2019 入試対策

2次数学アーカイブ

積分の応用

理系

2001−2018

外林康治 編著

電送数学舎

積分の応用

【問題一覧】

$\boxed{1}$　空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は１辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0<r\leqq\sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1)　高さが $z=t\ (-r\leqq t\leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2)　K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3)　$0<r\leqq\sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。　［2001 九州大］

$\boxed{2}$　曲線 $y=x(1-x)\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1)　水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(2)　空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。　［2001 筑波大］

$\boxed{3}$　関数 $f(x)$ の第２次導関数はつねに正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離１の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1)　$\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2)　$\alpha(t),\ \beta(t)$ を求めよ。

(3)　t が a から b（$a<b$）まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ $L_1,\ L_2$ とする。L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。　［2001 九州大］

$\boxed{4}$　(1)　$x\geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　極方程式 $r=\theta\ (\theta\geqq 0)$ で定義される曲線の，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを求めよ。

［2002 京都大］

5 xyz 空間内に 2 点 $\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$，$\mathrm{Q}(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2})$ を考える。u が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u,\ 0,\ 0)\ (0 \leqq u \leqq 1)$ と線分 PQ の距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

［2003 東北大］

6 xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に，平面 $z=0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。

［2003 東京大］

7 n を 3 以上の自然数とする。点 O を中心とする半径 1 の円において，円周を n 等分する点 P_0，P_1，…，P_{n-1} を時計回りにとる。各 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接するような放物線を C_i とする。ただし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_0$ とする。放物線 C_1，C_2，…，C_n によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

［2004 大阪大］

8 $f(x)$ は $x \geqq 0$ で連続で，$f(0)=0$ かつ $x>0$ において $f'(x)>0$ を満たすとする。$t>0$ に対して，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=t$ とで囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $X(t)$，曲線 $y=f(x)$ と y 軸および直線 $y=f(t)$ とで囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $Y(t)$ とする。また，$X(0)=Y(0)=0$ とする。このとき，次を示せ。

(1) $X'(t)=\pi f(t)^2$，$Y'(t)=\pi t^2 f'(t)\ (t>0)$ である。

(2) $f(x)$ が整式でかつ，すべての $t \geqq 0$ に対して $X(t)=Y(t)$ が成り立つならば，$f(x)=x\ (x \geqq 0)$ である。

(3) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ならば，$X(t)=Y(t)\ (t \geqq 0)$ である。

［2004 筑波大］

9　座標空間に定点A$(1,\ 0,\ 0)$をとる。点P$(x,\ y,\ z)$から yz 平面に下ろした垂線の足を H とする。$k>1$ である定数 k に対して，PH : PA $= k : 1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。

(2)　S のうちで，$y\geqq 0$ かつ $z=0$ を満たす部分を C とする。S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ。

(3)　S で囲まれる立体の体積を求めよ。　[2004 岡山大]

10　D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a)　D の中心は C 上にある。

(b)　D が乗っている平面は常にベクトル$(0,\ 1,\ 0)$と直交する。　[2005 東京工大]

11　r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2\leqq r^2,\quad y^2+z^2\geqq r^2,\quad z^2+x^2\leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。　[2005 東京大]

12　座標平面において，原点O$(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，点P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$と点Q$(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$における C_1 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ である。l_1 と l_2 の交点をR$(\alpha,\ \beta)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標 α，β を θ の式で表せ。

(2)　θ を $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき，直線 $y=\sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006 岡山大]

13　xyz 空間に 3 点P$(1,\ 1,\ 0)$，Q$(-1,\ 1,\ 0)$，R$(-1,\ 1,\ 2)$をとる。次の問いに答えよ。

(1)　t を $0<t<2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と，△PQR の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2)　△PQR を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。[2006 神戸大]

14 座標空間において，$|x| \leqq z^2$ を満たす点$(x,\ y,\ z)$全体からなる立体を R とする。点$(0,\ 0,\ 1)$を通り，x 軸と平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし, R と C の共通部分を T とする。

(1) $-1<h<1$ を満たす定数 h に対して，点$(0,\ 0,\ 1+h)$を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。

