２０１９ 入試対策
２次数学アーカイブ

# ベクトル

## 文系＋理系

２００１－２０１８

外林康治 編著

電送数学舎

# ベクトル

## 【問題一覧】

**1**　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

(1)　線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3)　直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。　［2001 東北大・文］

**2**　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0\,,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$$

を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

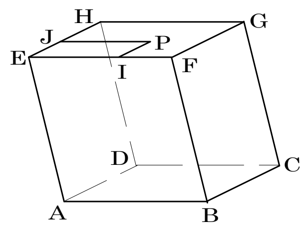
(1)　直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2)　四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。　［2002 千葉大・理］

**3**　空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2)　$a$ を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を $a, x, y$ を用いて表せ。



（平行六面体ABCD-EFGH）

(3)　問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。

［2002 九州大・文］

**4**　四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　OA ⊥ BC，OB ⊥ AC，OC ⊥ AB

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。　［2003 京都大］

**5** 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その $xy$ 平面内の面を $S$, $xz$ 平面内の面を $T$ とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $S$ 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を $T$ 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が $S$ 内を，点 B が $T$ 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。 [2004 九州大・理]

**6** 空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$\mathrm{AB} = 1,\ \mathrm{AC} = 2,\ \mathrm{AD} = 3,\ \angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{CAD} = 60^\circ,\ \angle\mathrm{DAB} = 90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

[2005 大阪大・理]

**7** $\triangle$ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。 [2006 京都大・理]

**8** 大きさがそれぞれ 5, 3, 1 の平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ に対して，$\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおく。

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\vec{a}$ を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z} = 20$ を満たすように $\vec{b}$, $\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。 [2006 一橋大]

**9** $xy$ 平面において，原点 O を通る半径 $r$ $(r>0)$ の円を $C$ とし，その中心を A とする。O を除く $C$ 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く $C$ 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を $l$ とする。$l$ が $C$ と 2 点で交わるとき，$r$ のとりうる値の範囲を求めよ。　［2007 大阪大］

**10** $a$, $b$ を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を $\alpha$，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を $S$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を $\theta$ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 $\alpha$ に垂直で原点 O を通る直線と平面 $\alpha$ との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3)　点 P が球面 $S$ 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 $\alpha$ 上にはないものとする。　［2007 九州大・理］

**11** 点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを $s$，線分 CD の長さを $t$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　線分 MN の長さを $s$ と $t$ を用いて表せ。

(2)　点 A, B と C, D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。　［2008 大阪大］

**12** 平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。　［2009 大阪大・理］

**13**　座標平面上に点O$(0,\ 0)$と点P$(4,\ 3)$をとる。不等式$(x-5)^2+(y-10)^2\leqq 16$の表す領域を$D$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$k$ は定数とする。直線$y=-\dfrac{4}{3}x+k$上の点を Q とするとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$k$を用いて表せ。

(2)　点 R が$D$全体を動くとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の最大値および最小値を求めよ。　　［2010 広島大・文］

**14**　四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$を満たしながら動くとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$であることを示せ。　　［2010 東北大］

**15**　三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　$k$が$k\neq\dfrac{1}{3}$を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　　［2011 千葉大・理］

**16**　平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$を満たすとする。ただし，記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 $p$，$q$ に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。このとき，次の条件$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$を満たす実数$p,\ q$を求めよ。

(2)　平面上のベクトル$\vec{x}$が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq 1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq 2$を満たすとき，$|\vec{x}|$のとりうる値の範囲を求めよ。　　［2012 東北大・文］

**17** $xyz$ 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり，平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と $xy$ 平面の交点を R とする。

(1) P$(0,\ 0,\ 2)$ とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

(2) 平面 $z=1$ 上に，4 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(1,\ -1,\ 1)$，C$(-1,\ -1,\ 1)$，D$(-1,\ 1,\ 1)$ をとる。点 P が平面 $z=2$ で点$(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を $xy$ 平面上に図示し，その面積を求めよ。

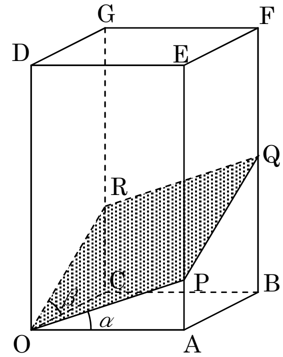
［2012 一橋大］

**18** $t$ を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 A$(2t,\ 2t,\ 0)$，B$(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$$

を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような $t$ の値を求めよ。 ［2013 一橋大］

**19** 1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を $S$ とおく。また，$\angle$AOP を $\alpha$，$\angle$COR を $\beta$ とおく。




(1) $S$ を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

［2014 東京大・理］

**20** 平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 $C$ がある。2 点 A, B を除く $C$ 上の点 P に対し，AP$=$AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる。また，直線 PQ と円 $C$ の交点のうち，P でない方を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle$AQR の面積を $\theta=\angle$PAB を用いて表せ。

(2) 点 P を動かして$\triangle$AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ。

［2015 大阪大・文］

**21** 平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を $\alpha$ とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。 ［2015 北海道大・文］

**22** $xyz$ 空間において，原点を中心とする $xy$ 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする $xz$ 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1) 線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。 ［2015 一橋大］

**23** $xyz$ 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 $S$ を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の $S$ 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 $l$ と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。 ［2015 京都大・文］

**24** $\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ を満たすとする。

(1) $\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2) (1)の $\beta$ の値をすべて求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。 ［2016 北海道大・文］

**25** 四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 ［2016 京都大・文］

**26** $s$ を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，$\alpha$ と $\beta$ を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの $s$ を求めよ。 ［2017 東北大］

**27** $n$ を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 $n$ 角形 $\mathrm{A_1A_2\cdots A}_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 $\mathrm{A_1A_3}$ と線分 $\mathrm{A_2A_4}$ との交点 P は線分 $\mathrm{A_1A_3}$ を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$k$ を用いて表せ。

(2) $t$ を $k$ を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle \mathrm{PA_2A_3}}{\triangle \mathrm{A_1A_2A_4}}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。 ［2017 千葉大］

**28** 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。 ［2017 東京大・文］

**29** 座標空間において原点 O と点 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を $l$ とし，点 $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$ と点 $\mathrm{C}(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を $m$ とする。$l$ 上の 2 点 P, Q と，$m$ 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき，△PQR の面積が最小となるような P, Q, R の座標を求めよ。 ［2017 京都大・文］

**30** $xyz$ 空間において，点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を $\sigma$ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 球面 $\sigma$ の方程式を求めよ。

(2) $xy$ 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面 $\sigma$ との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を示せ。

(3) 点 $\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ を満たす，$xy$ 平面上にない定点とする。$\sigma$ 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と $xy$ 平面との交点 P はどのような図形を描くか。$p,\ q,\ r$ を用いて答えよ。 ［2017 東京医歯大］

**31**　正方形 ABCD の辺を除く内部に，$\mathrm{PA} \perp \mathrm{PB}$ を満たす点 P がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $x\overrightarrow{\mathrm{PA}} + y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ とするとき，$x, y$ を $\alpha$ を用いて表せ。

(2)　点 P が題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた $x$，$y$ の和 $x+y$ の最大値を求め，そのときの P がどのような点かを答えよ。　［2018 千葉大・理］

**32**　四面体 ABCD は $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$，$\mathrm{AD} = \mathrm{BC}$ を満たすとし，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とする。

(1)　辺 AB と線分 PQ は垂直であることを示せ。

(2)　線分 PQ を含む平面 $\alpha$ で四面体 ABCD を切って 2 つの部分に分ける。このとき，2 つの部分の体積は等しいことを示せ。　［2018 京都大］

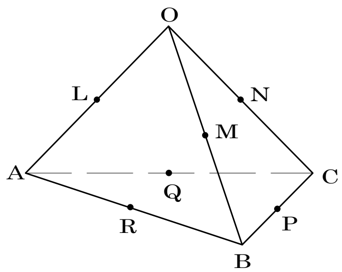
# ベクトル

## 【解答例と解説】

**1** ［2001 東北大・文］

(1) 線分 LP の中点を S とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$




これから，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と表せ，点 S は線分 MQ の中点に一致する。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ とも表せるので，S は線分 NR の中点にも一致する。

よって，線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わる。

(2) 条件より，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ ………①

$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\ \cdots\cdots\cdots②$$

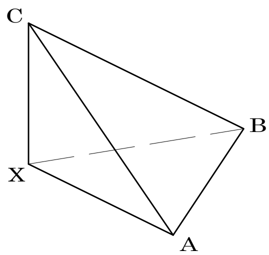
$$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より $\vec{a}=\vec{q}+\vec{r}$，①③より $\vec{b}=\vec{p}+\vec{r}$，①②より $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$

