, q を用いて，$p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ。　［2016 京都大・理］

$\boxed{41}$ 正の整数 n に対して，その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。

(2) $s(2016)$ を求めよ。

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ。

［2016 名古屋大・文］

42 連立方程式 $x^2 = yz + 7$，$y^2 = zx + 7$，$z^2 = xy + 7$ を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ。 [2017 一橋大]

43 自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 $a,\ n,\ k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

[2017 北海道大・理]

44 以下の問いに答えよ。

(1) 2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2) 225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3) 225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。 [2017 九州大・文]

45 数列$\{a_n\}$が,

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $b_n \geqq 0\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(2) $b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) a_{2017} の一の位の数を求めよ。 [2017 筑波大・理]

46 $p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。 [2017 東京大]

47 初項$a_1=1$，公差４の等差数列$\{a_n\}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$の初項から第600項のうち，7の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の初項から第600項のうち，7^2の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

［2017 九州大・理］

48 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(＊)を満たす３つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。

(＊) $a<b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ である。

(2) 偶数$2n$ $(n\geqq 1)$の３つの正の約数$p,\ q,\ r$で，$p>q>r$と$p+q+r=n$を満たす組$(p,\ q,\ r)$の個数を$f(n)$とする。ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$とする。n が自然数全体を動くときの$f(n)$の最大値 M を求めよ。また，$f(n)=M$となる自然数nの中で最小のものを求めよ。

［2017 名古屋大・文］

49 以下の問いに答えよ。

(1) nを自然数とするとき，2^nを７で割った余りを求めよ。

(2) 自然数mは，２進法で101が６回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。mを７で割った余りを求めよ。

［2018 九州大・文］

50 n^3-7n+9が素数となるような整数nをすべて求めよ。

［2018 京都大］

51 次の問いに答えよ。

(1) 整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数であることを示せ。

(2) n を奇数とする。このとき$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$を満たす整数$\alpha$，$\beta$は存在しないことを示せ。

(3) c を実数とする。このとき３次方程式$x^3-2018x+c=0$の解のうち整数であるものは１個以下であることを示せ。

［2018 名古屋大・文］

52 整数a, bは等式 $3^a-2^b=1$……①を満たしているとする。

(1) a, bはともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ならば，aは偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組$(a,\ b)$をすべてあげよ。

［2018 東北大・理］

53 初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1=7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。 [2018 千葉大・文]

54 数列 a_1，a_2，…を，$a_n=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) $n\geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n\geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

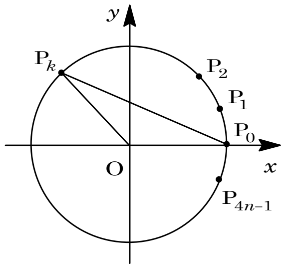
(2) a_n が整数となる $n\geqq 1$ をすべて求めよ。 [2018 東京大・理]

整数と数列

【解答例と解説】

1 ［2001 大阪大・理］

(1) $\angle \mathrm{P_0OP}_k = \dfrac{2\pi}{4n}k = \dfrac{\pi}{2n}k$ であり，条件より $\mathrm{P_0P}_k \geqq \sqrt{2}$ なので $\mathrm{P_0P}_k{}^2 \geqq 2$



△$\mathrm{P_0OP}_k$ に余弦定理を適用して，

$$1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2n}k \geqq 2$$

$\cos\dfrac{\pi}{2n}k \leqq 0$ より，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2n}k \leqq \dfrac{3\pi}{2}$

よって，$n \leqq k \leqq 3n$

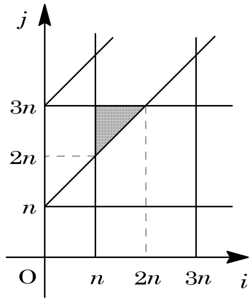
(2) P_0 を 1 つの頂点とする三角形を考え，他の頂点を P_i，P_j $(i<j)$ とおくと，

$\mathrm{P_0P}_i \geqq \sqrt{2}$ から，$n \leqq i \leqq 3n$ ………①

$\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j \geqq \sqrt{2}$ から，$i+n \leqq j \leqq i+3n$ ………②

$\mathrm{P}_j\mathrm{P}_0 \geqq \sqrt{2}$ から，$4n-3n \leqq j \leqq 4n-n$

$n \leqq j \leqq 3n$ ………③



①②③を満たす領域は右図のようになり，この領域内の $(i,\ j)$ の組の個数は，

$$\sum_{i=n}^{2n}\{3n-(i+n)+1\} = \sum_{i=n}^{2n}(2n-i+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

P_1 を 1 つの頂点とする三角形，P_2 を 1 つの頂点とする三角形，……，P_{4n-1} を 1 つの頂点とする三角形についても同数となり，また条件を満たす三角形を重複して 3 回数えていることより，求める個数 $g(n)$ は，

$$g(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot 4n\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}n(n+1)(n+2)$$

［解 説］

(2)は格子点の個数を対応させて数えました。よく見かける頻出題です。

２　　[2001 大阪大・理]

(1) (i)　$n=1$ のとき　$b_1=c_1=1-a_1$ より，$b_1 \geqq c_1$ は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$b_k \geqq c_k$ と仮定すると，$b_k-c_k \geqq 0$

$$b_{k+1}-c_{k+1}=(1-a_{k+1})b_k-(c_k-a_{k+1}) \geqq a_{k+1}(1-b_k) \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$a_n \geqq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}$ より，$0 \leqq a_n \leqq \frac{1}{2}$ となるので，$\frac{1}{2} \leqq 1-a_n \leqq 1$

よって，$b_k=(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k) \leqq 1$ から，$a_{k+1}(1-b_k) \geqq 0 \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$b_{k+1}-c_{k+1} \geqq 0$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対し，不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つ。

(2)　条件より，ある n に対して，$b_{n+1}-c_{n+1}=(b_n-c_n)+a_{n+1}(1-b_n)=0$

ここで，②より $a_{n+1}(1-b_n) \geqq 0$ なので，$b_n-c_n \leqq 0$

ところが, (1)より $b_n-c_n \geqq 0$ なので，$b_n-c_n=0$ となる。

(3)　$c_3=1-(a_1+a_2+a_3)$ で，$0 \leqq a_1+a_2+a_3 \leqq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}$ より，$\frac{1}{2} \leqq c_3 \leqq 1$

ところが，$b_3=\frac{1}{2}$ のとき, (1)より $c_3 \leqq \frac{1}{2}$ となるので，$c_3=\frac{1}{2}$ である。

さて，$b_3=(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)=\frac{1}{2} \cdots\cdots③$，$c_3=1-(a_1+a_2+a_3)=\frac{1}{2} \cdots\cdots④$

③より，$1-(a_1+a_2+a_3)+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)-a_1a_2a_3=\frac{1}{2}$

④を代入して，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=a_1a_2a_3 \cdots\cdots\cdots⑤$

また, (2)より $b_3=c_3=\frac{1}{2}$ のとき，$b_2=c_2$ なので,

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)，a_1a_2=0 \cdots\cdots\cdots⑥$$

(i)　$a_1=0$ のとき　⑤より $a_2a_3=0$

$a_2=0$ のとき③より $a_3=\frac{1}{2}$，$a_3=0$ のとき③より $a_2=\frac{1}{2}$

(ii)　$a_1 \neq 0$ のとき　⑥より $a_2=0$ で，⑤より $a_3a_1=0$ なので $a_3=0$

このとき，③より $a_1=\frac{1}{2}$

(i)(ii)より，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right), \left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right), \left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$

すると，このいずれの組も，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{2}$ から $n \geqq 4$ において $a_n=0$ となるので，求める数列 $\{a_n\}$ は全部で 3 種類存在する。

［解 説］

思考がなめらかに流れていくように，設問に工夫がいろいろ施されています。

3 ［2001 京都大・文］

条件より，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ ……①，$-1 < S - a_k < 1$ ($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) ……②

まず，$a_n \geqq 2$ と仮定する。

②において $k = 1$ のとき，$-1 < S - a_1 < 1$ なので，$-1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n < 1$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < 1 - a_n \leqq -1 \ \cdots\cdots\cdots ③$$

①より $a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，③から $a_2 < 0$ となり，①から $a_1 \leqq a_2 < 0$

すると，③より $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < -1$ なので，

$$S - a_n < -1$$

これは②において $k = n$ のときに反するので，$a_n < 2$ となる。

次に $a_1 \leqq -2$ と仮定する。

②において $k = n$ のとき，$-1 < S - a_n < 1$ なので，$-1 < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < 1$

$$1 \leqq -1 - a_1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ \cdots\cdots\cdots ④$$

①より $a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，④から $a_{n-1} > 0$ となり，①から $0 < a_{n-1} \leqq a_n$

すると，④より $1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ なので，

$$S - a_1 > 1$$

これは②において $k = 1$ のときに反するので，$a_1 > -2$ となる。

以上より，①から，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つ。

［解 説］

京大らしい証明問題です。$n = 2$ の場合は明らかですが，$n = 3$ や $n = 4$ の場合を考えていくと，論証の道筋が見えてきます。

4 [2002 京都大・文]

$1<a<b<c$ より，$1+a<1+b<1+c<a+c<b+c$ となる。しかも，$1+b<a+b$，$a+b<a+c$ である。すると，$1+a$ から $b+c$ までの整数の大小関係には，次の 3 つの場合がある。

(i) $1+c<a+b$ のとき

この場合，$1+a<1+b<1+c<a+b<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$ ……①，$1+c=1+a+2$ ……②，$a+b=1+a+3$ ……③

$a+c=1+a+4$ ……④，$b+c=1+a+5$ ……⑤

③より $b=4$，④より $c=5$ となり，①に代入して $a=3$

この値は②，⑤を満たす。

(ii) $1+c=a+b$ のとき

この場合，$1+a<1+b<1+c=a+b<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$ ……⑥，$1+c=1+a+2$ ……⑦，$a+b=1+a+2$ ……⑧

$a+c=1+a+3$ ……⑨，$b+c=1+a+4$ ……⑩

⑧より $b=3$，⑨より $c=4$ となり，⑥に代入して $a=2$

この値は⑦，⑩を満たす。

(iii) $a+b<1+c$ のとき

この場合，$1+a<1+b<a+b<1+c<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$ ……⑪，$a+b=1+a+2$ ……⑫，$1+c=1+a+3$ ……⑬

$a+c=1+a+4$ ……⑭，$b+c=1+a+5$ ……⑮

⑫より $b=3$，⑭より $c=5$ となり，⑪に代入して $a=2$

この値は⑬，⑮を満たす。

(i)(ii)(iii)より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5)$

［解 説］

京大らしい問題です。1，a，b，c の中から 2 個とりだして作った 6 個の整数のうち，$a+b$ の大小関係だけが決定しません。この点に気付くのがポイントです。

5 [2002 千葉大・理]

(1) $\log_2 3$が有理数であると仮定すると, p, q を互いに素な自然数として,

$$\log_2 3 = \frac{q}{p},\ 2^{\frac{q}{p}} = 3,\ 2^q = 3^p \cdots\cdots\cdots①$$

p, q は自然数なので, ①は左辺が偶数, 右辺が奇数となり, 成立しない。

よって, $\log_2 3$は無理数である。

(2) まず, $n=1$のとき$\log_2 1 = 0$となり, $\log_2 n$は整数である。

$n \geqq 2$ で$\log_2 n$が有理数のとき, p, q を互いに素な自然数として,

$$\log_2 n = \frac{q}{p},\ 2^{\frac{q}{p}} = n,\ 2^q = n^p$$

ここで, m を正の奇数とし, l を 0 以上の整数として, $n = m\cdot 2^l$ とおくと,

$$2^q = (m\cdot 2^l)^p = m^p\cdot 2^{lp},\ 2^{q-lp} = m^p \cdots\cdots\cdots②$$

p は自然数なので, ②の右辺は奇数となり, 左辺も奇数となる。

よって, $q - lp = 0$, $q = lp \cdots\cdots\cdots③$

p, q は自然数なので, ③から l も自然数となる。

すると, $\dfrac{q}{p} = l$ より $\log_2 n = l$ となり, $\log_2 n$が整数でない有理数となることはない。

［解 説］

(1)は基本的ですが, (2)では$n = m\cdot 2^l$ とおくことがすべてです。このような設定を自分でしなくてはいけないところが難しさの原因です。

6 ［2003 京都大・文］

x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しいので, k を整数として,

$$x^2-y^2=2pk\ ,\ \ (x+y)(x-y)=2pk\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

よって, p が素数より，$x+y$ または $x-y$ は p の倍数となる。

また, $0\leqq x\leqq p$, $0\leqq y\leqq p$ より，$0\leqq x+y\leqq 2p$，$-p\leqq x-y\leqq p$ である。

(i) $x+y$ が p の倍数であるとき

$x+y=0$ のとき，$x=y=0$ である。

$x+y=p$ のとき，$(*)$より $x-y=2k$ である。ここで，p は 3 以上の素数なので $x+y$ は奇数であり，また $x-y$ は偶数である。ところが，一般的に $x+y$ と $x-y$ の偶奇は一致するので，この場合は不適である。

$x+y=2p$ のとき，$x=y=p$ である。

(ii) $x-y$ が p の倍数であるとき

$x-y=-p$ のとき, $(*)$より $x+y=-2k$ である。すると，$x-y$ は奇数，$x+y$ は偶数となり，不適である。

$x-y=0$ のとき，$x=y$ である。

$x-y=p$ のとき，$(*)$より $x+y=2k$ である。すると，$x-y$ は奇数，$x+y$ は偶数となり，不適である。

(i)(ii)より，いずれの場合も $x=y$ である。

［解 説］

京大に特徴的な整数問題，今年もまた出ました。

7 ［2004 大阪大・理］

(1) $a_1=p+4q$，$a_2=p^2-4q^2$ の公約数を m とし，整数 b_1，b_2 に対し，$a_1=mb_1$，$a_2=mb_2$ とすると，

$$p+4q=mb_1\cdots\cdots\cdots①,\quad p^2-4q^2=mb_2\cdots\cdots\cdots②$$

①より $p=mb_1-4q$，②に代入して $(mb_1-4q)^2-4q^2=mb_2$

$$12q^2=m(b_2-b_1{}^2+8b_1q)\cdots\cdots\cdots③$$

さて，素数 p，q は $p>2q$ を満たすので，p は 5 以上の奇数である。これより，$p+4q$ は奇数となり，①より m は奇数である。

さらに，③より m は $12q^2=2^2\times3\times q^2$ の約数であるので，$m>1$ であれば，奇数 m の値として，$m=3$，q，q^2，$3q$，$3q^2$ $(q\neq2)$ が考えられる。