(2) T の体積を求めよ。 ［2006 筑波大］

15 xyz 空間において，点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 ［2007 東北大］

16 (1) 整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ と正数 a_n に対して，$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ とおく。2 つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2) $f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x)$，$y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n \geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x)$，$y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき，$\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$ を求めよ。 ［2007 東京工大］

17 (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を $\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ とする。$\mathrm{G_1}$，$\mathrm{G_2}$ を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。 ［2008 東京大］

18 xyz 空間の原点と点$(1,\ 1,\ 1)$を通る直線を l とする。

(1) l 上の点$\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$を通り l と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。 ［2009 東京工大］

19　a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=a\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ。　　［2010 京都大］

20　$0<t<3$ のとき，連立不等式

$$0 \leqq y \leqq \sin x\,,\ \ 0 \leqq x \leqq t-y$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。　　［2010 東北大］

21　半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。［2010 大阪大］

22　a を実数とする。円 C は点 $(a,\ -a)$ で直線 $y=-x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする。C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　X, Y を a を用いて表せ。

(2)　a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

［2011 東北大］

23　xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1)　K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2)　K の体積を求めよ。　　［2011 熊本大］

24 $-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2) s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。 [2011 名古屋大]

25 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b)-f(a)=\int_a^b\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が，時刻 0 で発進後，距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\frac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。 [2012 千葉大]

26 半径 1 の円を底面とする高さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする。

(1) 直径 AB と直交し，O との距離が t $(0\leqq t\leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。 [2013 東北大]

27 xyz 空間内の 3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2013 大阪大]

28 関数 $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ。

(1) C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2) (1)で求めた P の x 座標を b とするとき，$\tan\theta=e^b$ を満たす $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3) 上の b に対する直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。

［2014 金沢大］

29 空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1) B の中心と l との距離を求めよ。

(2) l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 ［2014 名古屋大］

30 座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする。k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q，R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1) $k,\ q,\ r$ の値を求めよ。

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ。

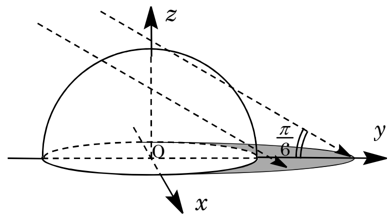
(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。 ［2015 広島大］

31 平面上に 2 つの円 $C_1: x^2+y^2=1$，$C_2: \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計まわりに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計まわりに一定の速さで動く。2 点 P_1，P_2 はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする。P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。 ［2015 千葉大］

$\boxed{32}$ 座標空間内に，原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1<k<1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x=k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。 ［2015 九州大］

$\boxed{33}$ 座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。P, Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ。 ［2015 大阪大］

$\boxed{34}$ $a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t,\ 0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t) \leqq \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)} \leqq \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ を示せ。 ［2015 東京工大］

$\boxed{35}$ $x \geqq 1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) (1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3) (2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

［2016 熊本大］

36 半直線 $l: y=x\ (x \geqq 0)$，放物線 $C: y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と半直線 l が接する点の座標を求めよ。

(2) $t \geqq 0$ とする。原点からの距離が t である l 上の点を $\mathrm{A}(t)$ とするとき，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線と，放物線 C の共有点の座標を t を用いて表せ。

(3) 放物線 C と半直線 l および y 軸とで囲まれた図形を，半直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 ［2016 信州大］

37 xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で，$|x| \leqq \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0 \leqq y \leqq \log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は 1 より大きい定数とする。

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

［2016 京都大］

38 極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r=1+\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

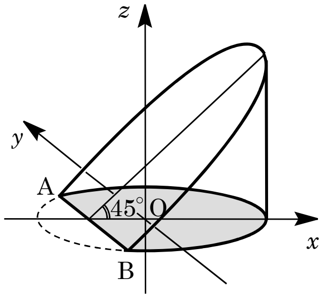
(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。

(4) 曲線 C の長さを求めよ。 ［2016 神戸大］

39 座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H, 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1) 立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2) 立体 V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3) 立体 V の体積を求めよ。 ［2017 広島大］

40 座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$, $\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2) 四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 ［2017 岡山大］

41 xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\ \left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。 ［2017 大阪大］

42 点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}$ を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。 ［2017 東京大］