(3) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=-\overrightarrow{\mathrm{LP}}=-\vec{p}$

$$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{r}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{XC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{r}$$



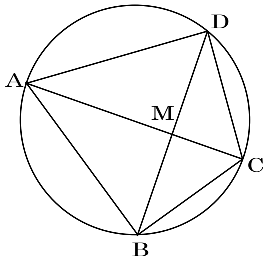

$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ が互いに直交することより，四面体 XABC の体積は，

$$\frac{1}{3}\Bigl(\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\Bigr)|\vec{r}|=\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$$

［解 説］

(3)で与えられた条件によって，四面体 OABC の 4 つの面は合同になります。このとき，この四面体は直方体に埋め込まれるということが元になっています。ずいぶん前になりますが, 1993 年に東大・理で，この考え方を利用する問題が出ています。

**2**　　[2002 千葉大・理]




(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$ より，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}=-2\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$

BD の中点を M とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-2\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ ………(＊)

よって，A，M，C は同一直線上にあるので，直線 AC は線分 BD の中点を通る。

(2)　(1)より，$\mathrm{BM}=\mathrm{DM}$

また，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$ なので，$\mathrm{AC}\perp\mathrm{BD}$

これより, AC は BD の垂直二等分線となり，$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{ADC}$ となるので,

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}$$

また，四角形 ABCD は円に内接するので，$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ADC}=180^\circ$ より,

$$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$$

すなわち，AC は半径 1 である四角形 ABCD の外接円の直径となり，$\mathrm{AC}=2$ である。

ここで, (＊)より，$\mathrm{AM}:\mathrm{MC}=2:1$ なので，$\mathrm{AM}=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

外接円の中心を O とすると，$\mathrm{OM}=\mathrm{AM}-\mathrm{AO}=\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{1}{3}$

$$\mathrm{BM}=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{OM}^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=\sqrt{\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2}=\sqrt{\dfrac{16}{9}+\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$$\mathrm{BC}=\mathrm{DC}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{4-\frac{24}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

［解　説］

(1)の誘導によって，AC が外接円の直径であることを見つけるのが最大のポイントです。

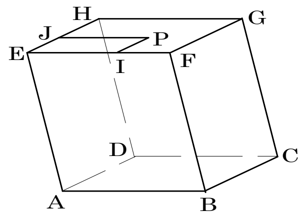
**３**　　[2002 九州大・文]

(1) $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2 A}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2(1-\cos^2 A)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

(2) 条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=1\cdot 2a\cos 120^\circ=-a$$




ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y^2|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2$$

$$+2xy\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2y\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+2x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$=x^2+y^2+4a^2-2ax$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+y|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$=x-a+y$$

そこで，$\triangle\mathrm{ACP}$ の面積を $S$ とすると，(1)より，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2+4a^2-2ax)-(x-a+y)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2xy+y^2-2ax+2ay+7a^2}$$

(3) $P=x^2-2xy+y^2-2ax+2ay+7a^2$ とおくと，$S=\frac{1}{2}\sqrt{P}$ となる。

さて，$x-y=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であり，

$$P=(x-y)^2-2a(x-y)+7a^2=(x-y-a)^2+6a^2=(t-a)^2+6a^2$$

(i) $0<a\leqq 1$ のとき

$P$ は $t=a$ で最小値 $6a^2$ をとり，このとき $S$ も最小となり，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{6a^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

(ii) $a>1$ のとき

$P$ は $t=1$ で最小値 $1-2a+7a^2$ をとり，このとき $S$ も最小となり，

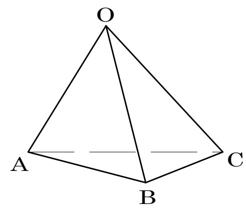
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{1-2a+7a^2}$$

## ［解 説］

空間ベクトルについての標準的な問題です。(3)は 1 文字を固定して，2 次関数として最小値を求める問題かとも思いましたが，式の特徴を利用すると，その必要はありませんでした。

**4** ［2003 京都大］

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，条件(i)より，




$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0\,,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0\,,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\,,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

まとめて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$ ……①とおく。

また，条件(ii)より，$\triangle OAB=\triangle OBC=\triangle OCA$ から，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

①より，$|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{c}|=|\vec{c}||\vec{a}|$

まとめて，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=l$ ……②とおく。

ここで，①②より，$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$

$$|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})=k-k-k+l^2=l^2-k$$

すると，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ より，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{4(l^2-k)^2-(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}$$

さらに，$\triangle ABC=\triangle OAB$ より，$\dfrac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{l^4-k^2}$

$$3(l^2-k)^2=(l^2-k)(l^2+k)\,,\ 3(l^2-k)=l^2+k\,,\ l^2=2k\ \cdots\cdots\cdots③$$

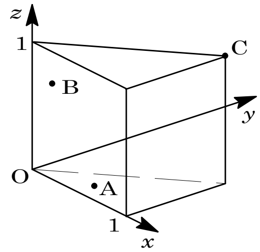
③より，$\cos\angle AOB=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{k}{l^2}=\dfrac{1}{2}$ から，$\angle AOB=60^\circ$ となる。

同様にして，$\angle BOC=\angle COA=60^\circ$ なので，$\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$ は正三角形となり，四面体 OABC は正四面体である。

## ［解 説］

頂角が $60^\circ$ の二等辺三角形は正三角形という方針で解をつくりました。

**5** [2004 九州大・理]




(1) 求める単位ベクトルを$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$とおく。

$\overrightarrow{\rm OA}\cdot\vec{e}=0$より，$ax+by=0$ ………①

$\overrightarrow{\rm OC}\cdot\vec{e}=0$より，$x+y+z=0$ ………②

①より，$(x,\ y)=k(b,\ -a)$ （$k$は実数）

②から，$z=-x-y$なので，

$$(x,\ y,\ z)=k(b,\ -a,\ a-b)$$

$|\vec{e}|=1$より，$1=|k|\sqrt{b^2+(-a)^2+(a-b)^2}$から，

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{b^2+(-a)^2+(a-b)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$$

よって，$\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}(b,\ -a,\ a-b)$

すると，$\overrightarrow{\rm OB}\cdot\vec{e}=\pm\dfrac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$より，$|\overrightarrow{\rm OB}\cdot\vec{e}|=\dfrac{|bc+ad-bd|}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$

ここで, $a\geqq b\geqq 0$, $c\geqq 0$, $d\geqq 0$なので，$bc+ad-bd=bc+d(a-b)\geqq 0$となり，

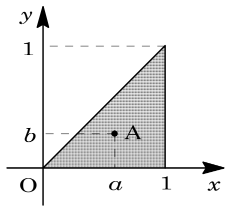
$$|\overrightarrow{\rm OB}\cdot\vec{e}|=\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$$

(2) 四面体OABCにおいて，△OACを底面とすると，高さは$|\overrightarrow{\rm OB}\cdot\vec{e}|$となる。

$$\triangle{\rm OAC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\rm OA}|^2|\overrightarrow{\rm OC}|^2-(\overrightarrow{\rm OA}\cdot\overrightarrow{\rm OC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2)-(a+b)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}$$

四面体OABCの体積を$V$とすると, (1)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}\cdot\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}=\frac{1}{6}(bc+ad-bd)$$




(3) まず, 点A$(a,\ b,\ 0)$の位置を$S$内でいったん固定した後, 点B$(c,\ 0,\ d)$を$T$内で動かし, $V$が最大になるときの点Bの位置を求める。次に, この状態を保ったまま, 点Aを$S$内で動かし, $V$の最大値を求める。

なお, $a=b=0$のときは, 点Aが原点Oと一致するので不適である。

(i) 点A$(a,\ b,\ 0)$を$a>b>0$の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}\{(a-b)d+bc\}$となるので，$V$は$d$の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$，$0\leqq c\leqq 1$より，$c=d=1$のとき$V$は最大になる。

このとき，$V=\dfrac{1}{6}(a-b+b)=\dfrac{1}{6}a$である。

そこで，点 A を $S$ 内で動かすと，$V$ は $a=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=c=d=1$，$0<b<1$ のとき，$V$ は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(ii) 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a>b=0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}ad$ となるので，$V$ は $d$ の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$ より，$d=1$ のとき $V$ は最大になる。このとき $V=\dfrac{1}{6}a$ である。

そこで，点 A を $S$ 内で動かすと，$V$ は $a=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=d=1$，$b=0$，$0\leqq c\leqq 1$ のとき，$V$ は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(iii) 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a=b>0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}bc$ となるので，$V$ は $c$ の単調増加関数であり，$0\leqq c\leqq 1$ より，$c=1$ のとき $V$ は最大になる。このとき $V=\dfrac{1}{6}b$ である。