ところが，$m=q$，q^2，$3q$，$3q^2$ のときは，①より p は q の倍数となり，不適である。

以上より，$m>1$ であれば，$m=3$ である。

(2) まず，$a_1=(p+q)+3q$ から，a_1 が 3 の倍数であるためには，$p+q$ が 3 の倍数であることが必要である。

逆に，$p+q$ が 3 の倍数とき，任意の n に対して，

$$a_n=p^n-4(-q)^n=p^n-(3+1)(-q)^n=p^n-(-q)^n-3(-q)^n$$
$$=(p+q)\{p^{n-1}+p^{n-2}(-q)+\cdots+(-q)^{n-1}\}-3(-q)^n$$

これより，a_n はすべて 3 の倍数となるので，a_n が 3 の倍数である条件と，$p+q$ が 3 の倍数である条件は等しい。

さて，素数 p, q は $p>2q$ を満たすので，$p\geqq5$, $q\geqq2$ である。

そこで，$q=2$ のときを考えると，$p+q$ が 3 の倍数となる最小の素数 p は 7 であり，このとき $pq=14$ となる。

また，$q\geqq3$ のときは $p\geqq7$ から $pq\geqq21$ となり，これより積 pq が最小となる p，q は，$p=7$，$q=2$ である。

［解 説］

(2)において，a_2 についても，$a_2=p^2-q^2-3q^2=(p+q)(p-q)-3q^2$ と変形し，3 の倍数となる条件を考えています。

8 ［2004 京都大・文］

(1) $a^2+b^2=2^n$ ……①に対して，$n\geqq 2$ のとき 2^n は 4 以上の偶数なので，a^2，b^2 はともに偶数か，またはともに奇数である。

よって，a, b はともに偶数であるか，またはともに奇数である。

ここで，a，b がともに奇数であると仮定する。すなわち，k，l を自然数として，$a=2k-1$，$b=2l-1$ とおくと，

$$a^2+b^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2=2\{2k(k-1)+2l(l-1)+1\}$$

①より，$2k(k-1)+2l(l-1)+1=2^{n-1}$ ………②

②は左辺が奇数，また $n\geqq 2$ より右辺が偶数となり，成立しない。よって，a，b がともに奇数という場合はない。

以上より，$n\geqq 2$ で①が成立するとき，a, b はともに偶数である。

(2) (i) $n=0$ のとき　①より $a^2+b^2=1$ なので，$(a,\ b)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$

(ii) $n=1$ のとき　①より $a^2+b^2=2$ なので，$(a,\ b)=(1,\ 1)$

(iii) $n\geqq 2$ のとき　(1)より a, b はともに偶数である。

そこで，a_1，b_1 を 0 以上の整数として，$a=2a_1$，$b=2b_1$ とおくと，①より，

$$4{a_1}^2+4{b_1}^2=2^n,\ \ {a_1}^2+{b_1}^2=2^{n-2}$$

$n-2\geqq 2$ のときは，a_2，b_2 を 0 以上の整数として，$a_1=2a_2$，$b_1=2b_2$ とおき，

$$4{a_2}^2+4{b_2}^2=2^{n-2},\ \ {a_2}^2+{b_2}^2=2^{n-4}$$

この操作をくり返すと考え，n が偶数のときと奇数のときに場合分けをする。

(iii-i) $n=2m\ (m\geqq 1)$ のとき　①より $a^2+b^2=2^{2m}$ なので，

$${a_1}^2+{b_1}^2=2^{2(m-1)},\ {a_2}^2+{b_2}^2=2^{2(m-2)},\ \cdots\cdots,\ {a_m}^2+{b_m}^2=2^{2(m-m)}=1$$

(i)より，$(a_m,\ b_m)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$

よって，$(a,\ b)=(2^m,\ 0),\ (0,\ 2^m)=\left(2^{\frac{n}{2}},\ 0\right),\ \left(0,\ 2^{\frac{n}{2}}\right)$

(iii-ii) $n=2m+1\ (m\geqq 1)$ のとき　①より $a^2+b^2=2^{2m+1}$ なので，

$${a_1}^2+{b_1}^2=2^{2(m-1)+1},\ {a_2}^2+{b_2}^2=2^{2(m-2)+1},\ \cdots\cdots,\ {a_m}^2+{b_m}^2=2^{2(m-m)+1}=2$$

(ii)より，$(a_m,\ b_m)=(1,\ 1)$

よって，$(a,\ b)=(2^m,\ 2^m)=\left(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$

以上まとめると，n が偶数のとき $(a,\ b)=\left(2^{\frac{n}{2}},\ 0\right),\ \left(0,\ 2^{\frac{n}{2}}\right)$，$n$ が奇数のとき $(a,\ b)=\left(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$ である。

［解 説］

京大らしい整数問題です。(2)で，(1)の誘導が役に立ちます。

9 ［2005 東京大］

$a^2-a=a(a-1)$であり，条件より，aは奇数，$a-1$は偶数となる。

ここで，aと$a-1$の公約数をgとし，b, cを正の整数とすると，

$$a=gb\cdots\cdots\cdots①,\ \ a-1=gc\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$g(b-c)=1$

よって，gは1の正の約数から$g=1$となり，aと$a-1$は互いに素である。

さて，$10000=2^4\times5^4$なので，a^2-aが 10000 で割り切れるとき，偶数$a-1$は2^4という約数をもち，kを整数として，

$$a-1=2^4\times k\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$3\leqq a\leqq9999$より，$2\leqq2^4\times k\leqq9998$となり，$1\leqq k\leqq624$である。

よって，kが5^4を約数としてもつことはない。

また，kが約数として，$5^i\ (i=1,\ 2,\ 3)$をもつと仮定すると，aはそれぞれ5^{4-i}という約数をもつことになり，aと$a-1$が互いに素であることに反する。

以上より，lを奇数として，

$$a=5^4\times l\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$5^4\times l-1=2^4\times k$，$625l-16k=1\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤を満たす1つの$(l,\ k)$は，$(l,\ k)=(1,\ 39)$なので，

$$625\times1-16\times39=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$625(l-1)-16(k-39)=0$，$625(l-1)=16(k-39)$

625と16は互いに素なので，nを整数として，

$$l-1=16n,\ \ l=16n+1$$

④から，$a=5^4(16n+1)=625(16n+1)$

そこで，$3\leqq a\leqq9999$より，$0<16n+1<16$となり，$n=0$のみ満たされる。

よって，求めるaは，$a=625$である。

［解 説］

当然ですが，aと$a-1$は互いに素です。この事実とaの範囲に制限があることが，本問を解くうえでのポイントとなっています。

10 ［2006 京都大・理］

(i) $n=2$ のとき

$n^2+2=6$ となり，n^2+2 は素数ではない。

(ii) $n=3$ のとき

$n^2+2=11$ となり，n と n^2+2 はともに素数である。

(iii) $n\geqq 5$ のとき

n は素数なので，2 の倍数でなく，しかも 3 の倍数でもないことより，k を自然数として，$n=6k\pm1$ と表すことができる。このとき，

$$n^2+2=(6k\pm1)^2+2=36k^2\pm12k+3=3(12k^2\pm4k+1)$$

すると，$12k^2\pm4k+1$ は整数なので，n^2+2 は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)～(iii)より，n と n^2+2 がともに素数になるのは，$n=3$ の場合のみである。

［解 説］

まず，$n=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13$ として n^2+2 を計算したところ，n が 5 以上のとき，n^2+2 は 3 の倍数になると推測できました。これを，式を用いて確認した解です。

11 ［2006 東京大・理］

(1) $x^2+y^2+z^2=xyz$ $(1\leqq x\leqq y\leqq z)$ ……①において, $y\leqq 3$ より, $y=1,\ 2,\ 3$

(i) $y=1$ のとき $x=1$ より, $1+1+z^2=z$, $z^2-z+2=0$

$D=1-8=-7<0$ より解なし。

(ii) $y=2$ のとき $x^2+4+z^2=2xz$, $z^2-2xz+x^2+4=0$

$x=1,\ 2$ のいずれの場合も, $D/4=x^2-(x^2+4)=-4<0$ より解なし。

(iii) $y=3$ のとき $x^2+9+z^2=3xz$, $z^2-3xz+x^2+9=0$

このとき, $1\leqq x\leqq 3$ かつ $D=9x^2-4(x^2+9)=5x^2-36\geqq 0$ から, $x=3$ となり,

$$z^2-9z+18=0,\ (z-3)(z-6)=0,\ z=3,\ 6$$

(i)～(iii)より, $(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3)$, $(3,\ 3,\ 6)$

(2) $(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が①を満たすので,

$$a^2+b^2+c^2=abc \quad (1\leqq a\leqq b\leqq c) \text{………②}$$

ここで, $z=-a+bc$ とすると, z は整数で,

$$b^2+c^2+z^2-bcz=b^2+c^2+(-a+bc)^2-bc(-a+bc)$$
$$=a^2+b^2+c^2-abc=0$$

(1)より, $b\geqq 3$ であり,

$$z-c=-a+bc-c=c(b-1)-a\geqq 2c-a=c+(c-a)>0$$

よって, $b^2+c^2+z^2=bcz$ $(1\leqq b\leqq c\leqq z)$ となる整数 z が存在する。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を, 次の漸化式で定義する。

$$a_1=3,\ b_1=3,\ c_1=3$$
$$a_{n+1}=b_n,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=-a_n+b_nc_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

すると, (2)より, すべての自然数 n に対して,

$$a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2=a_nb_nc_n \quad (1\leqq a_n\leqq b_n\leqq c_n)$$

さらに, $c_{n+1}-c_n=-a_n+b_nc_n-c_n\geqq 2c_n-a_n>0$ から, すべての $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ は異なるので, ①を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は, 無数に存在する。

［解 説］

(1)と(2)の誘導によって, (3)の証明がスムーズに行えます。なお, (1)については, 最初, すべての場合をチェックしましたが, 解なしのケースがほとんどなので, 作り直した解です。また, (2)では, z を $z=-a+bc$ として設定していますが, これは②と $b^2+c^2+z^2=bcz$ の両辺の差をとって見つけています。

12 ［2007 京都大］

まず，$a+b+c+d=0$ ……①，$ad-bc+p=0$ ……②より，

$$a(-a-b-c)-bc+p=0,\ a^2+ab+ac+bc=p$$

変形して，$(a+b)(a+c)=p$ ………③

ここで，$a\geqq b\geqq c\geqq d$ ……④より，$a+b\geqq a+c$

①④より，$0=a+b+c+d\leqq a+b+a+b=2(a+b)$ から，$a+b\geqq 0$

よって, p は素数なので，③から，

$$a+b=p\ \cdots\cdots\cdots ⑤,\ a+c=1\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤より $b=p-a$ …… ⑤′，⑥より $c=1-a$ …… ⑥′

①から，$d=-a-(p-a)-(1-a)=-p-1+a$ ………⑦

⑤′ ⑥′ ⑦を④に代入すると，$a\geqq p-a\geqq 1-a\geqq -p-1+a$ となり，

$$a\geqq p-a\ \cdots\cdots\cdots ⑧,\ p-a\geqq 1-a\ \cdots\cdots\cdots ⑨,\ 1-a\geqq -p-1+a\ \cdots\cdots\cdots ⑩$$

⑧より $a\geqq \dfrac{p}{2}$，⑩より $a\leqq \dfrac{p}{2}+1$ となり，$\dfrac{p}{2}\leqq a\leqq \dfrac{p}{2}+1$ ………⑪

また，⑨は $p\geqq 1$ となり成立する。

そこで, p は 3 以上の素数，すなわち奇数であることを用いると，⑪から，

$$a=\frac{p+1}{2}$$

すると，⑤′ ⑥′ ⑦から，

$$b=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2},\ c=1-\frac{p+1}{2}=\frac{-p+1}{2},\ d=-p-1+\frac{p+1}{2}=\frac{-p-1}{2}$$

［解 説］

京大らしい味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが，そのポイントは, 2 以外の素数は奇数という事実です。

$\boxed{13}$ [2007 東京大・理]

まず，$(1+x)^k$ を二項展開すると，

$$(1+x)^k = {}_k\mathrm{C}_0 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k = 1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + x^k$$

また, $m \geqq n$ として，整式 $P(x)$ の次数を m とおき，

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_m x^m$$

これより，$(1+x)^k P(x)$ は, $m+k$ 次の整式となり，

$$(1+x)^k P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_{m+k} x^{m+k}$$

係数を比べると，

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ b_2 = a_2 + a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$b_n = a_n + a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 + \cdots + a_0\,{}_k\mathrm{C}_n \cdots\cdots\cdots(*)$$

ただし, $k < i$ のとき ${}_k\mathrm{C}_i = 0$ とする。

ここで，$(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数 b_0，b_1，b_2，…，b_n がすべて整数であるとき, $(*)$より，

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ a_2 = b_2 - a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$a_n = b_n - a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 - \cdots - a_0\,{}_k\mathrm{C}_n$$

これより，a_0，a_1，a_2，…，a_n はすべて整数となる。

よって，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数である。

［解 説］

上の解では簡単に記していますが，証明の構図は「a_0 が整数→a_1 が整数→a_2 が整数→ … →a_n が整数」です。

14 [2008 千葉大]