43 関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ について，以下の各問いに答えよ。ここで log は自然対数を表す。また $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。

(1) p を実数とするとき，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

以下，$f(x)$ の定義域を $x \geqq 0$ に制限した関数の逆関数を $g(x)$ とする。

(2) u を正の実数とする。$p \geqq 0$ のとき，

$$p \leqq g(p) \leqq \frac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$$

を示せ。

(3) p を正の実数とし，xy 平面において，曲線 $y=g(x)$ と直線 $x=p$ の交点を通り，直線 $y=x$ に平行な直線を l とする。また，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形の面積を S とする。このとき，S を p を用いて表せ。 ［2018 東京医歯大］

44 2 つの関数 $f(t)=2\sin t+\cos 2t$，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ を用いて定義される座標平面上の曲線

$$C: x=f(t),\ y=g(t)\ \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

(1) t が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。

(2) t_1，t_2 を $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。

(3) C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。 ［2018 大阪大］

45 座標空間において，O を原点とし，A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 0)$とする。△OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x, y, z の式で表せ。

(2) P$(x,\ y,\ z)$ が L 上の点であるための条件は，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ であることを示せ。

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z) \mid (x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ。　　　　[2018 神戸大]

46 xy 平面内の図形

$$S : \begin{cases} x+y^2 \leqq 2 \\ x+y \geqq 0 \\ x-y \leqq 2 \end{cases}$$

を考える。図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面に図示せよ。

(2) V を求めよ。　　　　[2018 東北大]

積分の応用

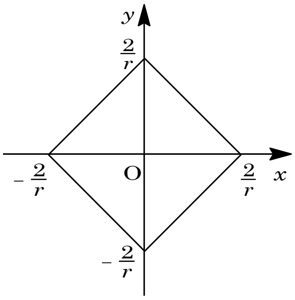
【解答例と解説】

1 [2001 九州大]

(1) 中心軸が x 軸で，断面が半径 r の円である円柱は，$y^2+z^2\leqq r^2$ ………①

また，中心軸が z 軸で，断面が右図のような 1 辺 $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形である正四角柱は，

$$|x|+|y|\leqq\frac{2}{r}\ \cdots\cdots\cdots②$$

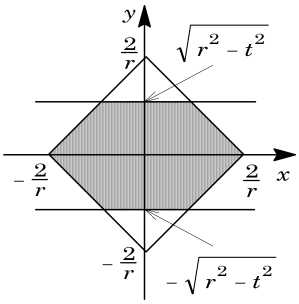


①②の共通部分を平面 $z=t\ (-r\leqq t\leqq r)$ で切ったときの切り口は，$y^2+t^2\leqq r^2$，$|x|+|y|\leqq\dfrac{2}{r}$

$$-\sqrt{r^2-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{r^2-t^2}\ ,\ |x|+|y|\leqq\frac{2}{r}$$

さて，$0<r\leqq\sqrt{2}$ から，$\dfrac{2}{r}\geqq r\geqq\sqrt{r^2-t^2}$

よって，$z=t$ での切り口は右図の網点部となり，その面積を $S(t)$ とすると，



$$S(t)=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}-\sqrt{r^2-t^2}\right)^2\right\}\times 4$$
$$=\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}+2t^2-2r^2$$

(2) 共通部分 K が xy 平面に関して対称なので，

$$V(r)=2\int_0^r S(t)dt=2\int_0^r\left(\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}+2t^2-2r^2\right)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^r\sqrt{r^2-t^2}\,dt=\pi r^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\pi r^2$ より，

$$V(r)=\frac{16}{r}\cdot\frac{1}{4}\pi r^2+2\left[\frac{2}{3}t^3-2r^2t\right]_0^r=4\pi r-\frac{8}{3}r^3$$

(3) $V'(r)=4\pi-8r^2=-4(2r^2-\pi)$

右表より，$0<r\leqq\sqrt{2}$ において，$r=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ のときに $V(r)$ は最大となり，最大値は，