そこで，点 A を $S$ 内で動かすと，$V$ は $b=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=b=c=1$，$0\leqq d\leqq 1$ のとき，$V$ は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(i)(ii)(iii)より，$V$ の最大値は $\dfrac{1}{6}$，このときの点 A, B の位置は次の 3 種類である。

$\mathrm{A}(1,\ b,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$　$(0<b<1)$

$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(c,\ 0,\ 1)$　$(0\leqq c\leqq 1)$

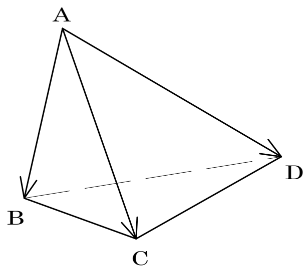
$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ d)$　$(0\leqq d\leqq 1)$

［解 説］

(2)までは 1999 年に類題が出ています。ただ，(3)の最大値を求めるときに，いわゆる「予選→決勝戦」という 1 文字固定の解法を用いる必要があります。上の解では条件のきつい点 A をとりあえず固定し，点 B を動かすという方法で解きました。

**6** [2005 大阪大・理]

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおくと，条件より，




$$|\vec{b}|=1\,,\ |\vec{c}|=2\,,\ |\vec{d}|=3$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot2\cdot\cos60^\circ=1$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$$

$$\vec{d}\cdot\vec{b}=3\cdot1\cdot\cos90^\circ=0$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=x\vec{b}+y\vec{c}+z\vec{d}$ とおくと，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(x+y)+1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(x+4y+3z)+4$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{d}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(3y+9z)+9$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|$ なので,

$$-2(x+y)+1=0\,,\ 2x+2y=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$-2(x+4y+3z)+4=0\,,\ x+4y+3z=2\cdots\cdots\cdots②$$

$$-2(3y+9z)+9=0\,,\ 2y+6z=3\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$x=\frac{1}{2}$，$y=0$，$z=\frac{1}{2}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2\right)=\frac{5}{2}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

［解 説］

$\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$ なので, A を原点とする座標を設定して解こうか，どうしようかと迷いました。計算量はどちらでも同じぐらいでしょう。

**7** ［2006 京都大・理］

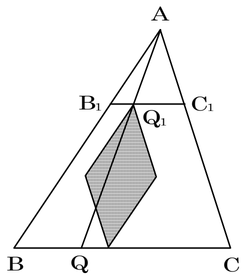
BC 上に点 Q を固定し, $0<p<1$, $0<r<1$ として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

△PQR の重心を G とすると,

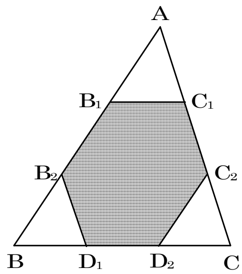
$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+p\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ここで, $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}$ とおき, 線分 $\mathrm{AB_1}$, $\mathrm{AC_1}$ を隣りあう 2 辺とする平行四辺形を $S_A$ とおく。




さて, $p$, $r$ を $0<p<1$, $0<r<1$ を満たすように動かすと, 点 G は, $S_A$ を $\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}$ だけ平行移動した平行四辺形 $S_{Q_1}$ の内部を動く。

ここで, 点 Q を辺 BC 上で点 B から点 C まで動かすと, 点 $\mathrm{Q_1}$ は線分 $\mathrm{B_1C_1}$ 上を点 $\mathrm{B_1}$ から点 $\mathrm{C_1}$ まで動く。その結果, 平行四辺形 $S_{Q_1}$ は平行移動し, その通過領域が点 G の動く範囲である。




以上より, 辺 AB の三等分点を $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, 辺 AC の三等分点を $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$, 辺 BC の三等分点を $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{D_2}$ とおくと, 点 G は六角形 $\mathrm{B_1B_2D_1D_2C_2C_1}$ の内部を動く。

すなわち, 点 G の動く範囲は右図の網点部である。ただし, 境界線は含まない。

## ［解 説］

独立に動く点が 3 つあり, そのうちの 1 つを固定して考えた解です。そのプロセスが記述しにくく, そのため演習するのに適した問題です。

**8** [2006 一橋大]

(1) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=1$より,

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{c}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=9\cdots\cdots\cdots①$$

①において等号が成立するのは，左側では$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{c}$が同じ向きのとき，右側では$\vec{a}$と$\vec{b}$が同じ向きのときである。

よって，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$は最大値9をとる。

また，$||\vec{a}|-|\vec{b}||\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$より，$2\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq 8$となり，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\geqq||\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{c}||\geqq 2-1=1\cdots\cdots\cdots②$$

②において等号が成立するのは，左側では$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{c}$が逆向きのとき，右側では$\vec{a}$と$\vec{b}$が逆向きのときである。

よって，$\vec{b}$，$\vec{c}$が$\vec{a}$と逆向きのとき，$|\vec{z}|$は最小値1をとる。

(2) 条件より，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$なので，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=20$となり，

$$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=20,\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-5\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，③の条件のもとで，

$$|\vec{z}|^2=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$
$$=25+2\times(-5)+|\vec{b}+\vec{c}|^2=15+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$

(1)と同様に，$||\vec{b}|-|\vec{c}||\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{b}|+|\vec{c}|$から，$2\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq 4\cdots\cdots\cdots④$

④の範囲の値は，すべて③を満たしており，$15+4\leqq|\vec{z}|^2\leqq 15+16$から，

$$\sqrt{19}\leqq|\vec{z}|\leqq\sqrt{31}$$

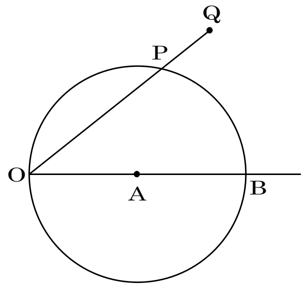
よって，$\vec{b}$，$\vec{c}$が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$は最大値$\sqrt{31}$をとり，$\vec{b}$，$\vec{c}$が逆向きのとき，最小値$\sqrt{19}$をとる。

［解 説］

ベクトルの三角不等式の問題です。(1)で$|\vec{z}|=0$となる場合があれば，この値がもちろん最小値ですが，このようなケースはありませんでした。なお, (2)では，ベクトルの和$\vec{b}+\vec{c}$を変化するベクトルとしてとらえています。

**9** ［2007 大阪大］

(1) 条件(a)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ （$k>0$）




条件(b)に代入すると, $k>0$ より $k|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=1$

これより，$k=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，点 P は OB を直径とする円 $C$ 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$

$$\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $\theta$ とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2r$ なので，③より，

$$2r|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta=\frac{1}{2r}$$

以上より，半直線 OB 上に $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2r}$ となる点 H をとると，点 Q は点 H を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く。

(2) $l$ が $C$ と 2 点で交わる条件は, OH＜OB である。

すると，$\dfrac{1}{2r}<2r$ から，$r>\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

③式は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の OB 方向への正射影ベクトルの大きさが一定という意味でとらえました。なお，原点を O, $x$ 軸を直線 OA とする座標系を導入する方法もあります。

**10**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2007 九州大・理]

(1)　$A(a,\ -a,\ b)$, $B(-a,\ a,\ b)$より，$\overrightarrow{AB}=(-2a,\ 2a,\ 0)$

また，$C(a,\ a,\ -b)$, ABの中点$D(0,\ 0,\ b)$より，

$$\overrightarrow{DC}=(a,\ a,\ -2b),\ \overrightarrow{DO}=(0,\ 0,\ -b)$$

すると，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=-2a^2+2a^2=0$，$\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}=0$から，

$$\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DO}\perp\overrightarrow{AB}$$

よって，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}AB\cdot DC=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+4a^2}\sqrt{a^2+a^2+4b^2}=2a\sqrt{a^2+2b^2}$

(2)　$\overrightarrow{DC}$と$\overrightarrow{DO}$のなす角$\theta$は，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DO}}{|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{DO}|}=\frac{2b^2}{\sqrt{a^2+a^2+4b^2}\cdot b}=\frac{2b}{\sqrt{2a^2+4b^2}}$$

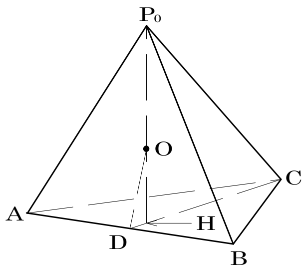
よって，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{4b^2}{2a^2+4b^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