(1) x は有理数より, $p(>0)$, q を互いに素な整数として, $x=\dfrac{q}{p}$ とおくことができ,

$$7x^2=\frac{7q^2}{p^2}$$

条件より, $7x^2$ は整数なので, p^2 は $7q^2$ の約数である。

ところが, p と q は互いに素なので, p^2 と q^2 も互いに素であり, p^2 は素数 7 の約数, すなわち $p^2=1$ または $p^2=7$ である。

すると, p は自然数より, $p=1$ となり, つまり x は整数である。

(2) k, l を整数とし, a, b を偶数, 奇数に分けて考える。

(i) $a=2k$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l)^2=4(k^2-7l^2)$$

(ii) $a=2k$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l+1)^2=4(k^2-7l^2-7l-2)+1$$

(iii) $a=2k+1$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l)^2=4(k^2+k-7l^2)+1$$

(iv) $a=2k+1$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l+1)^2=4(k^2+k-7l^2-7l-2)+2$$

(i)～(iv)より, a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数である。

(3) $\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2=\dfrac{r^2-7(2s)^2}{4}$ が整数のとき, $r^2-7(2s)^2$ は 4 の倍数となり, しかも r が整数より, $7(2s)^2$ は整数となる。

すると, s は有理数なので, (1)から, $2s$ は整数である。

そこで, (2)の結果を用いると, r と $2s$ はともに偶数となることより, s は整数である。

［解 説］

(1)と(2)が, (3)の巧みな誘導となっています。演習するに価値ある 1 題です。

15 ［2009 京都大・文］

p を素数, n を正の整数とするとき, $(p^n)!$ は,

$$(p^n)! = 1\times 2\times\cdots\times p\times\cdots\times p^2\times\cdots\times p^3\times\cdots\cdots\times p^n$$

さて, 1 から p^n までの整数で, $p^k\ (1\leqq k\leqq n)$ の倍数は $\dfrac{p^n}{p^k} = p^{n-k}$ 個ある。すなわち, p の倍数は p^{n-1} 個, p^2 の倍数は p^{n-2} 個, …, p^{n-1} の倍数は p 個, p^n の倍数は 1 個となる。

すると, $(p^n)!$ を素因数分解したとき, p の個数は,

$$p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

したがって, $(p^n)!$ は p で $\dfrac{p^n-1}{p-1}$ 回割り切れる。

［解 説］

$p=3$, $n=4$ の場合を具体的に考え, 実験をしました。その結果を一般化したのが, 上の解です。

16 [2009 神戸大・理]

(1) $t\geqq 1$ のとき, $0<a_n<a_{n+1}$ $(n\geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1,\ 2$ のとき

条件より, $a_1=1$, $a_2=2t\geqq 2$ なので, $0<a_1<a_2$ が成り立つ。

(ii) $n=k,\ k+1$ のとき

$0<a_k<a_{k+1}$ の成立を仮定すると, 条件より,

$$a_{k+2}-a_{k+1}=(2t-1)a_{k+1}-a_k\geqq a_{k+1}-a_k>0$$

よって, $0<a_{k+1}<a_{k+2}$ が成り立つ。

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $t\geqq 1$ のとき, $0<a_n<a_{n+1}$ が成り立つ。

(2) $t\leqq -1$ のとき, $0<|a_n|<|a_{n+1}|$ $(n\geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1,\ 2$ のとき

条件より, $|a_1|=1$, $|a_2|=2|t|\geqq 2$ なので, $0<|a_1|<|a_2|$ が成り立つ。

(ii) $n=k,\ k+1$ のとき

$0<|a_k|<|a_{k+1}|$ の成立を仮定すると, 条件より,

$$|a_{k+2}|=|2ta_{k+1}-a_k|\geqq|2ta_{k+1}|-|a_k|=2|t||a_{k+1}|-|a_k|$$

すると, $|a_{k+2}|-|a_{k+1}|\geqq(2|t|-1)|a_{k+1}|-|a_k|\geqq|a_{k+1}|-|a_k|>0$

よって, $0<|a_{k+1}|<|a_{k+2}|$ が成り立つ。

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $t\leqq -1$ のとき, $0<|a_n|<|a_{n+1}|$ が成り立つ。

(3) $-1<t<1$ のとき, $t=\cos\theta$ となる θ を用いて, $a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ $(n\geqq 1)$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$a_1=1=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta}$, $a_2=2t=2\cos\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$ となり, 成立する。

(ii) $n=k,\ k+1$ のとき

$a_k=\dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$, $a_{k+1}=\dfrac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ であると仮定すると, 条件より,

$$a_{k+2}=2t\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}=\frac{2\sin(k+1)\theta\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin(k+2)\theta+\sin k\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}$$

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $-1<t<1$ $(t=\cos\theta)$ のとき, $a_n=\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ が成り立つ。

［解 説］

3 題とも数学的帰納法でクリアーに示せます。なお, (1)を参考にして(2)では三角不等式を用いましたが, 漸化式では, 1999 年に東大・理で利用して以来, 久々です。

17 [2010 広島大・理]

(1) 条件より, k, l を 0 以上の整数として, $x=4k+1$, $y=4l+1$ と表すと,

$$xy=(4k+1)(4l+1)=4(4kl+k+l)+1$$

よって, 積 xy は 4 で割ると 1 余り, 集合 A に属する。

(2) 条件より, $m=2k$ とおくと, $k\geqq 1$ のとき, 二項定理より,

$$3^m=3^{2k}=9^k=(8+1)^k=8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8+1$$

$8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8$ は 4 の倍数より, 3^m は 4 で割ると 1 余る。

なお, $m=0$ のときは $3^m=1$ から, このときも 4 で割ると 1 余る。

以上より, 3^m は A に属する。

(3) まず, (2)と同様に考え, $m+n$ が偶数の場合は, M, N を整数として,

(i) $m=2k$, $n=2l$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k}7^{2l}=9^k49^l=(8+1)^k(48+1)^l=(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から, 3^m7^n は A に属する。

(ii) $m=2k+1$, $n=2l+1$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k+1}7^{2l+1}=3(4M+1)\cdot 7(4N+1)=(20+1)(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から, 3^m7^n は A に属する。

次に, $m+n$ が奇数の場合は,

(iii) $m=2k$, $n=2l+1$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k}7^{2l+1}=(4M+1)\cdot 7(4N+1)=(4+3)(16MN+4M+4N+1)$$

すると, 3^m7^n は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(iv) $m=2k+1$, $n=2l$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k+1}7^{2l}=3(4M+1)(4N+1)=3(16MN+4M+4N+1)$$

すると, 3^m7^n は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(4) $3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数は, $0\leqq k\leqq 2m+1$, $0\leqq l\leqq 2n+1$ として 3^k7^l と表せ, この中で A に属する数は, (3)の結果から $k+l$ が偶数の場合である。この数全体の和を S とすると,

$$S=(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})+(3+3^3+\cdots+3^{2m+1})(7+7^3+\cdots+7^{2n+1})$$
$$=(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})+21(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})$$
$$=22\cdot\frac{9^{m+1}-1}{9-1}\cdot\frac{49^{n+1}-1}{49-1}=\frac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)$$

［解 説］

整数についての問題で, (1)と(2)が(3)の, そして(3)が(4)の誘導になっています。

18 ［2011 名古屋大・理］

(1) まず，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ ……①，$y^2+by+a=0$ ……②が，それぞれ整数解をもつとき, a, b が整数より，①と②の 2 つの解はともに整数である。

さて，$a=b>0$ とするとき，②は①に一致し，整数 k, l $(k\leqq l)$ を用いて，①は,

$$(x+k)(x+l)=0,\ x^2+(k+l)x+kl=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③の係数を比べると，$k+l=a$ ……④，$kl=a$ ……⑤となり，④⑤より,

$$kl=k+l,\ (k-1)(l-1)=1\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，④⑤から $a>0$ に注意すると, k, l は自然数となり, $1\leqq k\leqq l$ である。

すると，⑥より，$(k-1,\ l-1)=(1,\ 1)$，$(k,\ l)=(2,\ 2)$

よって，$a=4$ である。

(2) $a>b>0$ とするとき, (1)と同様に，整数 k, l $(k\leqq l)$ を用いて，①は,

$$(x+k)(x+l)=0,\ x^2+(k+l)x+kl=0$$

よって，$k+l=a$ ……⑦，$kl=b$ ……⑧となり，$a>b$ と⑦⑧から,

$$kl<k+l,\ (k-1)(l-1)<1\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

一方，$a>0$，$b>0$ から k, l は自然数となり, $1\leqq k\leqq l$ であることから,

$$(k-1)(l-1)\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

⑨⑩より，$(k-1)(l-1)=0$ となり，$k=1$ である。

すると，⑦から $a=l+1$，⑧から $b=l$ となり, 2 次方程式②は,

$$y^2+ly+(l+1)=0\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで, (1)と同様にして，整数 m, n $(m\leqq n)$ を用いて，⑪は,

$$(y+m)(y+n)=0,\ y^2+(m+n)x+mn=0\ \cdots\cdots\cdots⑫$$

⑪⑫の係数を比べると，$m+n=l$ ……⑬，$mn=l+1$ ……⑭となり，⑬⑭より,

$$mn=m+n+1,\ (m-1)(n-1)=2\ \cdots\cdots\cdots⑮$$

ここで，⑬⑭から $l>0$ に注意すると, m, n は自然数となり, $1\leqq m\leqq n$ である。

すると，⑮より，$(m-1,\ n-1)=(1,\ 2)$，$(m,\ n)=(2,\ 3)$

よって，$l=5$ から，$a=6$，$b=5$ である。

［解 説］

2 つの自然数の和と積の大小関係を，和と積が等しいのは $2+2=2\times 2$，和が積より大きいのは $1+*>1\times *$ というイメージを用いて解いています。他の解法もいろいろ考えられそうな, 演習に価値ある整数問題です。

19 ［2012 千葉大・医］

(1) まず，$a_n = p + qn + rn^2$ に対し，数列$\{a_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$a_1 = p + q + r$ が整数であり，しかも $a_{n+1} - a_n$ が整数であることより，

$$a_{n+1} - a_n = \{p + q(n+1) + r(n+1)^2\} - (p + qn + rn^2) = (q + r) + 2rn$$

これより，数列$\{a_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$p + q + r$ と $q + r$ と $2r$ が整数，すなわち p と $q + r$ と $2r$ が整数となることである。

よって，数列$\{a_n\}$が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2) $b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$ に対し，数列$\{b_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$b_1 = p + q + r + s$ が整数であり，しかも $b_{n+1} - b_n$ が整数である。

ここで，$c_n = b_{n+1} - b_n$ とおくと，

$$c_n = \{p + q(n+1) + r(n+1)^2 + s(n+1)^3\} - (p + qn + rn^2 + sn^3)$$
$$= (q + r + s) + (2r + 3s)n + 3sn^2$$

(1)の結果を利用すると，数列$\{c_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$q + r + s$ と $2r + 3s + 3s = 2r + 6s$ と $2\cdot 3s = 6s$ が整数となることである。

よって，数列$\{b_n\}$が整数列となる必要十分条件は，$p + q + r + s$ と $q + r + s$ と $2r + 6s$ と $6s$ が整数，すなわち p と $q + r + s$ と $2r$ と $6s$ が整数となることである。

［解 説］

整数と整式の有名問題ですが，次数下げの方法を知らないとかなり面倒です。(1)は(2)での利用を考えて必要十分条件を求めています。

20　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2013 大阪大・理］

まず，正の整数 n を 3 で割った余りと，n^3，n^5，n^7 をそれぞれ 3 で割った余りは等しくなる。

そこで，n を 3 で割った余りと，$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 をそれぞれ 3 で割った余りを表にまとめると，右のようになる。

n	0	1	2
$n+1$	1	2	0
n^3+3	0	1	2
n^5+5	2	0	1
n^7+7	1	2	0

(i)　n を 3 で割った余りが 0 のとき

n^3+3 は 3 の倍数となり，$n^3+3\geqq 30$ なので，n^3+3 は素数ではない。

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 のとき

n^5+5 は 3 の倍数となり，$n^5+5\geqq 6$ なので，n^5+5 は素数ではない。

(iii)　n を 3 で割った余りが 2 のとき

n^7+7 は 3 の倍数となり，$n^7+7\geqq 135$ なので，n^7+7 は素数ではない。

(i)～(iii)より，4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。

［解 説］

n を偶数として，$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 を計算していくと，素数でないのは 3 の倍数という共通項が見つかります。すると，行うべきことは明白です。なお，$n+1$ については，結果として，必要ありませんでした。

21 [2013 京都大・文]

(1) 整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った商を $q(x)$，余りを $ax+b$ とするとき，

$$x^n=(x-k)(x-k-1)q(x)+ax+b\cdots\cdots\cdots①$$

①に $x=k,\ k+1$ をそれぞれ代入すると，

$$k^n=ak+b\cdots\cdots\cdots②,\ (k+1)^n=ak+a+b\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$a=(k+1)^n-k^n$ となり，n と k は自然数なので，a は整数である。

すると，②は，$b=k^n-ak$ なので，b も整数である。

(2) a と b がともに素数 p で割り切れるとすると，a_0，b_0 を整数として，

$$a=a_0p,\ b=b_0p$$

②③に代入すると，

$$k^n=a_0pk+b_0p\cdots\cdots\cdots④,\ (k+1)^n=a_0pk+a_0p+b_0p\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，k^n は p を約数にもつ，すなわち k は p を約数にもつ。