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\sqrt{\pi}$$

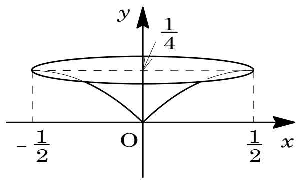
である。

r	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

［解 説］

10 年も前になりますが，直交する円柱と円柱の共通部分の体積を求める問題が 1991 年に出ました。今年は円柱と正四角柱でしたが，それにしても，この種類の問題はよく出題されます。

2 ［2001 筑波大］



(1) $y=x(1-x)$より，$x^2-x+y=0$

$0\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ より，$x=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4y})$

$$x^2=\frac{1}{2}(1-2y-\sqrt{1-4y})$$

$0\leqq y\leqq h$ における水量を W とすると，

$$W=\int_0^h \pi x^2dy=\frac{\pi}{2}\int_0^h(1-2y-\sqrt{1-4y})\,dy$$

すると，$\frac{dW}{dh}=\frac{\pi}{2}(1-2h-\sqrt{1-4h})$………①

ここで条件より，$\frac{dW}{dt}=V$，$\frac{dh}{dt}=u$，$\frac{dW}{dt}=\frac{dW}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$ なので，

$$V=\frac{dW}{dh}u \text{………②}$$

①②より，$V=\frac{\pi}{2}(1-2h-\sqrt{1-4h})u$ なので，

$$u=\frac{2V}{\pi(1-2h-\sqrt{1-4h})}=\frac{V(1-2h+\sqrt{1-4h})}{2\pi h^2}$$

(2) $\frac{dW}{dt}=V$ で，$t=0$ のとき $W=0$ から，$W=Vt$………③

$h=\frac{1}{4}$ のとき，容器に水がいっぱいになり，このときの水量 W は，

$$W=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}(1-2y-\sqrt{1-4y})\,dy=\frac{\pi}{2}\Big[\,y-y^2+\frac{1}{6}(1-4y)^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{96}\text{………④}$$

③④より，$Vt=\frac{\pi}{96}$ となり，求める時間は $t=\frac{\pi}{96V}$ である。

［解 説］

以前はよく出題されていた水の問題に久々に出会いました。演習する価値のある問題です。

$\boxed{3}$ [2001 九州大]

(1) $\mathrm{P}(t,\ f(t))$における接線の傾きは$f'(t)$より，$\tan\theta(t)=f'(t)$となる。

$$\frac{1}{\cos^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=f''(t)\,,\ \ \theta'(t)=f''(t)\cos^2\theta(t)$$

条件より，$f''(t)>0$なので$\theta'(t)>0$，よって$\theta(t)$はつねに増加する。

(2) ①より，接線の方向ベクトルは$(1,\ \tan\theta(t))$とおけるので，下向きの法線ベクトルは$\vec{n}=(\tan\theta(t),\ -1)$となる。

すると，$|\vec{n}|=\sqrt{\tan^2\theta(t)+1}=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta(t)}}=\dfrac{1}{\cos\theta(t)}$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\cos\theta(t)\vec{n}=(t,\ f(t))+\cos\theta(t)(\tan\theta(t),\ -1)$$
$$=(t,\ f(t))+(\sin\theta(t),\ -\cos\theta(t))=(t+\sin\theta(t),\ f(t)-\cos\theta(t))$$

よって，$\alpha(t)=t+\sin\theta(t),\ \beta(t)=f(t)-\cos\theta(t)$

(3) (1)より，$1+\{f'(t)\}^2=1+\tan^2\theta(t)=\dfrac{1}{\cos^2\theta(t)}$なので，

$$L_1=\int_a^b\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)}}\,dt=\int_a^b\frac{1}{\cos\theta(t)}\,dt$$

(2)から，$\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2+\{f'(t)+\sin\theta(t)\theta'(t)\}^2$

$$=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2+\{\tan\theta(t)+\sin\theta(t)\theta'(t)\}^2$$
$$=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2\{1+\tan^2\theta(t)\}=\frac{\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}$$

$$L_2=\int_a^b\sqrt{\frac{\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}}\,dt=\int_a^b\frac{1+\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)}\,dt$$

よって，$L_2-L_1=\displaystyle\int_a^b\frac{\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)}\,dt=\int_a^b\theta'(t)\,dt=\big[\,\theta(t)\,\big]_a^b=\theta(b)-\theta(a)$