さて, OHは平面$\alpha$に垂直なので，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$となり，

$$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OH})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

すると，$\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AB}$となり，点Hは直線CD上に存在し，

$$OH=DO\sin\theta=\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$




(3)　球面$S$の半径$r$は　$r=OA=OB=OC=\sqrt{2a^2+b^2}$

ここで，HO の延長線と $S$ との交点を$P_0$とおくと，

$S$上の点Pと平面$\alpha$の距離の最大値は$P_0H$となり，

$$P_0H=r+OH=\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

したがって，四面体ABCPの体積の最大値は，

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot P_0H=\frac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right)$$

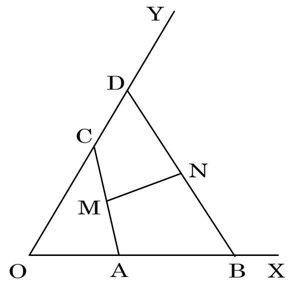
$$=\frac{2}{3}a\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}+ab\right)$$

［解　説］

図示すると，(1)の結論は明らかですが，続く設問への誘導となっています。コンパクトにまとまった１題です。

**11** ［2008 大阪大］

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと，




$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2\right)$

$$=\frac{1}{4}(s^2+2st\cos 60^\circ+t^2)$$

$$=\frac{1}{4}(s^2+st+t^2)$$

よって，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2) $s^2+t^2=1$ $(s>0,\ t>0)$ より，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$s^2+st+t^2=1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

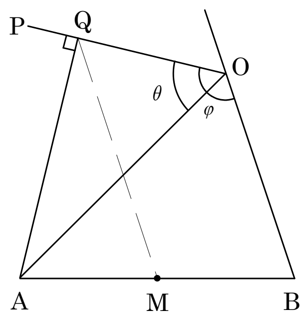
すると，$\sin 2\theta=1$ $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$のとき，$s^2+st+t^2$ は最大値$\frac{3}{2}$をとる。

よって, (1)より, MN の最大値は$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

［解 説］

平面ベクトルの基本題です。$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の表現がポイントとなっています。なお, (2)では, 相加平均と相乗平均の関係を用いても OK です。

**12**　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2009 大阪大・理]




(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を $\theta$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を $\varphi$ とおく。

条件より，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ ………①

すると，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqq\pi$ となり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ から，①より，

$$\cos\theta=-\cos\varphi,\ \cos\theta=\cos(\pi-\varphi)$$

これより，$\theta=\pi-\varphi$ となり，OP は∠AOB の外角の二等分線である。

さて，点 Q は OP 上にあるので, $k$ を正の定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\{\vec{a}+(-\vec{b})\}=k(\vec{a}-\vec{b})\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=y$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y\vec{b}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から,

$$(k\vec{a}-k\vec{b}-x\vec{a})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\ k|\vec{a}-\vec{b}|^2-x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

これより，$k=\dfrac{x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\dfrac{x|\vec{a}|^2-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{x-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\dfrac{x}{2}$ となり，②より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

そこで, M は辺 AB の中点から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})-\frac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}=-\Big(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\Big)\vec{b}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行である。

(2)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\Big|\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}\Big||\vec{b}|=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$

［解 説］

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるのに注目し，ひし形の対角線が角を二等分するという定理をベースにした解です。

**13** ［2010 広島大・文］

(1) 直線 $y=-\frac{4}{3}x+k$ 上の点 Q の $x$ 座標を $t$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t,\ -\frac{4}{3}t+k\right)$ となり，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 3)$ から，

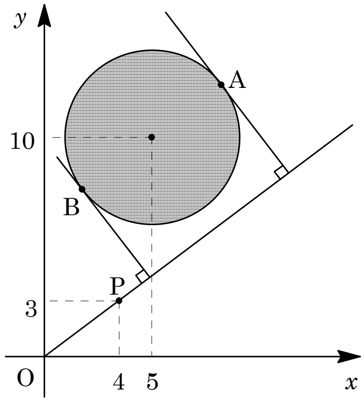
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4t+3\left(-\frac{4}{3}t+k\right)=3k$$

(2) まず，直線 OP の方程式は，$y=\frac{3}{4}x$ であり，この直線と直交する直線の方程式は，

$$y=-\frac{4}{3}x+k,\ 4x+3y-3k=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のなす角を $\theta$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向への正射影ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とするとき，$\theta$ が鋭角ならば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\cos\theta=5|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$




ここで，点 R は，領域 $(x-5)^2+(y-10)^2\leqq16$ にあるので，右図から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が最大となるのは点 R が点 A に一致するときであり，また最小となるのは点 R が点 B に一致するときである。

いずれの場合も，直線(＊)は円 $(x-5)^2+(y-10)^2=16$ に接することより，

$$\frac{|4\cdot5+3\cdot10-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4,\ |50-3k|=20$$

これより，$3k=70,\ 30$ となるので，(1)の結果を利用すると，

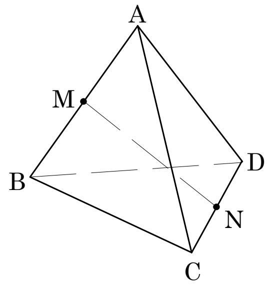
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=70,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=30$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値は 70，最小値は 30 である。

### ［解 説］

よく見かける内積の最大・最小の問題ですが，(1)が(2)への秀逸な誘導となっています。演習の価値ある 1 題です。

**14** ［2010 東北大］




(1) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ より，$\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}$ となり，

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}=\vec{0}$

これより，$\overrightarrow{NM}=\vec{0}$ となり，題意を満たさない。

よって，点 P は存在しない。

(2) $|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ から, (1)と同様にすると，

$|\overrightarrow{QM}|=|\overrightarrow{QN}|$

よって，点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

(3) まず，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MR}|^2+|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MR}|^2$

$=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MR}-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}$

$=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MR}$

$=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2$

同様にして，$|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{NR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN}|^2$

$=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$

すると，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ より，

$2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$

よって，$2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=|\overrightarrow{NC}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2$ ……(＊)となり，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定である。

(4) 点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は，$|\overrightarrow{RM}|=|\overrightarrow{RN}|$ であり，

$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MR}|^2$，$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+|\overrightarrow{MR}|^2$

(＊)を代入して，$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2-|\overrightarrow{MN}|^2+|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MR}|^2$

$|\overrightarrow{MA}|^2-|\overrightarrow{NC}|^2=0$，$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{NC}|$

よって，$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|$ から，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ である。

［解 説］

(4)まで，うまく誘導のついている問題です。ただ，(3)の式変形によっては，不運なケースが出てくる可能性もあります。

**15** [2011 千葉大・理]

(1) G は△ABC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ………①

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

ここで，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ……②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$ となり，△ABC の外心 O は M と一致する。

したがって，△ABC は$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形である。

(2) 条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで，②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3k-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，$k\neq\dfrac{1}{3}$ より，3 点 O, A, M は同一直線上にある。一方，O は△ABC の外心なので，辺 BC の垂直二等分線上にあり，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ となるので，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

(3) まず, O と M が一致しないとき, (2)より，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ ………③

ここで，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ または $\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ のとき

O と I が一致し，③より，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(ii) $\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ のとき

③より, O, I, M は同一直線上にあり，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)(ii)より，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

次に，O と M が一致するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{MI}}\neq\vec{0}$ なので，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

よって，いずれの場合も $\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ であり，これより $\mathrm{IB}=\mathrm{IC}$ となり，

$$\angle\mathrm{IBC}=\angle\mathrm{ICB},\ 2\angle\mathrm{IBC}=2\angle\mathrm{ICB},\ \angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$$

したがって，△ABC は二等辺三角形である。

［解 説］

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。

**16** ［2012 東北大・文］

(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$より，

$$|\vec{c}|^2=|p\vec{a}+q\vec{b}|^2=p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=p^2-pq+q^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=p-\frac{1}{2}q$$

すると，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$から，$p^2-pq+q^2=1$ ……①，$p-\dfrac{1}{2}q=0$ ……②

①②より，$p^2-2p^2+4p^2=1$，$p^2=\dfrac{1}{3}$となり，$p>0$から，

$$p=\frac{1}{\sqrt{3}},\ q=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2) $\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{x}=s-\dfrac{1}{2}t$，$\vec{b}\cdot\vec{x}=-\dfrac{1}{2}s+t$となる。

条件から，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$なので，

$$-1\leqq s-\frac{1}{2}t\leqq1\ \cdots\cdots\cdots①,\ 1\leqq-\frac{1}{2}s+t\leqq2\ \cdots\cdots\cdots②$$