⑤より，$(k+1)^n$ は p を約数にもつ，すなわち $k+1$ は p を約数にもつ。

すると，k と $k+1$ はともに素数 p を約数にもつことになるが，これは k と $k+1$ が互いに素であることと矛盾する。

よって，a と b をともに割り切る素数は存在しない。

［解 説］

$(k+1)-k=1$ から，k と $k+1$ は互いに素です。昨年，東大・理系でも，この点に着目する問題が出されています。

22 ［2013 京都大・理］

整式x^nを整式x^2-2x-1で割った商を$q_n(x)$，余りをa_nx+b_nとすると，

$$x^n=(x^2-2x-1)q_n(x)+a_nx+b_n\cdots\cdots\cdots①$$

このとき，a_nとb_nは整数であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$のとき $a_1=1$，$b_1=0$でともに整数である。

(ii) $n=k$のとき a_kとb_kがともに整数であると仮定し，①より，

$$x^k=(x^2-2x-1)q_k(x)+a_kx+b_k$$

$$\begin{aligned}x^{k+1}&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_kx^2+b_kx\\&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_k(x^2-2x-1)+a_k(2x+1)+b_kx\\&=(x^2-2x-1)\{xq_k(x)+a_k\}+(2a_k+b_k)x+a_k\end{aligned}$$

整式x^{k+1}を整式x^2-2x-1で割った余りは$a_{k+1}x+b_{k+1}$より，

$$a_{k+1}=2a_k+b_k\cdots\cdots\cdots②,\ \ b_{k+1}=a_k\cdots\cdots\cdots③$$

これより，a_{k+1}，b_{k+1}はともに整数である。

(i)(ii)より，a_nとb_nは整数である。

次に，a_nとb_nをともに割り切る素数は存在しないことを証明する。

(i) $n=1$のとき $a_1=1$，$b_1=0$で，ともに割り切る素数は存在しない。

(ii) $n=k$のとき a_kとb_kをともに割り切る素数は存在しないと仮定する。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1}がともに素数pで割り切れるとすると，②③より，

$$a_k=b_{k+1},\ \ b_k=a_{k+1}-2a_k=a_{k+1}-2b_{k+1}$$

これより，a_k，b_kも素数pで割り切れ，仮定に反する。

よって，a_{k+1}とb_{k+1}をともに割り切る素数は存在しない。

(i)(ii)より，a_nとb_nをともに割り切る素数は存在しない。

以上より，整式x^nを整式x^2-2x-1で割った余りを$ax+b$とするとき，aとbは整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しない。

［解 説］

見かけは，本年の文系の類題ですが，内容的には 2002 年の東大の文理共通の 2 番の類題です。誘導はありましたが……。

23 ［2014 九州大］

(1) まず，自然数 a に対し，a が 3 の倍数のとき a^2 も 3 の倍数である。

また，a が 3 の倍数でないとき，$a=3k\pm1$（k は整数）とおくと，

$$a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

すると，a^2 を 3 で割った余りは 1 となる。

よって，a と a^2 について 3 で割った余りを対応させると，右表のようになり，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

a	0	1	2
a^2	0	1	1

(2) a^2，b^2 に対し，a^2+b^2 を 3 で割った余りをまとめると，右表のようになる。

a^2 ＼ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

さて，$a^2+b^2=3c^2$ のとき，$3c^2$ が 3 の倍数より，a^2+b^2 も 3 の倍数である。すると，a^2，b^2 はともに 3 の倍数となり，さらに(1)より，a, b はともに 3 の倍数である。

よって，a_1，b_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$ とおくと，

$$9{a_1}^2+9{b_1}^2=3c^2,\ 3{a_1}^2+3{b_1}^2=c^2$$

これより，c^2 は 3 の倍数となり，(1)より，c は 3 の倍数である。

以上より，$a^2+b^2=3c^2$ のとき a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c が存在すると仮定したとき，(2)より，a_1，b_1，c_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$，$c=3c_1$ とおくと，

$$9{a_1}^2+9{b_1}^2=3\cdot9{c_1}^2,\ {a_1}^2+{b_1}^2=3{c_1}^2$$

すると，(2)から，a_2，b_2，c_2 を自然数として，$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ とおくことができ，

$$9{a_2}^2+9{b_2}^2=3\cdot9{c_2}^2,\ {a_2}^2+{b_2}^2=3{c_2}^2$$

以下，同様に，$a_n=3a_{n+1}$，$b_n=3b_{n+1}$，$c_n=3c_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと，

$$a>a_1>a_2>\cdots>0,\ b>b_1>b_2>\cdots>0,\ c>c_1>c_2>\cdots>0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，単調に減少する自然数の列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在することになり，明らかに不適である。

よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しない。

［解 説］

ときどき見かける整数問題です。(1)と(2)は，メインの(3)の誘導となっています。要演習の 1 題です。

24　　[2014 一橋大]

素数 a, b, c に対して，条件より，p, q を素数とすると，

$$a-b-8=p\cdots\cdots\cdots①,\ \ b-c-8=q\cdots\cdots\cdots②$$

①より $a-b=p+8>0$，②より $b-c=q+8>0$ となり，$a>b>c$ である。

(i)　$c\neq 2$ のとき

素数 a, b, c はすべて奇数となるので，①②より素数 p, q はともに偶数，すなわち $p=q=2$ である。すると，①②より，

$$a-b=10\cdots\cdots\cdots③,\ \ b-c=10\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a=c+20=c+3\times6+2$，$b=c+10=c+3\times3+1$ となり，すなわち a, b, c を 3 で割った余りはすべて異なり，素数 a, b, c のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$c=3$，$b=13$，$a=23$

(ii)　$c=2$ のとき

素数 $a,\ b$ はともに奇数となるので，①より素数 p は偶数，すなわち $p=2$ である。また，②より素数 q は奇数である。すると，①②より，

$$a-b=10\cdots\cdots\cdots⑤,\ \ b-10=q\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$a=q+20$，$b=q+10$ となり，$a>b>q$ である。そして，(i)と同様にすると，素数 a, b, q のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$q=3$，$b=13$，$a=23$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 3)$，$(23,\ 13,\ 2)$

[解　説]

整数問題でよく利用される「素数で偶数なのは 2 だけ」ということが，最初のポイントです。なお，解答例では省きましたが，③④を導いたあと実験をして，3 で割った余りに着目をしました。

$\boxed{25}$ ［2014 東京大・理］

(1) b_n は a_n を素数 p で割った余りなので，商を q_n とすると $a_n = p\cdot q_n + b_n$ となり，

$$a_{n+1}(a_n+1) = (p\cdot q_{n+1} + b_{n+1})(p\cdot q_n + b_n + 1)$$
$$= p(p\cdot q_n q_{n+1} + q_{n+1}b_n + q_{n+1} + q_n b_{n+1}) + b_{n+1}(b_n+1)$$

すると，条件から，$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)$ なので，a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

(2) $r=2$，$p=17$ のとき，$a_1 = r = 2$ より $b_1 = 2$，$a_2 = r+1 = 3$ より $b_2 = 3$

以下，(1)の結論から，b_3 は $b_2(b_1+1) = 9$ を 17 で割った余りより $b_3 = 9$ である。

b_4 は $b_3(b_2+1) = 36$ を 17 で割った余りより $b_4 = 2$ である。

b_5 は $b_4(b_3+1) = 20$ を 17 で割った余りより $b_5 = 3$ である。

すると，$b_4 = b_1$，$b_5 = b_2$ から，帰納的に，$b_6 = b_3 = 9$，$b_7 = b_4 = 2$，$b_8 = b_5 = 3$，$b_9 = b_6 = 9$，$b_{10} = b_7 = 2$ となる。

(3) まず，$b_{n+2} = b_{m+2}$ より，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りは，$b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りに等しい。すなわち，k を整数として，

$$b_{n+1}(b_n+1) - b_{m+1}(b_m+1) = pk$$

ここで，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$ より，$b_{n+1}(b_n+1) - b_{n+1}(b_m+1) = pk$

$$b_{n+1}(b_n - b_m) = pk$$

$0 < b_{n+1} < p$ より，b_{n+1} は p の倍数でないので，$b_n - b_m$ が p の倍数となる。

すると，$0 \leqq b_n < p$，$0 \leqq b_m < p$ から，$-p < b_n - b_m < p$ となり，$b_n - b_m = 0$ である。すなわち，$b_n = b_m$ が成り立つ。

(4) a_2，a_3，a_4，…は，すべて p で割り切れないことより，

$$1 \leqq b_2 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_3 \leqq p-1,\ 1 \leqq b_4 \leqq p-1,\ \cdots\cdots$$

すると，2 つの相異なる 2 以上の自然数 k，l に対して，$(b_k,\ b_l)$ の組の数は高々 $(p-1)^2$ 通りにすぎないので，これより，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$，$b_{n+2} = b_{m+2} > 0$ を満たす自然数 n, $m\ (n < m)$ が存在することになる。

(3)の結論を用いると $b_n = b_m > 0$ となり，帰納的に $b_1 = b_{m-n+1} > 0$，すなわち a_1 も p で割り切れない。

［解 説］

漸化式と整数の融合問題で，周期数列が現れます。(1)が後続の設問への誘導として利いています。なお，(3)までの文理共通題に，(4)として，鳩の巣原理を利用する設問が追加されています。

26 ［2015 千葉大・文］

(1) k を自然数, l, N を 0 以上の整数とするとき,

(i) $k=3l+1$ のとき $2^k=2^{3l+1}=2\cdot 8^l=2(7+1)^l=2(7N+1)=7\cdot 2N+2$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 2 である。

(ii) $k=3l+2$ のとき $2^k=2^{3l+2}=4\cdot 8^l=4(7+1)^l=4(7N+1)=7\cdot 4N+4$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 4 である。

(iii) $k=3l+3$ のとき $2^k=2^{3l+3}=8\cdot 8^l=8(7+1)^l=8(7N+1)=7(8N+1)+1$

これより, 2^k を 7 で割った余りは 1 である。

(i)～(iii)より, 2^k を 7 で割った余りが 4 のとき, k を 3 で割った余りは 2 である。

(2) m, n を自然数で, $4m+5n$ が 3 で割り切れるとき,

$$4m+5n=3(m+2n)+(m-n)$$

これより, $m-n$ は 3 で割り切れる, すなわち m を 3 で割った余りと n を 3 で割った余りは等しくなる。そこで, m', n' を 0 以上の整数として,

(i) m, n を 3 で割った余りが 1 のとき $m=3m'+1$, $n=3n'+1$

$$mn=(3m'+1)(3n'+1)=3(3m'n'+m'+n')+1$$

これより, mn を 3 で割った余りは 1 である。

(ii) m, n を 3 で割った余りが 2 のとき $m=3m'+2$, $n=3n'+2$

$$mn=(3m'+2)(3n'+2)=3(3m'n'+2m'+2n'+1)+1$$

これより, mn を 3 で割った余りは 1 である。

(iii) m, n を 3 で割った余りが 0 のとき $m=3m'+3$, $n=3n'+3$

$$mn=(3m'+3)(3n'+3)=3(3m'n'+3m'+3n'+3)$$

これより, mn を 3 で割った余りは 0 である。

(i)～(iii)より, mn を 3 で割った余りは 0 または 1 であり, 2 ではない。

したがって, (1)より, 2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではない。

［解 説］

テーマは整数の余りによる分類です。(2)の最後の行は, (1)で証明した命題の対偶を利用しています。なお, 合同式を用いて記述しても構いません。

27 ［2015 九州大・理］

(1) n が正の偶数のとき，l を自然数として，$n=2l$ とおくと，

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{2l}-1=4^l-1=(3+1)^l-1\\&=(3^l+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-2}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1}3+1)-1\\&=3(3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-2}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-3}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1})\end{aligned}$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である。

(2) n を自然数とするとき，2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数を g とおくと，

$2^n+1=ga$ ……①，$2^n-1=gb$ ……②（a と b は互いに素）

①－②より，$2=g(a-b)$ となり，$g=2$ または $g=1$ である。

$g=2$ のとき，①は $2^n+1=2a$ となり，左辺は奇数，右辺は偶数で成立しない。

よって，$g=1$ から，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である。

(3) 異なる素数 p, q に対して，$2^{p-1}-1=pq^2$ ………③

(i) p が偶数のとき

p は素数より $p=2$，すると，③から $2^1-1=2q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii) p が奇数のとき

$p-1$ は偶数となり，(1)の結果から $2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である。すると，③から pq^2 は 3 の倍数となり，$p=3$ または $q=3$ である。

(ii-i) $p=3$ のとき

③は $2^2-1=3q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii-ii) $q=3$ のとき

③は $2^{p-1}-1=9p$ ……④となり，k を自然数として，$p=2k+1$ とおくと，

$$2^{p-1}-1=2^{2k}-1=(2^k+1)(2^k-1)$$

(2)から 2^k+1 と 2^k-1 は互いに素で，④は $(2^k+1)(2^k-1)=9(2k+1)$ となり，

$$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)\text{ または }(2k+1,\ 9)$$

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)$ のとき，$k=3$ すなわち $p=7$ となる。

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(2k+1,\ 9)$ のとき，満たす k は存在しない。

(i)(ii)より，③を満たす p, q の組は，$(p,\ q)=(7,\ 3)$ のみである。

［解 説］

誘導つきの整数問題です。なお，④を満たす p を求めるために，(2)の結論を利用する方法で記しましたが，グラフをイメージして，直接的に解いても構いません。

28 [2015 京都大・理]

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数とするとき，$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ に対して，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$，余りを r とおくと，$p,\ q,\ r$ は実数となり，

$$f(x)=g(x)(px+q)+r\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，①から $h(x)=px+q+\dfrac{r}{g(x)}=px+q+\dfrac{r}{dx+e}$

ここで, n を 2 以上の整数とすると，条件より，$h(n-1)$，$h(n)$，$h(n+1)$ はすべて整数なので，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ の値も整数となり，

$$\begin{aligned}&h(n-1)+h(n+1)-2h(n)\\&=pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}+pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}-2\left(pn+q+\frac{r}{dn+e}\right)\\&=\frac{r}{dn-d+e}+\frac{r}{dn+d+e}-\frac{2r}{dn+e}\\&=\frac{2d^2r}{(dn-d+e)(dn+d+e)(dn+e)}\ \cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$

すると，十分に大きい n に対しても②が整数となることより，$r=0$ である。

よって，①から，$f(x)=g(x)(px+q)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

［解 説］

結論の $r=0$ を示すために，$h(n)$ の等差数列部分である $pn+q$ を消すことを考え，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ を計算しています。そして，得られた式が②というわけです。階差を 2 回とったと考えてもよいですが……。なお，既視感があったので，過去問を調べたところ，1991 年の後期に類題が出ていました。

29　［2015 東北大・文］

(1)　条件より，$a_n{}^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}{}^2=3(a_n+a_{n+1})$ ……①なので，

$$a_{n+1}{}^2-2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}{}^2=3(a_{n+1}+a_{n+2})\ \cdots\cdots\text{②}$$

②－①より，$a_{n+2}{}^2-a_n{}^2-2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3(a_{n+2}-a_n)$

ここで，$a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ から，$a_{n+2}-a_n>0$ となり，

$$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=3,\quad a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}+3\ \cdots\cdots\text{③}$$

(2)　③より，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=3$ となり，$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=3$ ……④

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，④より，$b_{n+1}-b_n=3$ となり，

$$b_n=b_1+3(n-1)\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

さて，①より，$a_1{}^2-2a_1a_2+a_2{}^2=3(a_1+a_2)$ となり，$a_1=3$ から，

$$9-6a_2+a_2{}^2=3(3+a_2),\quad a_2{}^2-9a_2=0$$

すると，$a_2>a_1=3$ から $a_2=9$ となり，$b_1=a_2-a_1=6$

よって，⑤から，$b_n=6+3(n-1)=3(n+1)$

(3)　(2)より，$n\geqq 2$ において，

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3(k+1)=3+3\cdot\frac{2+n}{2}(n-1)=3+\frac{3}{2}(n^2+n-2)=\frac{3}{2}n(n+1)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

［解 説］

誘導つきの漸化式の問題です。(1)の結果が(2)へとつながり，さらに(3)へとスムーズに解いていくことができます。

30 [2015 広島大・文]

(1) $r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})=\log_2\sqrt{n}(n+1)$ より，$r_{n+1}=\log_2\sqrt{n+1}(n+2)$ となり，

$$r_{n+1}-r_n=\log_2\frac{\sqrt{n+1}(n+2)}{\sqrt{n}(n+1)}=\log_2\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

よって，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}=2^{r_{n+1}-r_n}$ ………①

(2) ①より，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=2^{r_{n+1}-r_n}$ となり，$c_{n+1}=2^{r_{n+1}-r_n}c_n$

ここで，$f(n)=2^{r_{n+1}-r_n}$ とおくと，$c_{n+1}=f(n)c_n$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$c_n=c_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)=c_1\cdot 2^{r_2-r_1}\cdot 2^{r_3-r_2}\cdot\cdots\cdot 2^{r_n-r_{n-1}}=c_1\cdot 2^{r_n-r_1}$$
$$=c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-\log_2 2}=c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-1}\ \text{………②}$$

さて，$x^2-p_nx+q_n=0$ の実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とすると，

$$\alpha_n=\frac{p_n-\sqrt{{p_n}^2-4q_n}}{2},\ \ \beta_n=\frac{p_n+\sqrt{{p_n}^2-4q_n}}{2}$$

すると，$c_n=\beta_n-\alpha_n=\sqrt{{p_n}^2-4q_n}$ となり，$c_1=\sqrt{{p_1}^2-4q_1}=\sqrt{4}=2$

よって，②より，$c_n=2\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-1}=2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)}=\sqrt{n}(n+1)$ ………③

なお, ③は $n=1$ のときも成立している。

(3) ③より，$\sqrt{{p_n}^2-4q_n}=\sqrt{n}(n+1)$ となり，${p_n}^2-4q_n=n(n+1)^2$ ………④

そこで，$p_n=n\sqrt{n}$ のとき，${p_n}^2=n^3$ となり，④より，

$$q_n=\frac{1}{4}\{n^3-n(n+1)^2\}=-\frac{1}{4}n(2n+1)$$

［解 説］

2 次方程式の解を題材とした，誘導つきの漸化式の問題です。(2)の漸化式 $c_{n+1}=f(n)c_n$ を解くことがポイントとなっています。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

31 [2015 千葉大・理]

(1) $b^2+4c>0$のとき，$x^2-bx-c=0$の実数解α，βについて，

$$\alpha+\beta=b\,,\ \alpha\beta=-c\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ ……②から，①と合わせて，

$$ba_{n+1}+ca_n=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$
$$=\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1}-(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$$

よって，$a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ ……③が成立する。

(2) a_nがすべて整数のとき，①②から，$a_1=\alpha^0+\beta^0=2$，$a_2=\alpha^1+\beta^1=b$

これよりbは整数となり，③から，$a_3=ba_2+ca_1$，$a_4=ba_3+ca_2$となり，

$$2c=a_3-ba_2\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ bc=a_4-ba_3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，①②から$a_3=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=b^2+2c$となり，③から，

$$a_5=ba_4+ca_3\,,\ (b^2+2c)c=a_5-ba_4\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤⑥より，$2c$，bc，$(b^2+2c)c$はすべて整数である。

さて，$2c$が整数より，kを整数として$c=\dfrac{k}{2}$とおくことができる。

ここで，kが奇数と仮定すると，$bc=\dfrac{bk}{2}$が整数よりbは偶数となる。

ところが，$(b^2+2c)c=\dfrac{(b^2+k)k}{2}$は，分子$(b^2+k)k$が奇数より，整数ではない。

したがって，kは奇数ではなく偶数となり，cも整数である。

逆に，b, cがともに整数であるとき，$a_1=2$，$a_2=b$はともに整数であり，③から，帰納的にa_n $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$はすべて整数となる。

以上より，a_nがすべて整数であるための必要十分条件は，b，cがともに整数であることである。

［解 説］

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2)の設問は，見かけよりは難しめで，詰めに時間がかかりました。

32 [2015 東京大・理]

(1) $p_1=1$，$p_2=2$，$p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ に対して，$a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおくと，

$$a_{n+1}=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}}+\frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}+\frac{1}{p_{n+2}p_{n+1}}$$
$$=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+1}p_n}+\frac{p_{n+1}p_n}{{p_{n+1}}^2+1}+\frac{p_n}{p_{n+1}({p_{n+1}}^2+1)}$$
$$=\frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+{p_{n+1}}^2{p_n}^2+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n({p_{n+1}}^2+1)}=\frac{({p_{n+1}}^2+1)+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=a_n$$

これより，$a_n=a_1=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot 1}=3$ となり，$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$ ………①

(2) すべての自然数 n に対し，$0<p_n<p_{n+1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$p_1=1$，$p_2=2$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき　$0<p_k<p_{k+1}$ すなわち $\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ と仮定すると，

条件式より，$p_{k+2}=\dfrac{{p_{k+1}}^2+1}{p_k}>\dfrac{{p_{k+1}}^2}{p_k}$ から，$\dfrac{p_{k+2}}{p_{k+1}}>\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$ となる。

(i)(ii)より，$0<p_n<p_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

さて，①より，${p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1=3p_{n+1}p_n$ ………②

${p_n}^2+{p_{n-1}}^2+1=3p_np_{n-1}$ $(n\geqq 2)$ ………③

②－③より，${p_{n+1}}^2-{p_{n-1}}^2=3p_n(p_{n+1}-p_{n-1})$

すると，$p_{n-1}<p_n<p_{n+1}$ より，$p_{n+1}-p_{n-1}>0$ なので，

$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

(3) (2)より，$p_1=1$，$p_2=2$，$p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ここで，$q_1=1$，$q_2=1$，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる q_n に対して，$p_n=q_{2n-1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1,\ 2$ のとき　$p_1=q_1$，$q_3=q_2+q_1=2$ から $p_2=q_3$ となり成立する。

(ii) $n=k,\ k+1$ のとき　$p_k=q_{2k-1}$，$p_{k+1}=q_{2k+1}$ と仮定する。

このとき，$p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$ となり，

$$q_{2k+3}=q_{2k+2}+q_{2k+1}=q_{2k+1}+q_{2k}+q_{2k+1}=2q_{2k+1}+q_{2k}$$
$$=2q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$$

(i)(ii)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ。

［解 説］

複雑な漸化式ですが，誘導に従うと道筋が見えてくるタイプです。

$\boxed{33}$ ［2016 北海道大・文］

(1) 自然数xに対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}$が自然数であるためには，$\dfrac{3x}{x^2+2}\geqq 1$が必要である。

$$3x\geqq x^2+2,\ x^2-3x+2\leqq 0,\ (x-1)(x-2)\leqq 0$$

よって，$1\leqq x\leqq 2$となり，$x=1$または$x=2$である。

(i) $x=1$のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{3}{1+2}=1$となり適する。

(ii) $x=2$のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{6}{4+2}=1$となり適する。

(i)(ii)より，求めるxは，$x=1,\ 2$である。

(2) 自然数x, yに対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$が自然数である条件は，

(i) $y=1$のとき

$\dfrac{1}{y}=1$から$\dfrac{3x}{x^2+2}$が自然数となることより，(1)の結果から$x=1,\ 2$

(ii) $y\geqq 2$のとき

$0<\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{2}$となり，(i)より$x\neq 1$，$x\neq 2$なので，$x\geqq 3$である。

すると，(1)の結果から$0<\dfrac{3x}{x^2+2}<1$となり，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{3}{2}$から，

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，$\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2}$，$y=\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}$

ここで，$y\geqq 2$から$\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}\geqq 2$となり，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$より，

$$x^2+2\geqq 2(x^2-3x+2),\ x^2-6x+2\leqq 0$$

よって，$3-\sqrt{7}\leqq x\leqq 3+\sqrt{7}$となり，$x=3$または$x=4$または$x=5$

(ii-i) $x=3$のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{9}{11}$となり，$(*)$より$\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{11}$であるので不適。

(ii-ii) $x=4$のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$となり，$(*)$より$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$であるので$y=3$。

(ii-iii) $x=5$のとき $\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$となり，$(*)$より$\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{9}$であるので不適。

(i)(ii)より，求める$(x,\ y)$は，$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(4,\ 3)$である。

［解 説］

値を絞り込むタイプの整数問題です。一見，難問そうに見える(2)では，(1)での考察がたいへん役立っています。なお，記述は省きましたが，方針を立てるとき，xに具体的な数値を入れて計算をしています。

34 ［2016 大阪大・文］

(1) 実数 a, k が $a>0$, $k\geqq 1$ のとき, 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ ……①に対して, $f(x)=x^2-kax+a-k$ とおくと,

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+k+a-k=\frac{1}{a^2}+a>0$$

$$f(1)=1-ka+a-k=(a+1)(1-k)\leqq 0$$

これより, ①は $-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たす実数解 s をもつ。

(2) 整数 a, n, k は, $a\geqq 3$, $n\geqq 2$, $k\geqq 1$ を満たすとする。

ここで, n^2+a は $an+1$ で割り切れることから, $n^2+a=k(an+1)$ と表せ,

$$n^2-kan+a-k=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

すると, ②は $f(n)=0$ であり, さらに(1)から $-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ なので, ①は異なる実数解 s, n $(s<n)$ をもつことになる。

さて, ①について, 解と係数の関係から $s+n=ka$ となり, $s=ka-n$ ………③

a, n, k は整数なので, ③から s も整数となる。さらに, $a\geqq 3$ から $-\frac{1}{3}\leqq -\frac{1}{a}<0$ となり, $-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ から $s=0$, 1 である。

(i) $s=0$ のとき　$f(0)=a-k=0$ から $k=a$ となり, ③から $n=a^2$

そして, $a^2\geqq 9$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(ii) $s=1$ のとき　$f(1)=(a+1)(1-k)=0$ から $k=1$ となり, ③から $n=a-1$

そして, $a-1\geqq 2$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(i)(ii)より, $n=a^2$, $a-1$ である。

［解 説］

一見, 無関係に思える 2 つの小問です。しかし, (2)を解いていくと, この整数問題への誘導として, (1)の 2 次方程式の解の配置についての設問がある, というのに気づきます。

$\boxed{35}$ ［2016 神戸大・理］

(1) (i) $a=18=2\times3^2$ と $b=30=2\times3\times5$ の公約数の集合 S は,

$S=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$

また, $b=30=2\times3\times5$ と $c=-42=-2\times3\times7$ の公約数の集合 T は,

$T=\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\}$

(ii) a, b, c, p は 0 でない任意の整数, そして a と b の最大公約数を M, b と c の最大公約数を N とし, $a=pb+c$ ……①を満たしている。

まず, N は b と c の公約数で, ①から N は a の約数でもある。すると, N は a と b の公約数となり, a と b の最大公約数 M と比べると, $N\leqq M$ である。

また, M は a と b の公約数で, ①から $c=a-pb$ となるので, M は c の約数でもある。すると, M は b と c の公約数となり, b と c の最大公約数 N と比べると, $M\leqq N$ である。

したがって, $N\leqq M$ かつ $M\leqq N$ から, $M=N$ である。

(2) (i) 0 でない任意の整数 l と m に対して, その最大公約数を $G(l,\ m)$ で表す。

さて, $a_1=3$, $a_2=4$, $a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定められる自然数の列 $\{a_n\}$ に対して, 帰納的に $a_n\neq0$ なので, (1)から $G(a_{n+2},\ a_{n+1})=G(a_{n+1},\ a_n)$

$G(a_{n+1},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-1})=\cdots=G(a_3,\ a_2)=G(a_2,\ a_1)=G(4,\ 3)=1$

(ii) $a_{n+4}=6a_{n+3}+a_{n+2}=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}=37a_{n+2}+6a_{n+1}$