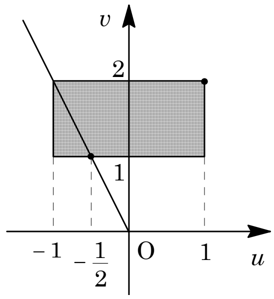
ここで，$u=s-\dfrac{1}{2}t$，$v=-\dfrac{1}{2}s+t$とおくと，$s=\dfrac{2}{3}(2u+v)$，$t=\dfrac{2}{3}(u+2v)$

①②より，$-1\leqq u\leqq1$，$1\leqq v\leqq2$ ………③

さて，$|\vec{x}|^2=s^2-st+t^2$なので，

$$|\vec{x}|^2=\frac{4}{9}\{(2u+v)^2-(2u+v)(u+2v)+(u+2v)^2\}$$

$$=\frac{4}{3}(u^2+uv+v^2)$$




すると，③は右図の網点部となるので，$(u,\ v)=(1,\ 2)$のとき，$|\vec{x}|^2$は最大値$\dfrac{4}{3}(1+2+4)=\dfrac{28}{3}$をとる。

また，$|\vec{x}|^2=\dfrac{4}{3}\left(u+\dfrac{1}{2}v\right)^2+v^2$から，$v$ をいったん固定すると，$|\vec{x}|^2$が最小となるのは，$u=-\dfrac{1}{2}v$ $(v=-2u)$のときであり，この関係を満たしながら，$1\leqq v\leqq2$で$v$を変化させると，$(u,\ v)=\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$で最小値 1 をとる。

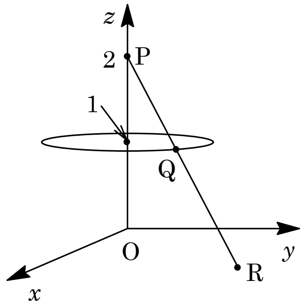
以上より，$1\leqq|\vec{x}|^2\leqq\dfrac{28}{3}$となり，$1\leqq|\vec{x}|\leqq\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$である。

［解 説］

成分表示を用いるか，そのまま 1 次結合で計算を進めるかを迷いましたが，後者の立場で記しました。なお，(2)の $u$, $v$ への置き換えは，1 文字固定という方法で最大・最小を求めるときに，領域を長方形にしてわかりやすくするためです。

**17** ［2012 一橋大］

(1) P(0, 0, 2)，Q($s$, $t$, 1)，R($x$, $y$, 0) とおくと，条件より，$s^2+t^2=1$ ………①




また，線分 PR の中点が Q より，

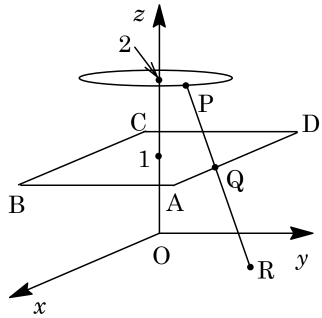
$$\frac{x}{2}=s\text{ ………②},\ \ \frac{y}{2}=t\text{ ………③}$$

②③を①に代入すると，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$ から，

$$x^2+y^2=4$$

よって，点 R の軌跡の方程式は，$x^2+y^2=4$，$z=0$

(2) P($p$, $q$, 2)，Q($s$, $t$, 1)，R($x$, $y$, 0) とおくと，条件より，$p^2+q^2=1$ ………④




また，線分 PR の中点が Q より，

$$\frac{x+p}{2}=s\text{ ………⑤},\ \ \frac{y+q}{2}=t\text{ ………⑥}$$

⑤⑥より，$p=2s-x$，$q=2t-y$

④に代入すると，$(2s-x)^2+(2t-y)^2=1$

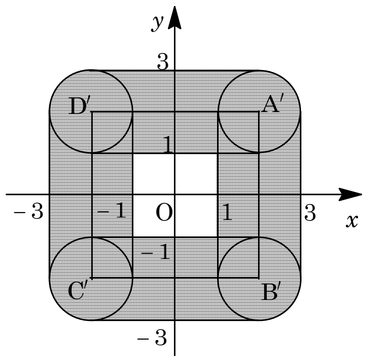
$$(x-2s)^2+(y-2t)^2=1\text{ ………⑦}$$

さて，点 Q が辺 AB 上にあるとき，

$$s=1,\ -1\leqq t\leqq 1$$

⑦より，$(x-2)^2+(y-2t)^2=1$ となり，点 R は $xy$ 平面上で，中心 $(2,\ 2t,\ 0)$，半径 1 の円を描く。なお，$-2\leqq 2t\leqq 2$ より，中心は点 A′(2, 2, 0) と B′(2, −2, 0) を結ぶ線分上にある。

さらに，点 C′(−2, −2, 0)，D′(−2, 2, 0) とおき，同様に考えると，Q が正方形 ABCD の辺上を動くとき，点 R は中心が正方形 A′B′C′D′ の辺上で半径が 1 の円周上を動く。




すると，点 R の動きうる領域は右図の網点部となり，その面積を $S$ とすると，

$$S=4\left\{3^2-1^2-\left(1^2-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=28+\pi$$

［解 説］

20 年前に，よく見かけた問題です。(2)は，まず Q を固定して R の変化をとらえ，その状態を保ったまま Q を動かすという手法です。

$\boxed{18}$ [2013 一橋大]

点 $\mathrm{A}(2t,\ 2t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ t)$ に対して，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\ &=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\ &=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{3}\end{aligned}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ なので,

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ となり，

$$\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1=\frac{1}{9}\{(2t)^2+(2t)^2+t^2\}+1=t^2+1$$

すると，$(*)$から，点 P は中心 $\mathrm{C}\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ で半径 $r=\sqrt{t^2+1}$ の球面を描く。

このとき，OP の最大値は 3 なので，$\mathrm{OC}+r=3$ となり，$t>0$ から，

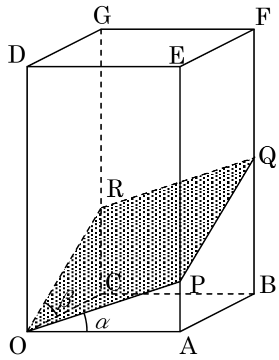
$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{1}{3}t\right)^2}+\sqrt{t^2+1}=3\,,\ \sqrt{t^2+1}=3-t$$

$0<t<3$ のもとで両辺を 2 乗すると，$t^2+1=9-6t+t^2$ となり，$t=\dfrac{4}{3}$ である。

［解 説］

球面のベクトル方程式が題材です。成分計算を最初から行うのは，得策とはいえません。

**19** ［2014 東京大・理］




(1) O を原点とし, OA, OC, OD をそれぞれ $x$ 軸, $y$ 軸, $z$ 軸の正の部分とすると，A$(1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$ となる。

条件より，$\mathrm{AP}=\tan\alpha$，$\mathrm{CR}=\tan\beta$ なので,

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ \tan\alpha),\ \mathrm{R}(0,\ 1,\ \tan\beta)$$

さて，OP // RQ，OR // PQ から，四角形 OPQR は平行四辺形となり，その面積 $S$ は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$$
$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

(2) 条件より，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\tan(\alpha+\beta)=1$ となり，

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1,\ \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$S=\dfrac{7}{6}$ なので, (1)から，$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$ となり，

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\{1-(\tan\alpha+\tan\beta)\}=\dfrac{13}{36}$ となり，

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2+2(\tan\alpha+\tan\beta)-\frac{85}{36}=0$$

$$\left(\tan\alpha+\tan\beta+\frac{17}{6}\right)\left(\tan\alpha+\tan\beta-\frac{5}{6}\right)=0$$

$\tan\alpha+\tan\beta>0$ より，$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}\ \cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\tan\alpha\tan\beta=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots④$

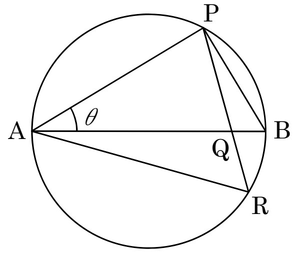
すると，③④から，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$ の 2 つの解となり，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$ から，$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}$ である。

さらに，$\alpha\leqq\beta$ から，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ である。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。誘導が丁寧な構成となっています。なお, 図から「四角柱は直方体」として解いています。

**20** ［2015 大阪大・文］




(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, AB が直径なので $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ より,

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos\theta=2\cos\theta$$

すると，条件より，$\mathrm{AQ}=2\cos\theta$，$\mathrm{BQ}=2-2\cos\theta$

また，$\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{1}{2}(\pi-\theta)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ から,

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AQ}\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\Big)=4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RQ}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BQ}$ となり，

$$4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathrm{RQ}=2\cos\theta(2-2\cos\theta),\ \ \mathrm{RQ}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