ここで, $6a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ から,

$a_{n+4}=37a_{n+2}+(a_{n+2}-a_n)=38a_{n+2}-a_n$ ………②

(iii) ②に(1)の結果を適用すると, $G(a_{n+4},\ a_{n+2})=G(a_{n+2},\ a_n)$ である。

ここで, $a_3=6a_2+a_1=27$, $a_4=6a_3+a_2=166$ なので,

(a) n が奇数のとき

$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_3,\ a_1)=G(27,\ 3)=3$

(b) n が偶数のとき

$G(a_{n+2},\ a_n)=G(a_n,\ a_{n-2})=\cdots=G(a_4,\ a_2)=G(166,\ 4)=2$

［解 説］

ユークリッドの互除法に関する基本を確認した後, それを漸化式に適用する問題です。細かい誘導のため, 方針に迷いはないでしょう。

36 [2016 東京大・文]

(1) 3^n を 10 で割った余りを a_n とすると，数列 $\{a_n\}$ は，3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ……

すると，$\{a_n\}$ は 3, 9, 7, 1 を繰り返す周期 4 の周期数列となるので，

$a_n = 3$ (n を 4 で割った余りが 1 のとき)

$a_n = 9$ (n を 4 で割った余りが 2 のとき)

$a_n = 7$ (n を 4 で割った余りが 3 のとき)

$a_n = 1$ (n を 4 で割った余りが 0 のとき)

(2) 3^n を 4 で割った余りを b_n とすると，数列 $\{b_n\}$ は，3, 1, 3, 1, 3, 1, ……

すると，$\{b_n\}$ は 3, 1 を繰り返す周期 2 の周期数列と予測できる。

そこで，3^{n+2} と 3^n の関係を調べると，

$$3^{n+2} = 9\cdot 3^n = (4\cdot 2+1)\cdot 3^n = 4\cdot 2\cdot 3^n + 3^n \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より，$4\cdot 2\cdot 3^n$ は 4 の倍数であるので，3^{n+2} を 4 で割った余りと 3^n を 4 で割った余りは等しい。これより，$\{b_n\}$ は周期 2 の周期数列となり，

$b_n = 3$ (n を 2 で割った余りが 1 のとき)

$b_n = 1$ (n を 2 で割った余りが 0 のとき)

(3) $x_1 = 1$，$x_{n+1} = 3^{x_n}$ で定義された数列 $\{x_n\}$ に対して，

$$x_2 = 3^{x_1} = 3^1 = 3,\ x_3 = 3^{x_2} = 3^3 = 27,\ x_4 = 3^{x_3} = 3^{27},\ \cdots\cdots$$

すると，3 の奇数乗は奇数より，帰納的に x_n は奇数である。

よって，(2)の結論から，3^{x_n} を 4 で割った余りは 3 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，x_n $(n \geqq 2)$ を 4 で割った余りは 3 である。

さらに，この結果を(1)の結論に適用すると，3^{x_n} を 10 で割った余りは 7 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，x_n $(n \geqq 3)$ を 10 で割った余りは 7 である。

したがって，x_{10} を 10 で割った余りは 7 である。

［解 説］

整数と数列の融合問題です。一見，関連のわからない(1)と(2)の結果が，(3)でうまく利用できる誘導となっています。

37　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2016 九州大］

(1)　10^n を 13 で割った余りが a_n より，q_n を自然数として，$10^n = 13q_n + a_n$ と表せ,

$$10^{n+1} = 10\cdot 10^n = 10(13q_n + a_n) = 13(10q_n) + 10a_n$$

すると，10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は，$10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2)　10^1 を 13 で割った余りは 10 より，$a_1 = 10$ である。

そして，(1)の結論を当てはめていくと，a_2 は $10a_1 = 100$ を 13 で割った余りに等しく，$100 = 13\times 7 + 9$ より $a_2 = 9$ である。

a_3 は $10a_2 = 90$ を 13 で割った余り $(90 = 13\times 6 + 12)$ より，$a_3 = 12$ である。

a_4 は $10a_3 = 120$ を 13 で割った余り $(120 = 13\times 9 + 3)$ より，$a_4 = 3$ である。

a_5 は $10a_4 = 30$ を 13 で割った余り $(30 = 13\times 2 + 4)$ より，$a_5 = 4$ である。

a_6 は $10a_5 = 40$ を 13 で割った余り $(40 = 13\times 3 + 1)$ より，$a_6 = 1$ である。

(3)　自然数 N を十進法で表示したとき，最初の桁の数字を k $(1\leqq k\leqq 9)$，最後の桁の数字を l $(0\leqq l\leqq 9)$ とおくと，条件(i)(ii)より，

$$N = k\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 0\cdot 10^3 + 1\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + l$$

ここで，(2)の結論を合同式を用い，mod13 で記すと，

$$10^5 \equiv 4,\ 10^4 \equiv 3,\ 10^3 \equiv 12,\ 10^2 \equiv 9,\ 10^1 \equiv 10$$

これより，$N \equiv 4k + 2\cdot 3 + 1\cdot 9 + 6\cdot 10 + l = 4k + l + 75 \equiv 4k + l + 10$

さらに，条件(iii)から N が 13 で割り切れることから，$4k + l + 10$ が 13 の倍数となり，$14 \leqq 4k + l + 10 \leqq 55$ より，

(a)　$4k + l + 10 = 26$ のとき　$4k + l = 16$ から $(k,\ l) = (2,\ 8),\ (3,\ 4),\ (4,\ 0)$

(b)　$4k + l + 10 = 39$ のとき　$4k + l = 29$ から $(k,\ l) = (5,\ 9),\ (6,\ 5),\ (7,\ 1)$

(c)　$4k + l + 10 = 52$ のとき　$4k + l = 42$ から $(k,\ l) = (9,\ 6)$

(a)～(c)より，求める自然数 N は,

220168, 320164, 420160, 520169, 620165, 720161, 920166

［解　説］

うまく誘導のついた整数問題です。なお，(3)の不定方程式は，一般的に解くよりは，値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また，(1)から合同式を利用してもよかったのですが……。

38 [2016 東北大・理]

(1) 6以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=6$ のとき $2^n = 64$，$n^2+7=43$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき $2^k > k^2+7$ と仮定すると，$2^{k+1} > 2(k^2+7)$ となり，

$$2(k^2+7)-\{(k+1)^2+7\} = k^2-2k+6 = k(k-2)+6 > 0$$

すると，$2(k^2+7) > (k+1)^2+7$ から，$2^{k+1} > (k+1)^2+7$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，6以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つ。

(2) 素数 p, q に対して，$p^q = q^p+7$ ………①

(i) $p=2$ のとき ①から $2^q = q^2+7$ ………②

(1)から $q \geqq 6$ すなわち7以上の素数について，$2^q > q^2+7$ となり②は成立しない。そこで，$q=2,\ 3,\ 5$ のときを調べる。

(a) $q=2$ のとき $2^q=4$，$q^2+7=11$ となり，②は成立しない。

(b) $q=3$ のとき $2^q=8$，$q^2+7=16$ となり，②は成立しない。

(c) $q=5$ のとき $2^q=32$，$q^2+7=32$ となり，②は成立する。

(ii) $p \geqq 3$ のとき p は奇数となり，$q \geqq 3$ すなわち q も奇数の場合については，p^q，q^p はともに奇数から，①は両辺の偶奇が異なり，成立しない。

そこで，$q=2$ のときについて，①から $p^2 = 2^p+7$ ………③

(1)から $p \geqq 6$ すなわち7以上の素数について，$2^p+7 > (p^2+7)+7$ となり③は成立しない。そこで，$p=3,\ 5$ のときを調べる。

(a) $p=3$ のとき $p^2=9$，$2^p+7=15$ となり，③は成立しない。

(b) $p=5$ のとき $p^2=25$，$2^p+7=39$ となり，③は成立しない。

(i)(ii)より，①を満たす素数 p, q は，$(p,\ q)=(2,\ 5)$ のみである。

［解 説］

素数が題材の誘導つき不定方程式の問題です。素数で偶数なのは 2 だけということがポイントになっています。なお，(2)で p^q と q^p の偶奇が異なる点に注目すると，少し解答例を短縮できます。

$\boxed{39}$ ［2016 東京工大］

(1) n が素数のとき，n より小さい自然数 $n-1$，$n-2$，$n-3$，…，3，2，1 は，いずれも n と互いに素である。

すると，それらの数の積 $(n-1)!$ は n と互いに素になり，n で割り切れない。

また，$n=4$ のとき $(n-1)!=3!=6$ は n で割り切れない。

(2) 素数でなくかつ 4 でもない n は，6 以上の合成数であり，

(i) $n=pq$ (p は 2 以上の自然数，q は 3 以上の自然数，$p\neq q$)のとき

$(n-1)!=(pq-1)(pq-2)(pq-3)\cdots3\cdot2\cdot1$ となり，$pq-p=p(q-1)$ は p の倍数，$pq-q=q(p-1)$ は q の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる。

(ii) $n=r^2$ (r は 3 以上の素数)のとき

$(n-1)!=(r^2-1)(r^2-2)(r^2-3)\cdots3\cdot2\cdot1$ となり，$r^2-r=r(r-1)$ は r の倍数，$r^2-2r=r(r-2)$ は r の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=r^2$ で割り切れる。

(i)(ii)より，n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

［解 説］

整数からむ証明問題です。方針を立てるために，まず具体例を考え，それを一般化して解答例を作りました。

40 [2016 京都大・理]

素数 $p,\ q$ に対して，$n=p^q+q^p$ とおく。ここで, n が素数である $p,\ q$ の条件を求めるとき，対称性から $p\leqq q$ としても一般性は失われない。

まず, p が 3 以上のときは，素数 $p,\ q$ はともに奇数になり，p^q，q^p もともに奇数である。よって, n は偶数となり素数ではない。

これより，$p=2$ となり，$n=2^q+q^2$ と表される。

さらに，$q=2$ のときは，$n=2^2+2^2=8$ となり, n は素数ではない。

また，$q=3$ のときは，$n=2^3+3^2=17$ となり, n は素数となる。

さて, q が 5 以上の素数のとき，2 の倍数でもなく，かつ 3 の倍数でもないことに着目すると，k を自然数として，$q=6k\pm1$ と表せる。

(i) $q=6k+1$ のとき

$$n=2^{6k+1}+(6k+1)^2=2\cdot64^k+36k^2+12k+1$$

ここで，N_1 を整数とすると，$64^k=(3\cdot21+1)^k=3N_1+1$ となるので,

$$n=2(3N_1+1)+36k^2+12k+1=3(2N_1+12k^2+4k+1)$$

よって, n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(ii) $q=6k-1$ のとき

$$n=2^{6k-1}+(6k-1)^2=32\cdot64^{k-1}+36k^2-12k+1$$

ここで，N_2 を整数とすると，$64^{k-1}=(3\cdot21+1)^{k-1}=3N_2+1$ となるので,

$$n=32(3N_2+1)+36k^2-12k+1=3(32N_2+12k^2-4k+11)$$

よって, n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)(ii)より, q が 5 以上の素数のとき, n は素数にならない。

以上より，p^q+q^p と表される素数は 17 だけである。

［解 説］

演習しておきたい素数がらみの整数問題です。まず，2 以外の素数は奇数という頻出事項でふるいにかけて p の値を決め，次に q の値を 2, 3, 5, 7, 11 として n の値を計算すると，5 以上では 3 の倍数であることがわかります。ただ, q が奇数ということだけでは，$q=9$ で n が素数となることから考え直し，その結果, q を 6 で割った余りで分類とした解答例となったわけです。なお，二項展開を用いる箇所は，省略気味に記しています。

41 ［2016 名古屋大・文］

(1) k を正の整数, p を 3 以上の素数とするとき，$2^k p$ の正の約数は,

$$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^k,\ p,\ 2p,\ 2^2p,\ \cdots,\ 2^k p$$

したがって, その和 $s(2^k p)$ は,

$$s(2^k p)=(1+2+2^2+\cdots+2^k)(1+p)=\frac{2^{k+1}-1}{2-1}(1+p)=(2^{k+1}-1)(1+p)$$

(2) $2016=2^5\cdot3^2\cdot7$ より, その正の約数の和 $s(2016)$ は,

$$s(2016)=(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)(1+3+3^2)(1+7)=63\cdot13\cdot8=6552$$

(3) 2016 の正の約数 n は, (2)から a, b, c を整数として,

$$n=2^a\cdot3^b\cdot7^c\quad(0\leqq a\leqq5,\ 0\leqq b\leqq2,\ 0\leqq c\leqq1)$$

すると, n の正の約数の和 $s(n)$ は,

$$s(n)=\frac{2^{a+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{b+1}-1}{3-1}\cdot\frac{7^{c+1}-1}{7-1}=\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)$$

条件より，$s(n)=2016$ なので, $\frac{1}{12}(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^5\cdot3^2\cdot7$

$$(2^{a+1}-1)(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3^3\cdot7\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$2^{a+1}-1$ は奇数で $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は偶数, そして $3^{b+1}-1$ と $7^{c+1}-1$ は 7 の倍数とはなりえないので，$2^{a+1}-1$ が 7 の倍数となる。

すると，$2^{a+1}-1$ の値として, $7,\ 3\cdot7,\ 3^2\cdot7,\ 3^3\cdot7$ があげられる。

(i) $2^{a+1}-1=7$ のとき　$a=2$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3^3$

$c=0$ のとき，$3^{b+1}-1=2^6\cdot3^2$ となり，$3^{b+1}=577$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき，$3^{b+1}-1=2^3\cdot3^2$ となり，$3^{b+1}=73$ より整数 b は存在しない。

(ii) $2^{a+1}-1=3\cdot7$ のとき　$2^{a+1}=22$ より整数 a は存在しない。

(iii) $2^{a+1}-1=3^2\cdot7$ のとき　$a=5$ となり, $(*)$は $(3^{b+1}-1)(7^{c+1}-1)=2^7\cdot3$

$c=0$ のとき，$3^{b+1}-1=2^6$ となり，$3^{b+1}=65$ より整数 b は存在しない。

$c=1$ のとき，$3^{b+1}-1=2^3$ となり，$b=1$ である。

(iv) $2^{a+1}-1=3^3\cdot7$ のとき　$2^{a+1}=190$ より整数 a は存在しない。

(i)～(iv)より，$(a,\ b,\ c)=(5,\ 1,\ 1)$ となり，$n=2^5\cdot3^1\cdot7^1=672$ である。

［解 説］

正の約数すべての和という頻出事項が題材になっています。(3)については, まず偶奇でふるいにかけたところ絞り込みが足らず, まだ候補が多いので, 次に 7 の倍数に注目しています。

42 ［2017 一橋大］

連立方程式 $x^2 = yz+7$ ……①，$y^2 = zx+7$ ……②，$z^2 = xy+7$ ……③に対して，

①－②より，$x^2-y^2 = z(y-x)$，$(x-y)(x+y+z)=0$ ………④

②－③より，$y^2-z^2 = x(z-y)$，$(y-z)(x+y+z)=0$ ………⑤

(i) $x+y+z\neq 0$ のとき

④⑤より $x=y=z$ となり，①に代入すると $x^2 = x^2+7$ となり，成立しない。

(ii) $x+y+z=0$ のとき

④⑤は満たされ，$y=-(x+z)$ として①に代入すると，$x^2 = -(x+z)z+7$ となり，

$$x^2+zx+z^2-7=0 \text{ ………⑥}$$

ここで，x は実数より，$D = z^2-4(z^2-7)\geqq 0$ となり，

$$3z^2-28\leqq 0,\ z^2\leqq \frac{28}{3} \text{ ………⑦}$$

さて，整数 x, y, z は，$x+y+z=0$ かつ $x\leqq y\leqq z$ より，$x\leqq 0$，$0\leqq z$ ………⑧

⑦⑧より，$z=0,\ 1,\ 2,\ 3$ となる。

(ii-i) $z=0$ のとき　⑥より $x^2=7$ となり，x が整数というのに反する。

(ii-ii) $z=1$ のとき　⑥より $x^2+x-6=0$ となり，$(x+3)(x-2)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+1)=2$ となるが，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(ii-iii) $z=2$ のとき　⑥より $x^2+2x-3=0$ となり，$(x+3)(x-1)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+2)=1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

(ii-iv) $z=3$ のとき　⑥より $x^2+3x+2=0$ となり，$(x+2)(x+1)=0$

⑧から $x=-2,\ -1$ となる。

$x=-2$ のとき，$y=-(-2+3)=-1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

$x=-1$ のとき，$y=-(-1+3)=-2$ となり，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(i)(ii)より，$(x,\ y,\ z)=(-3,\ 1,\ 2)$，$(-2,\ -1,\ 3)$

［解 説］

連立方程式をまとめる問題です。上の解答例では，⑧の条件に着目して，まず y を消去し，0 以上である z の値から求めています。

43 [2017 北海道大・理]

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき，

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n \geqq 1$，$2k-1 \geqq 1$ より，$(2k-1)n \geqq 2k-1$ となり，

$$a \geqq k^2+2k-1 \text{ ………②}$$

(2) n が自然数で $n(n+1)+14$ が平方数のとき，$n(n+1)+14>n^2$ より，①から，

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \quad (k\text{ は自然数}) \text{ ………③}$$

すると，②から，$14 \geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-15 \leqq 0$

$$(k+5)(k-3) \leqq 0,\quad -5 \leqq k \leqq 3$$

k は自然数から，$k=1,\ 2,\ 3$ となる。

(i) $k=1$ のとき ③から，$n(n+1)+14=(n+1)^2$ となり，$n=13$

(ii) $k=2$ のとき ③から，$n(n+1)+14=(n+2)^2$ となり，$n=\dfrac{10}{3}$ より不適

(iii) $k=3$ のとき ③から，$n(n+1)+14=(n+3)^2$ となり，$n=1$

(i)～(iii)より，$n=1,\ 13$ である。

［解 説］

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

44　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2017 九州大・文]

(1) 自然数 a と b の最大公約数を $G(a,\ b)$ と表すと，ユークリッドの互除法より，

$$G(2017,\ 225)=G(225,\ 217)=G(217,\ 8)$$
$$=G(8,\ 1)=1$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 8\,\overline{)\,217} \\ 16 \\ \hline 57 \\ 56 \\ \hline 1 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1 \\ \overline{)\,225} \\ 217 \\ \hline 8 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 8 \\ \overline{)\,2017} \\ 1800 \\ \hline 217 \end{array}$$

(2) $15=3\times5$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$15\times1,\ 15\times2,\ 15\times3,\ \cdots,\ 15\times134$$

すると，$225=3^2\times5^2$ から，225 との最大公約数が 15 である自然数の個数は，134 以下の自然数で 3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数となる。

ここで，134 以下の自然数で 3 の倍数となるものが 44 個，5 の倍数となるものが 26 個，15 の倍数となるものが 8 個である。

よって，求める自然数の個数は，$134-(44+26-8)=72$ である。

(3) $111=3\times37$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$111\times1,\ 111\times2,\ 111\times3,\ \cdots,\ 111\times18$$

すると，$1998=111\times2\times3^2$ から，1998 との最大公約数が 111 の自然数は，18 以下の自然数で 2 の倍数でも 3 の倍数でもない数と 111 との積になり，

$$111\times1,\ 111\times5,\ 111\times7,\ 111\times11,\ 111\times13,\ 111\times17$$

さらに，225 との最大公約数が 15 から，求める自然数は $111\times5=555$ である。

［解 説］

約数と倍数の問題です。(1)は年度の数が題材になっているため，2017 が素数という知識をもっていたとしても不思議ではありません。ただ，これをストレートに利用して，いきなり結論とするのは避けた方がよいでしょう。「ふるい」にかけて示せば別ですが。

45 [2017 筑波大・理]

(1) $a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_{n+2} = 3{a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3{a_n}^2 + a_{n+1}$ に対して，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)^2$$

ここで，$b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと，$b_1 = 2 \geqq 0$，$b_{n+1} = 3{b_n}^2$ ………①

よって，帰納的に，$b_n \geqq 0$ ($n = 1,\ 2,\ \cdots$) である。

(2) 以下，b_n の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = 1$ のとき　$b_1 = 2$ より成立している。

(ii) $n = k$ のとき　b_k の一の位の数が 2 であると仮定する。

これより，l_k を 0 以上の整数として，$b_k = 10l_k + 2$ とおくと，①から，

$$b_{k+1} = 3{b_k}^2 = 3(10l_k + 2)^2 = 300{l_k}^2 + 120l_k + 12 = 10(30{l_k}^2 + 12l_k + 1) + 2$$

よって，b_{k+1} の一の位の数は 2 である。

(i)(ii)より，b_n の一の位の数は 2 である。

(3) (2)より，l_n を 0 以上の整数として，$b_n = 10l_n + 2$ とおくことができ，

$$a_{n+1} - a_n = 10l_n + 2 \text{ ………②}$$

すると，$n \geqq 2$ において，②から，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(10l_k + 2)$ となり，

$$a_{2017} = 1 + 10\sum_{k=1}^{2016} l_k + 2\cdot 2016 = 10\sum_{k=1}^{2016} l_k + 4033 = 10\left(\sum_{k=1}^{2016} l_k + 403\right) + 3$$

したがって，a_{2017} の一の位の数は 3 である。

［解 説］

整数と漸化式の融合問題です。(1)は簡単に記しましたが，丁寧に書くなら数学的帰納法です。また，(2)(3)は合同式を用いると，少し簡略になります。

46 ［2017 東京大］

(1) $p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2) $n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3) (2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1,\ 2$ のとき (1)より a_n は自然数である。

(ii) $n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4) まず, (1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき，①から，帰納的に，すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると，2 以上の自然数 g を用いて，

$$b_{n+1}=gb_{n+1}',\ b_n=gb_n'\ （b_{n+1}',\ b_n' \text{は自然数}）$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}'-4b_n')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

［解 説］

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば, 昨年は神戸大・理で類題が出ています。

47 ［2017 九州大・理］

(1) 初項 1, 公差 4 の等差数列$\{a_n\}$の一般項は, $a_n=1+4(n-1)=4n-3$

さて, a_n が 7 の倍数となるのは, k を自然数として, $4n-3=7k$ ………①

ここで, $4\times(-1)-3=7\times(-1)$ から, ①を変形すると,

$$4(n+1)=7(k+1)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

すると, 4 と 7 は互いに素より, l を整数として $n+1=7l$, $k+1=4l$ となり,

$$n=7l-1,\ k=4l-1$$

そこで, $1\leqq n\leqq 600$, $k\geqq 1$ から, $1\leqq 7l-1\leqq 600$, $4l-1\geqq 1$ となり,

$$\frac{1}{2}\leqq l\leqq\frac{601}{7}=85+\frac{6}{7}$$

これより, $l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85$ となり, 7 の倍数である項の個数は 85 である。

(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち, 7 の倍数の項を取り出して b_l とおくと,

$$b_l=a_{7l-1}=4(7l-1)-3=28l-7=7(4l-1)\quad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85)$$

さて, a_n が 7^2 の倍数, すなわち b_l が 7 の倍数となるのは, m を自然数として,

$$4l-1=7m\ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで, $4\times 2-1=7\times 1$ から, ③を変形すると,

$$4(l-2)=7(m-1)$$

すると, 4 と 7 は互いに素より, p を整数として $l-2=7p$, $m-1=4p$ となり,

$$l=7p+2,\ m=4p+1$$

そこで, $1\leqq l\leqq 85$, $m\geqq 1$ から, $1\leqq 7p+2\leqq 85$, $4p+1\geqq 1$ となり,

$$0\leqq p\leqq\frac{83}{7}=11+\frac{6}{7}$$

これより, $p=0,\ 1,\ \cdots,\ 11$ となり, 7^2 の倍数である項の個数は 12 である。

(3) a_n が 7 の倍数のとき, $n=7l-1\ (l\geqq 1)$ となり, この n を書き並べると,

$$6,\ \underline{13},\ 20,\ 27,\ 34,\ 41,\ 48\ |\ 55,\ \underline{62},\ 69,\ 76,\ 83,\ 90,\ 97\ |\ 104,\ \underline{111},\ 118,\ \cdots\cdots$$

そして, この数列を 7 個ずつの区画に分け, 左から第 1 群, 第 2 群, …と呼ぶ。

また, a_n が 7^2 の倍数の項を取り出して c_p とおくと, $l=7p+2$ から,

$$n=7(7p+2)-1=49p+13\quad(p\geqq 0)$$

すると, 上記の数列の下線をつけた数が対応して,

$$c_p=a_{49p+13}=4(49p+13)-3=196p+49=7^2(4p+1)\quad(p\geqq 0)$$

さらに, a_n が 7^3 の倍数, すなわち c_p が 7 の倍数になるのは, 同様にすると, q を 0 以上の整数として,

$$4p+1=7q\ \cdots\cdots\cdots ④$$

そして, ④を満たす最小の p, q の値は $(p,\ q)=(5,\ 3)$ であり, このときの n は, $n=49\cdot 5+13=258$ となり, $a_{258}=4\cdot 258-3=1029=7^3\cdot 3$ である。

このの $n=258$ は，$7l-1=258$ から $l=37$ となり，上記の数列の第 6 群に属することがわかる。

さて，積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n については，素因数 7 の個数に注目し，これが合計 45 個以上となる最小の n を考えればよい。

まず，第 5 群までは a_n に 7^3 の倍数がないので，1 つの群内に素因数 7 が $7+1=8$ 個ずつとなり，その総数は $8\times5=40$ 個である。

すると，素因数 7 の残り 5 個について調べるために，第 6 群を書き並べると，

$$\mid 251,\ \underline{258},\ 265,\ 272,\ \cdots\cdots$$

これより，a_{251} は 7 の倍数，a_{258} は 7^3 の倍数，a_{265} は 7 の倍数，$\cdots$となるので，積 $a_{251}a_{258}a_{265}$ に素因数 7 が 5 個あることがわかる。

以上より，積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n は，$n=265$ である。

［解 説］

整数と数列の融合問題です。解答例では，頻出の(1)の結果を利用して，(2)につなげています。なお，(3)は群数列の考え方をもとにしていますが，45 という数値が意味深長で，詰めがかなり面倒でした。

48　　　［2017 名古屋大・文］

(1) 条件(＊)から，自然数a，b，cに対し，$a<b<c$かつ$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$………①

すると，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}>0$となるので，①から$\dfrac{3}{a}>\dfrac{1}{2}$，すなわち$a<6$………②

また，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$なので，①から$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$，すなわち$a>2$………③

②③より$2<a<6$となり，$a=3,\ 4,\ 5$である。

(i) $a=3$のとき　①より$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$となり，

$bc-6b-6c=0$，$(b-6)(c-6)=36$

ここで，$3<b<c$から$-3<b-6<c-6$となり，

$(b-6,\ c-6)=(1,\ 36)$，$(2,\ 18)$，$(3,\ 12)$，$(4,\ 9)$

よって，$(b,\ c)=(7,\ 42)$，$(8,\ 24)$，$(9,\ 18)$，$(10,\ 15)$

(ii) $a=4$のとき　①より$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$となり，

$bc-4b-4c=0$，$(b-4)(c-4)=16$

ここで，$4<b<c$から$0<b-4<c-4$となり，

$(b-4,\ c-4)=(1,\ 16)$，$(2,\ 8)$

よって，$(b,\ c)=(5,\ 20)$，$(6,\ 12)$

(iii) $a=5$のとき　①より$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{10}$となり，

$3bc-10b-10c=0$，$9bc-30b-30c=0$，$(3b-10)(3c-10)=100$

$5<b<c$から$5<3b-10<3c-10$となり，適する$(3b-10,\ 3c-10)$はない。

(i)～(iii)より，自然数の組$(a,\ b,\ c)$は，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$，$(3,\ 8,\ 24)$，$(3,\ 9,\ 18)$，$(3,\ 10,\ 15)$，
$(4,\ 5,\ 20)$，$(4,\ 6,\ 12)$