そこで，△AQR の面積を $S$ とすると，$\angle\mathrm{AQR}=\pi-\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$ より，

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cos\theta\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\Big)=2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

(2) (1)より, $S$ が最大になるのは，$\sin2\theta=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

このとき，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=4\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{8}:2\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}:1$ となり，点 R は線分 PQ を $(\sqrt{2}+1):1$ に外分することより，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\sqrt{2}+1)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(\sqrt{2}+1)-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

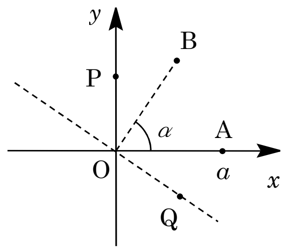
また，$\mathrm{AQ}=2\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

［解 説］

よく見かける構図の三角関数の図形への応用問題です。上記以外にも，いろいろな解法が考えられます。たとえば，点 A を原点，点 B を $x$ 軸上の点として $xy$ 平面で，ということも脳裏に浮かびましたが，計算量を考えて……。

**21** ［2015 北海道大・文］




(1) まず，$a>0$，$r>0$，$0<\alpha<\pi$ として，$xy$ 平面上で，
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=r(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ とおく。

すると，条件より，$p\neq 0$，$q\neq 0$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ p),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q(\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直なので，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(q\sin\alpha,\ p-q\cos\alpha)$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(r\cos\alpha-a,\ r\sin\alpha)$ から，

$$q\sin\alpha(r\cos\alpha-a)+(p-q\cos\alpha)r\sin\alpha=0$$

$\sin\alpha>0$ より，$q(r\cos\alpha-a)+r(p-q\cos\alpha)=0$，$pr-aq=0$ ………(＊)

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=pr\sin\alpha$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=aq\sin\alpha$ なので，(＊)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $\beta$ $(0<\beta<\pi)$ とおくと，$\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{-pq\cos\alpha}{|p||q|}$

ここで，(＊)から $p$ と $q$ は同符号なので，$|p||q|=|pq|=pq$ となり，

$$\cos\beta=\frac{-pq\cos\alpha}{pq}=-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{2}<\pi-\alpha<\pi$ となるので，$\beta=\pi-\alpha$ である。

(3) (＊)より，$pr=aq$ となり，$r|p|=a|q|$ である。

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ から，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ となる。

［解 説］

まず，2 つの垂直関係から，座標の設定という方法を考えました。しかし，(1)を解くと，その考え方を採用するほどでもないことがわかり，それで押し通そうとも思ったのですが，(3)で暗雲が漂いはじめました。ということで，リセットして……。

$\boxed{22}$ ［2015 一橋大］

(1) 原点が中心で $xy$ 平面上の半径 1 の円周上の点 P は，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ と表せる。ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ である。また，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ が中心で $xz$ 平面上の半径 1 の円周上の点 Q は，$\mathrm{Q}(\cos\varphi,\ 0,\ \sqrt{3}+\sin\varphi)$ と表せる。ただし $0 \leqq \varphi < 2\pi$ である。

$$\mathrm{PQ}^2 = (\cos\theta - \cos\varphi)^2 + \sin^2\theta + (\sqrt{3}+\sin\varphi)^2$$
$$= 1 - 2\cos\theta\cos\varphi + 1 + 3 + 2\sqrt{3}\sin\varphi = -2\cos\theta\cos\varphi + 2\sqrt{3}\sin\varphi + 5$$

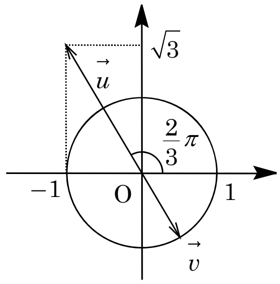
ここで，$\vec{u} = (-\cos\theta,\ \sqrt{3})$，$\vec{v} = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおくと，

$$\mathrm{PQ}^2 = 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 5$$

さて，まず $\theta$ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ で固定して考えると，線分 PQ の長さが最小となるのは，$\vec{v}$ が $\vec{u}$ と逆向きになるときである。このとき $\mathrm{PQ}^2$ の最小値は，

$$2\sqrt{\cos^2\theta + 3}\cdot 1\cdot\cos\pi + 5 = -2\sqrt{\cos^2\theta+3} + 5$$

さらに，$0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1$ から，$\cos\theta = \pm 1$ のとき，$\mathrm{PQ}^2$ は最小値 $-2\sqrt{1+3}+5 = 1$，すなわち PQ は最小値 1 をとる。




(i) $\cos\theta = 1\ (\theta = 0)$ のとき

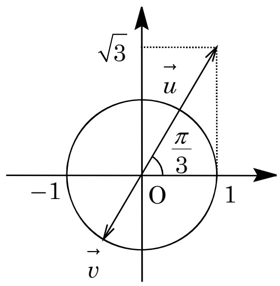
$\vec{u} = (-1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi + \pi = \dfrac{5}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(ii) $\cos\theta = -1\ (\theta = \pi)$ のとき

$\vec{u} = (1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$




(2) (1)より，線分 PQ の長さが最大となるのは，$\vec{v}$ が $\vec{u}$ と同じ向きになるときである。このとき $\mathrm{PQ}^2$ の最大値は，

$$2\sqrt{\cos^2\theta+3}\cdot 1\cdot\cos 0 + 5 = 2\sqrt{\cos^2\theta+3} + 5$$

さらに $\cos\theta = \pm 1$ のとき，$\mathrm{PQ}^2$ は最大値 $2\sqrt{1+3}+5 = 9$，PQ は最大値 3 をとる。

(i) $\cos\theta = 1\ (\theta = 0)$ のとき　$\vec{u} = (-1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

(ii) $\cos\theta = -1\ (\theta = \pi)$ のとき　$\vec{u} = (1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ となるので，

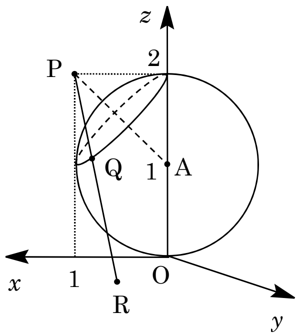
$$\mathrm{P}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

［解 説］

1 文字固定の最大・最小問題です。内積の定義を利用して，図で考えています。

$\boxed{23}$ ［2015 京都大・文］

中心を $A(0,\ 0,\ 1)$ とする半径 1 の球面 $S$ 上にあり，点 $(0,\ 0,\ 2)$ 以外を動く点 Q に対し，点 $P(1,\ 0,\ 2)$ と点 Q を結ぶ直線 $l$ が平面 $z=0$ と交わる点を $R(x,\ y,\ 0)$ とおく。




そして，$\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を $\theta$ とし，直線 $l$ が球面 $S$ に接するとき，$\theta=45^\circ$ であることに注目すると，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PR}=|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PR}|\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PR}|\cdots\cdots\cdots①$$

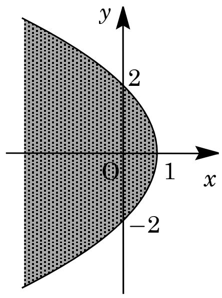
ここで，$\overrightarrow{PA}=(-1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{PR}=(x-1,\ y,\ -2)$ から，

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PR}=-(x-1)+2=-x+3,\ |\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(-1)^2+0+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+5}$$

①に代入すると，$-x+3=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2-2x+5}$ となり，$x\leqq 3$ のもとで，

$$(-x+3)^2=x^2+y^2-2x+5,\ x=-\frac{1}{4}y^2+1\cdots\cdots\cdots②$$



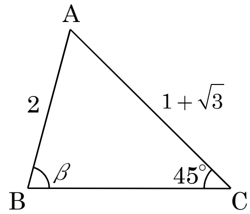

②は $x\leqq 3$ を満たし，点 Q が球面 $S$ 上を動くとき，点 R の動く範囲は，②を境界線とし原点を含む側である。

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

［解 説］

20 年以上も前になりますが，そのころ頻出していた点光源の問題です。内積を用いて円錐側面の式を立て，境界線を導いています。この方法の詳細は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