(2) $2n$の正の約数p，q，rに対し，$p>q>r$かつ$p+q+r=n$……④を満たす$(p,\ q,\ r)$の個数を$f(n)$とすると，④から，

$\dfrac{p}{2n}+\dfrac{q}{2n}+\dfrac{r}{2n}=\dfrac{1}{2}$………⑤

ここで，$\dfrac{2n}{p}=a$，$\dfrac{2n}{q}=b$，$\dfrac{2n}{r}=c$とおくと，a，b，cは自然数となり，さらに，$p>q>r$から，$\dfrac{2n}{p}<\dfrac{2n}{q}<\dfrac{2n}{r}$すなわち$a<b<c$である。

さらに，⑤をa，b，cで表すと，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$である。

すなわち，自然数の組$(p,\ q,\ r)$は，条件(＊)を満たす自然数の組$(a,\ b,\ c)$に対応し，その個数$f(n)$の最大値Mは，(1)の結果から$M\leqq 6$である。

以下，この 6 つの場合について，n の条件を求める。

(i) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=7$，$\dfrac{2n}{r}=42$ より，

$$3p=2n\,,\ 7q=2n\,,\ 21r=n$$

よって，このとき n は 21 の倍数である。

(ii) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 8,\ 24)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=8$，$\dfrac{2n}{r}=24$ より，

$$3p=2n\,,\ 4q=n\,,\ 12r=n$$

よって，このとき n は 12 の倍数である。

(iii) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 9,\ 18)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=9$，$\dfrac{2n}{r}=18$ より，

$$3p=2n\,,\ 9q=2n\,,\ 9r=n$$

よって，このとき n は 9 の倍数である。

(iv) $(a,\ b,\ c)=(3,\ 10,\ 15)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=10$，$\dfrac{2n}{r}=15$ より，

$$3p=2n\,,\ 5q=n\,,\ 15r=2n$$

よって，このとき n は 15 の倍数である。

(v) $(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 20)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=5$，$\dfrac{2n}{r}=20$ より，

$$2p=n\,,\ 5q=2n\,,\ 10r=n$$

よって，このとき n は 10 の倍数である。

(vi) $(a,\ b,\ c)=(4,\ 6,\ 12)$ のとき $\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=6$，$\dfrac{2n}{r}=12$ より，

$$2p=n\,,\ 3q=n\,,\ 6r=n$$

よって，このとき n は 6 の倍数である。

(i)～(vi)より，自然数 n が上記の条件をすべて満たすとき $M=6$ となる。

ここで，$21=3\times7$，$12=2^2\times3$，$9=3^2$，$15=3\times5$，$10=2\times5$，$6=2\times3$ から，n が $2^2\times3^2\times5\times7=1260$ の倍数のとき，条件をすべて満たす。

以上より，$M=6$ で，$f(n)=6$ となる最小の n は $n=1260$ である。

［解 説］

質，量ともにかなりハードな整数問題です。ただ，(1)が(2)への秀逸な誘導となっており，入試までに演習したい 1 題です。なお，(1)は，場合分けしたあと分母を払って因数分解をしていますが，不等式を用いて評価しても構いません。

49 ［2018 九州大・文］

(1) mod7 で記すと $2^3\equiv 1$ から，2^n を 7 で割った余り r は，k を 0 以上の整数として，

(i) $n=3k+1$ のとき　$2^{3k+1}=(2^3)^k\cdot 2\equiv 1^k\cdot 2\equiv 2$ より，$r=2$

(ii) $n=3k+2$ のとき　$2^{3k+2}=(2^3)^k\cdot 4\equiv 1^k\cdot 4\equiv 4$ より，$r=4$

(iii) $n=3k+3$ のとき　$2^{3k+3}=(2^3)^{k+1}\equiv 1^{k+1}\equiv 1$ より，$r=1$

(2) $m=101101101101101101_{(2)}$ を 10 進法で表し，mod7 で記すと，

$$m=1+2^2+2^3+2^5+2^6+2^8+2^9+2^{11}+2^{12}+2^{14}+2^{15}+2^{17}$$
$$\equiv 1+4+1+4+1+4+1+4+1+4+1+4=30\equiv 2$$

したがって，m を 7 で割った余りは 2 である。

［解 説］

基本的な整数問題です。いろいろな記述方法が考えられますが，解答例では合同式を用いました。

50 ［2018 京都大］

以下，mod3 で記すと，$9\equiv 0$ に注意して，

(i) $n\equiv 0$ のとき $n^3-7n+9\equiv 0-0+0=0$

(ii) $n\equiv 1$ のとき $n^3-7n+9\equiv 1-7+0=-6\equiv 0$

(iii) $n\equiv 2$ のとき $n^3-7n+9\equiv 8-14+0=-6\equiv 0$

(i)～(iii)より，n^3-7n+9 はつねに 3 の倍数である。

すると，n^3-7n+9 が素数となるのは，$n^3-7n+9=3$ の場合だけであり，

$$n^3-7n+6=0\,,\ (n-1)(n-2)(n+3)=0$$

以上より，求める整数 n は，$n=1,\ 2,\ -3$ である。

［解 説］

まず，n^3-7n+9 の因数分解を考えたところうまくいかなかったため，次の手は，$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots$ として実験です。すると，すべて 3 の倍数になることがわかり……。

51　　　　[2018 名古屋大・文]

(1)　整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，次の 3 つの場合に分けて調べる。

(i)　α，βがともに奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(ii)　αが偶数，βが奇数のとき

α^2，$\alpha\beta$は偶数，β^2は奇数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(iii)　αが奇数，βが偶数のとき

α^2は奇数，$\alpha\beta$，β^2は偶数より，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(i)～(iii)より，いずれの場合も$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数である。

(2)　条件より，奇数nに対して，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2n$………①

まず，(1)より，整数α，βの少なくとも一方が奇数のとき，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は奇数となるので，①は成立しない。

これより，①を満たす整数α，βは，ともに偶数である。

しかし，α，βがともに偶数のとき，α^2，$\alpha\beta$，β^2はすべて 4 の倍数となり，$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$は 4 の倍数である。よって，①は成立しない。

以上より，①を満たす整数α，βは存在しない。

(3)　3 次方程式$x^3-2018x+c=0$（cは実数）の解を，$x=\alpha$，β，γとおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=0\cdots\cdots\cdots②,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2018\cdots\cdots\cdots③$$

②より$\gamma=-(\alpha+\beta)$となり，③に代入すると，

$$\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2=-2018,\quad \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=2018\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$2018=2\times1009$なので，(2)から④を満たす整数α，βは存在しない。

すなわち，α，β，γのうち整数となるのは 1 個以下である。

［解 説］

細かく誘導のついた整数問題です。方針に迷うことはないでしょう。

52 [2018 東北大・理]

(1) 整数a, bに対して，$3^a-2^b=1$……①より，$3^a=2^b+1$………②

すると，$3^a=2^b+1>1$となるので，$a\geqq 1$であり，このとき①より，

$$2^b=3^a-1\geqq 3^1-1=2$$

よって，$b\geqq 1$であり，a, bはともに正となる。

(2) $b>1$すなわち$b\geqq 2$のとき，2^bが 4 の倍数であることに着目して，以下，mod4で記述すると，②の右辺は$2^b+1\equiv 1$である。

ここで，kを自然数としてaを偶奇に分け，$9\equiv 1$に注意すると，

(i) $a=2k$のとき　$3^a=3^{2k}=9^k\equiv 1^k\equiv 1$

(ii) $a=2k-1$のとき　$3^a=3^{2(k-1)+1}=9^{k-1}\cdot 3\equiv 1^{k-1}\cdot 3\equiv 3$

(i)(ii)より，②が成り立つのは，aが偶数のときである。

(3) (1)より，a, bはともに自然数なので，

(i) $b=1$のとき　②より$3^a=2^1+1=3$となり，$a=1$である。

(ii) $b\geqq 2$のとき　(2)より$a=2k$となり，②より，

$$3^{2k}=2^b+1,\ (3^k-1)(3^k+1)=2^b\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$(3^k+1)-(3^k-1)=2$であり，さらに2^bの約数が$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^b$であることに着目すると，③より，

$$3^k-1=2,\ 3^k+1=2^2$$

これより，$k=1$から$a=2$となり，また$2\cdot 2^2=2^b$から$b=3$である。

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 3)$

［解 説］

整数問題に誘導がついているものの，それがアバウトなタイプです。そのため，方針を決めるのに試行錯誤が必要になります。

53　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2018 千葉大・文］

(1)　初項 1，公差 6 である等差数列$\{a_n\}$について，$a_n=1+6(n-1)=6n-5$

また，初項 3，公差 4 である等差数列$\{b_m\}$について，$b_m=3+4(m-1)=4m-1$

ここで，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{c_k\}$とすると，$a_n=b_m$から，

$$6n-5=4m-1,\ 3n-2m=2\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす 1 つの解が$(n,\ m)=(2,\ 2)$より，$3\times2-2\times2=2\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$3(n-2)-2(m-2)=0$，$3(n-2)=2(m-2)$

ここで，3 と 2 は互いに素なので，jを整数として，$n-2=2j$，$m-2=3j$から，

$$n=2j+2,\ m=3j+2\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$m\geqq1$，$n\geqq1$より$j\geqq0$となるので，$k=j+1\geqq1$とおくと，③より，

$$n=2(k-1)+2=2k,\ m=3(k-1)+2=3k-1$$

よって，$\{c_k\}$の一般項は，$c_k=a_{2k}=12k-5$である。

(2)　まず，$\{a_n\}$，$\{b_m\}$の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を$\{d_l\}$とする。ここで，$c_k=a_{2k}=b_{3k-1}$に注意して，$\{d_l\}$のd_3以降を項数 4 のグループに分け，$c_1=7$から 4 項を第 1 群，$c_2=19$から 4 項を第 2 群，$c_3=31$から 4 項を第 3 群，…と呼ぶ。

$$1,\ 3\,\Big|\,\underbrace{\underline{7},\ 11,\ 13,\ 15}_{\text{第 1 群}}\,\Big|\,\underbrace{\underline{19},\ 23,\ 25,\ 27}_{\text{第 2 群}}\,\Big|\,\underbrace{\underline{31},\ 35,\ 37,\ 39}_{\text{第 3 群}}\,\Big|\cdots\cdots$$

さて，d_{1000}が第 i 群に属するとすると，$2+4(i-1)<1000\leqq2+4i$から，$i=250$となり，第 250 群に属する。

さらに，$1000-(2+4\times249)=2$から，第 250 群の 2 項目となるので，

$$d_{1000}=c_{250}+4=(12\times250-5)+4=2999$$

また，d_{1001}は第 250 群の 3 項目となるので，

$$d_{1000}=c_{250}+6=(12\times250-5)+6=3001$$

［解　説］

2 つの等差数列の共通数列が題材です。(1)は頻出題ですが，(2)はあまり見かけません。解答例では，$\{c_k\}$に注目し，群数列の考え方を利用して記しました。

$\boxed{54}$ [2018 東京大・理]

(1) $a_n=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}=\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{P}_n}{(n!)^2}=\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$ に対して，$n\geqq 2$ のとき，

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2\,n!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)\cdot 2n}{n\cdot(n+1)n}=\frac{2(2n+1)}{n(n+1)}=\frac{2n+1}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$$

ここで，n と $2n+1$ の最大公約数を g_1，i と j を自然数とすると，

$$n=g_1i,\ \ 2n+1=g_1j$$

すると，$1=g_1(j-2i)$ となり $g_1=1$，すなわち n と $2n+1$ は互いに素である。

また，$n+1$ と $2n+1$ の最大公約数を g_2，k と l を自然数とすると，

$$n+1=g_2k,\ \ 2n+1=g_2l$$

すると，$1=g_2(2k-l)$ となり $g_2=1$，すなわち $n+1$ と $2n+1$ は互いに素である。

さらに，$n(n+1)$ が偶数であることより $\dfrac{n(n+1)}{2}$ は自然数となり，また $\dfrac{n(n+1)}{2}$ と $2n+1$ は互いに素なので，既約分数を用いて $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{q_n}{p_n}$ と表したとき，

$$p_n=\frac{n(n+1)}{2},\ \ q_n=2n+1$$

(2) まず，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$ とすると，$2(2n+1)<n(n+1)$ から，$n^2-3n-2>0$

$n\geqq 2$ より $n>\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ となり，n は 4 以上の整数となる。

これより，$n\geqq 4$ のとき $a_n<a_{n-1}$ となり，$a_3>a_4>a_5>\cdots>0$ であり，

$$a_1=\frac{{}_3\mathrm{P}_1}{(1!)^2}=3,\ \ a_2=\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{(2!)^2}=5,\ \ a_3=\frac{{}_7\mathrm{P}_3}{(3!)^2}=\frac{35}{6},\ \ a_4=\frac{{}_9\mathrm{P}_4}{(4!)^2}=\frac{21}{4}$$

$$a_5=\frac{{}_{11}\mathrm{P}_5}{(5!)^2}=\frac{77}{20},\ \ a_6=\frac{{}_{13}\mathrm{P}_6}{(6!)^2}=\frac{143}{60},\ \ a_7=\frac{{}_{15}\mathrm{P}_7}{(7!)^2}=\frac{143}{112}$$

$$a_8=\frac{{}_{17}\mathrm{P}_8}{(8!)^2}=\frac{2413}{4032}<1$$

よって，$1>a_8>a_9>\cdots>0$ となるので，a_n が整数となるのは $n=1,\ 2$ である。

［解 説］

二項係数を題材にした数列の問題です。誘導の丁寧な類題が文系で出ており，それに引きずられた解法です。数値計算は少し面倒でした。漸化式を利用してもよかったのですが。