**24**　　［2016 北海道大・文］




(1)　△ABC に正弦定理を適用して，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$ から，

$$\sin\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

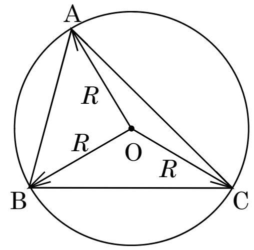
$$=1-\frac{2+\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$2<1+\sqrt{3}$ より $45^\circ<\beta$ であり，しかも $\beta<180^\circ-45^\circ=135^\circ$ から，

$$45^\circ<\beta<135^\circ,\ \ 90^\circ<2\beta<270^\circ$$

すると，(＊)から $2\beta=150^\circ$，$210^\circ$ なので，$\beta=75^\circ$，$105^\circ$

(3)　△ABC は鋭角三角形なので，$\beta=75^\circ$ である。




また，O は△ABC の外接円の中心より，

$$\angle\mathrm{AOB}=2\times45^\circ=90^\circ,\ \ \angle\mathrm{AOC}=2\beta=150^\circ$$

$$\angle\mathrm{BOC}=360^\circ-90^\circ-150^\circ=120^\circ$$

さらに，外接円の半径を $R$ とすると，正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=2R,\ \ R=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\sqrt{2})^2\cos 90^\circ=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos150^\circ=-\sqrt{3},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos120^\circ=-1$$

さて，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，

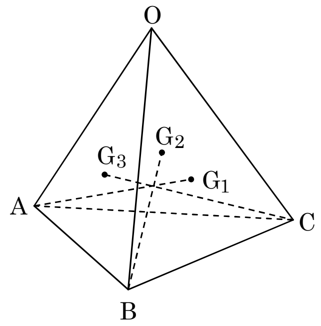
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2s,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2t$$

よって，$2s=-\sqrt{3}$，$2t=-1$ となり，$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t=-\dfrac{1}{2}$

［解　説］

三角比とベクトルの融合問題です。(3)では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に注目して，内積の値で処理をしました。他にも，ベクトルの大きさに注目する方法が考えられます。

**25** ［2016 京都大・文］




まず，四面体 OABC の面 OBC，面 OCA，面 OAB の重心を，それぞれ $G_1$，$G_2$，$G_3$ とおく。

また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},$$

すると，$\overrightarrow{AG_1}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

ここで，条件より，A から面 OBC に下ろした垂線の足が $G_1$ なので，$\overrightarrow{AG_1}\perp\overrightarrow{OB}$ かつ $\overrightarrow{AG_1}\perp\overrightarrow{OC}$ となり，

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\text{①}$$

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\cdots\cdots\text{②}$$

同様に，$\overrightarrow{BG_2}=\frac{1}{3}(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$ から，$\overrightarrow{BG_2}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{BG_2}\perp\overrightarrow{OC}$ なので，

$$\overrightarrow{BG_2}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ |\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\text{③}$$

$$\overrightarrow{BG_2}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}-3\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\cdots\cdots\text{④}$$

さらに，$\overrightarrow{CG_3}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$ から，$\overrightarrow{CG_3}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{CG_3}\perp\overrightarrow{OB}$ なので，

$$\overrightarrow{CG_3}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\text{⑤}$$

$$\overrightarrow{CG_3}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\text{⑥}$$

すると，①⑥より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，②④より $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，③⑤より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ となり，$k$ を定数として，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=k\cdots\cdots\text{⑦}$$

これより，①⑥は $|\vec{b}|^2=2k$，②④は $|\vec{c}|^2=2k$，③⑤は $|\vec{a}|^2=2k$ となり，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2k}\cdots\cdots\text{⑧}$$

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BOC$ から，⑦⑧を代入すると，$k=(\sqrt{2k})^2\cos\angle BOC$

$$\cos\angle BOC=\frac{1}{2},\ \angle BOC=\frac{\pi}{3}$$

同様にすると，$\angle COA=\angle AOB=\frac{\pi}{3}$ となり，四面体 OABC の面はすべて合同な正三角形である。すなわち，四面体 OABC は正四面体である。

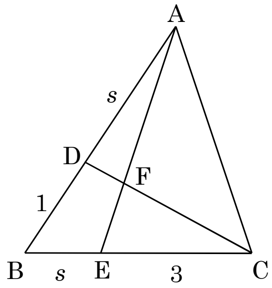
［解 説］

空間ベクトルの四面体への応用問題です。連立方程式をまとめていくのがポイントです。

$\boxed{26}$ ［2017 東北大］

(1)　△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}$$




条件より，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=s:3$ なので，

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}=\frac{s(s+3)}{3}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり，

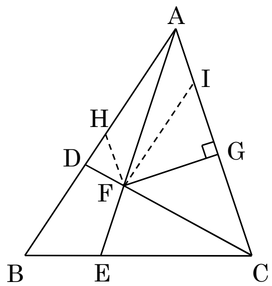
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}=\frac{s}{s^2+3s+3}\left(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

ここで，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，

$$\alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\quad \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots①$$




さて，F から辺 AC に垂線 FG を下ろすと，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}$，$\mathrm{FG}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{AC}}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，FG の長さが最大となるのは $\alpha$ が最大となるときで，(1)の結果を $\alpha=\dfrac{3}{s+3+\frac{3}{s}}$ と変形すると，相加平均と相乗平均の関係より，

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}$$

ただし，等号は $s=\dfrac{3}{s}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成立し，これより，

$$\alpha=\frac{3}{s+3+\frac{3}{s}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{3}-3$$

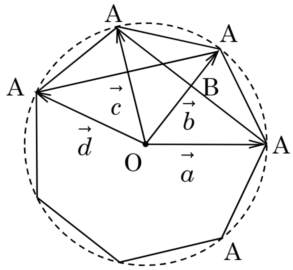
よって，FG の長さが最大となるときの $s$ の値は $s=\sqrt{3}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用問題で，頻出の構図です。解答例では図形的に処理をしましたが，(1)では分点ベクトル，(2)では内積を用いても，記述量はやや増加する程度です。

$\boxed{27}$ [2017 千葉大]

(1) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 $n$ 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 $OA_2$ は線分 $A_1A_3$ の垂直二等分線であり，$OA_2$ と $A_1A_3$ との交点を $B_2$ とおくと，



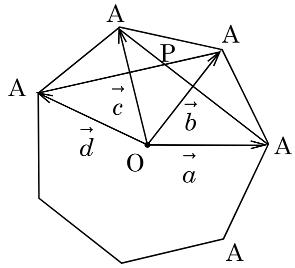

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 $OA_3$ は線分 $A_2A_4$ の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。

(2) まず，P は線分 $A_1A_3$ を $t:1-t$ に内分するので，




$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 $A_4A_2$ を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3) 条件から，$A_1P:PA_3=t:1-t$ より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2\cdots\cdots\cdots③$

また，$A_2P:PA_4=1-t:t$ より，$\triangle PA_1A_2=(1-t)\triangle A_1A_2A_4\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

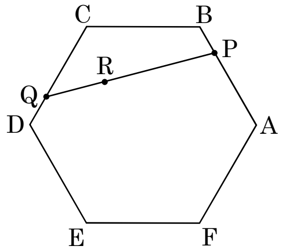
$$\frac{(1-t)^2}{t}-\frac{1}{12}=\frac{12t^2-25t+12}{12t}=\frac{(3t-4)(4t-3)}{12t}>0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\dfrac{(1-t)^2}{t}>\dfrac{1}{12}$ である。

［解 説］

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

$\boxed{28}$ ［2017 東京大・文］




1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の辺 AB 上を点 P，辺 CD 上を点 Q が独立に動くとき，$0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$ として，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=p:1-p$，$\mathrm{DQ}:\mathrm{QC}=q:1-q$ とおく。

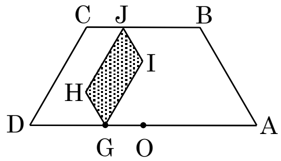
さて，AD の中点を O とし，$\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=2:1$ から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+q\overrightarrow{\mathrm{DC}})\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}\end{aligned}$$

ここで，AD を $2:1$ に内分する点を G とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{GR}}=\frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

そこで，$0\leqq\frac{1}{3}p\leqq\frac{1}{3}$，$0\leqq\frac{2}{3}q\leqq\frac{2}{3}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおくと，点 R は右図の平行四辺形 GIJH の内部または辺上を動く。



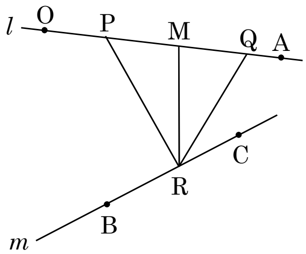

$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\frac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GI}}|=\frac{2}{3}$，$\angle\mathrm{HGI}=\frac{\pi}{3}$ より，その面積は，

$$2\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

［解 説］

平面ベクトルと領域の問題です。成分表示を利用するかどうかで，2 つの解法があります。この問題ではどちらでも可能ですが，前者は後者に比べ，記述量がかなり増えます。

**29** ［2017 京都大・文］




原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線 $l$ 上に 2 点 P, Q, 点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線 $m$ 上に点 R がある。ここで, 線分 PQ の中点を M とするとき, △PQR が正三角形より, その面積は,

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{MR}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}^2$$

すると, △PQR の面積が最小となるのは, MR が最小の場合である。すなわち, $\mathrm{MR}\perp l$ かつ $\mathrm{MR}\perp m$ である。

そこで, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,\ -4)=-2(1,\ 0,\ 2)$ なので, $t,\ s$ を実数とすると, 直線 $l,\ m$ は,

$$l:(x,\ y,\ z)=t(0,\ -1,\ 1),\ m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+s(1,\ 0,\ 2)$$

これより, M$(0,\ -t,\ t)$, R$(s,\ 2,\ 1+2s)$ とおけ, $\overrightarrow{\mathrm{MR}}=(s,\ 2+t,\ 1+2s-t)$

さて, $\mathrm{MR}\perp l$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ となり,

$$-2-t+1+2s-t=0,\ -2t+2s=1\cdots\cdots\cdots①$$

また, $\mathrm{MR}\perp m$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり,

$$s+2(1+2s-t)=0,\ -2t+5s=-2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $s=-1$, $t=-\frac{3}{2}$ となり, M$\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, R$(-1,\ 2,\ -1)$ である。

これより, $\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ から, $|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

すると, $\mathrm{PQ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}$ となり, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ から, 点 P, Q の座標は,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)\\&=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

よって, P$(0,\ 1,\ -1)$, Q$(0,\ 2,\ -2)$, または P$(0,\ 2,\ -2)$, Q$(0,\ 1,\ -1)$ である。

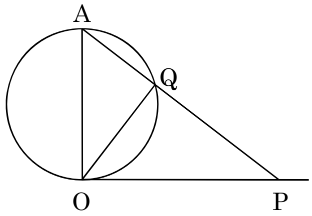
［解 説］

高校数学に「代数・幾何」という科目があったころの頻出題の 1 つです。ポイントは, 正三角形の中線がねじれの位置にある $l$ と $m$ の共通垂線ということです。なお, 最後の点 P, Q の座標を求める計算は, 単位ベクトルを利用しています。

**30** ［2017 東京医歯大］

(1) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$に対し，線分 OA が直径の球面$\sigma$は，中心$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$より，その方程式は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$




(2) $xy$ 平面上の点 $\mathrm{P}(\mathrm{P}\neq\mathrm{O})$ に対して, 3 点 O, A, P を含む平面を考えると，この平面による球面$\sigma$の切り口は OA が直径の円となるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ である。

(3) $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$とおき，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QP}=t:1-t\ (0<t<1)$とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x,\ y,\ 0)$$
$$=(tx,\ ty,\ 1-t)\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ -1)$ から，

$$tx^2+ty^2-(1-t)=0\ ,\ t=\frac{1}{x^2+y^2+1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\mathrm{S}(p,\ q,\ r)\ (r\neq 0)$から$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=(p,\ q,\ r-1)$となり，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=-\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ より，

$$p^2+q^2+r(r-1)=-(p^2+q^2+r^2)\ ,\ 2(p^2+q^2+r^2)=r\ \cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}\perp\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ なので，①から$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=(tx-p,\ ty-q,\ 1-t-r)$となり，

$$p(tx-p)+q(ty-q)+r(1-t-r)=0$$
$$ptx+qty+r(1-t)=p^2+q^2+r^2\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$2ptx+2qty+2r(1-t)=r$，$2ptx+2qty-2tr+r=0$

②を代入すると，$\dfrac{2px}{x^2+y^2+1}+\dfrac{2qy}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2r}{x^2+y^2+1}+r=0$となり，

$$2px+2qy-2r+r(x^2+y^2+1)=0\ ,\ x^2+y^2-1+\frac{2p}{r}x+\frac{2q}{r}y=0$$

$$\left(x+\frac{p}{r}\right)^2+\left(y+\frac{q}{r}\right)^2=\frac{p^2+q^2+r^2}{r^2}$$

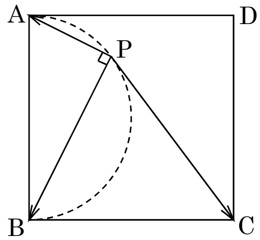
ここで，③から$r>0$となり，$\left(x+\dfrac{p}{r}\right)^2+\left(y+\dfrac{q}{r}\right)^2=\dfrac{1}{2r}$

したがって，点 P は $xy$ 平面上で，中心$\left(-\dfrac{p}{r},\ -\dfrac{q}{r},\ 0\right)$，半径$\dfrac{1}{\sqrt{2r}}$の円を描く。

［解 説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。上の解答例は，成分計算を主体として記述しています。

**31** ［2018 千葉大・理］




(1) 正方形 ABCD の内部の点 P は，PA ⊥ PB を満たすので，

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$………①

また，$\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\alpha|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$………②

さて，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ から，

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}=x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}$

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ より $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ となり，①②から，

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+\alpha^2(y-1)^2|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2$

$1+\alpha^2=x^2+\alpha^2(y-1)^2$………③

また，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $(\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}})\cdot\{x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+(y-1)\overrightarrow{\mathrm{PB}}\}=0$ となり，①②から，

$x|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-\alpha^2(y-1)|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=0$，$x-\alpha^2(y-1)=0$………④

さらに，直線 PB に関して，点 A と点 C は反対側にあるので，$x<0$………⑤

③④より，$1+\alpha^2=\alpha^4(y-1)^2+\alpha^2(y-1)^2$ となり，$\alpha^2(y-1)^2=1$

$y-1=\pm\dfrac{1}{\alpha}$，$x=\pm\alpha$ （複号同順）

すると，⑤より，$x=-\alpha$，$y=1-\dfrac{1}{\alpha}$

(2) (1)より，$x+y=-\alpha+1-\dfrac{1}{\alpha}=1-\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)$ となる。

ここで，$\alpha>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\geqq 2$ となり，

$x+y\leqq 1-2=-1$

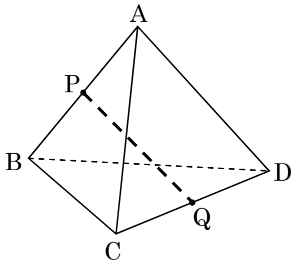
等号成立は，$\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$ すなわち $\alpha=1$ のときである。

以上より，$x+y$ の最大値は $-1$ であり，このとき，②から $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$ となり，点 P は正方形 ABCD の対角線の交点に位置する。

［解 説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。対象が正方形なので，座標の設定という方法も考えられますが，ここでは①②を利用して $x$，$y$ の連立方程式を立てるという方針で記しました。

**32** ［2018 京都大］




(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく。

まず, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ より, $|\vec{c}|=|\vec{d}-\vec{b}|$ となり,

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2\cdots\cdots\cdots①$$

また, $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ より, $|\vec{d}|=|\vec{c}-\vec{b}|$ となり,

$$|\vec{d}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{b}|^2$ となり,

$$|\vec{b}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$

さて, 点 P, 点 Q は, それぞれ辺 AB, 辺 CD の中点なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(-|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d})$

すると, ③から $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となるので, $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{AB}$ である。

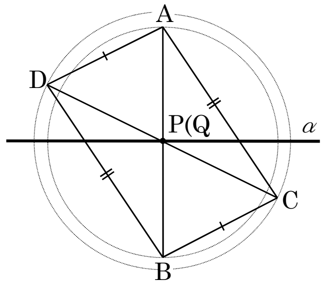
(2) ①③より, $|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$ となり,

$$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}(-\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})\cdot(-\vec{c}+\vec{d})=\frac{1}{2}(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d}-|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2)$

すると, ④から $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ となるので, $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{CD}$ である。

これより, 線分 PQ を軸として四面体 ABCD を $180°$ 回転すると, 頂点 A は B, 頂点 B は A, 頂点 C は D, 頂点 D は C に一致する。すなわち, 四面体 ABCD は線分 PQ を軸とした回転対称になっている。




よって, 線分 PQ を含む平面 $\alpha$ で四面体 ABCD を 2 つの部分に分けたとき, 線分 PQ を軸として, その一方を $180°$ 回転すると, もう一方に重なる。言い換えると, $\alpha$ によって分けられた 2 つの部分の体積は等しい。

［解 説］

立体の性質に関する問題です。(1)はオーソドックスにベクトルを利用した解で記しました。(2)では, (1)と同様に考えると, $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{CD}$ になることが推測できます。それを示した後, 半直線 QP 上に視点をもってくると上図のようになり, 回転対称という構図が見えてきます。