［解 説］

ていねいな誘導がついた，よく練られた問題です。(3)の結論は予想以上に簡明なものでした。

$\boxed{4}$ ［2002 京都大］

(1)　$f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2)　曲線 $r=\theta$ 上の点を $(x,\ y)$ とすると，$x=r\cos\theta=\theta\cos\theta$，$y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2=1+\theta^2$$

曲線 $r=\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを l とすると，

$$l=\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\theta\cdot\frac{2\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\left(\sqrt{1+\theta^2}-\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\right)d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-l+\left[\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_0^\pi=\pi\sqrt{1+\pi^2}-l+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

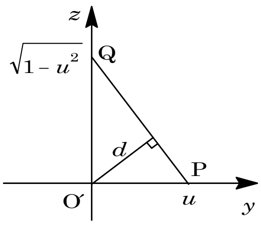
$$2l=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

よって，$l=\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{1+\pi^2}+\dfrac{1}{2}\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$

［解　説］

(2)の部分積分による計算は有名なものですが，経験がないと無理でしょう。

5 ［2003 東北大］



(1) 平面$x=u$上で考えて，点$\mathrm{O}'(u,\ 0,\ 0)$と線分 PQ との距離をdとすると，

$$\mathrm{PQ}\times d=\mathrm{O'P}\times\mathrm{O'Q}$$

$\mathrm{PQ}=\sqrt{u^2+(1-u^2)}=1$より，$d=u\sqrt{1-u^2}$

(2) 曲面Sをx軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を，平面$x=u$で切断したときの切り口は，線分 PQ をx軸のまわりに回転させて得られるドーナツ状の図形である。その面積を$S(u)$とおく。

さて，$u\leqq\sqrt{1-u^2}$とすると，$0\leqq u\leqq 1$から$u^2\leqq\dfrac{1}{2}$なので，$0\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$となる。

また，$u\geqq\sqrt{1-u^2}$とすると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq 1$である。

(i) $0\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき

$$S(u)=\pi(\sqrt{1-u^2})^2-\pi d^2=\pi\left\{1-u^2-u^2(1-u^2)\right\}=\pi(1-2u^2+u^4)$$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq 1$のとき

$$S(u)=\pi u^2-\pi d^2=\pi\left\{u^2-u^2(1-u^2)\right\}=\pi u^4$$

(i)(ii)より，求める立体の体積をVとすると，

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(1-2u^2+u^4)\,du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\pi u^4du$$

$$=\pi\Big[\,u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\,\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\Big[\,\frac{1}{5}u^5\,\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\Big(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{5}\Big)\pi$$

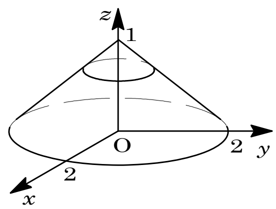
［解 説］

頻出有名問題の 1 つです。ドーナツ状の切り口の外径が，$\mathrm{O'P}$か$\mathrm{O'Q}$かで場合分けをします。

$\boxed{6}$ [2003 東京大]

(1) 円錐 A を平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切断したとき，その切り口の円の半径を r とすると，

$$r : 2 = 1-t : 1,\ \ r = 2(1-t)$$



よって，$z=t$ 上で，この円の方程式は，

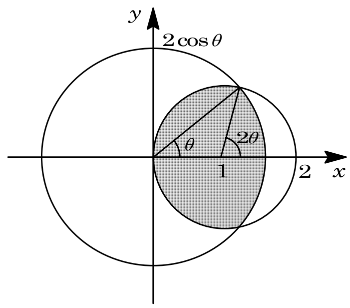
$$x^2 + y^2 = 4(1-t)^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，円柱 B は，中心 $(1,\ 0,\ 0)$ で半径 1 の円を底面とし，中心軸が z 軸に平行なので，その方程式は，$z=t$ 上でも，

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①と②の交点は，①－②より，$x = 2(1-t)^2$

$t = 1-\cos\theta$ とおくと $x = 2\cos^2\theta$ となり，①の半径が $r = 2\cos\theta$ から $\dfrac{x}{r} = \cos\theta$ である。



①より $y^2 = 4\cos^2\theta - 4\cos^4\theta = 4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)$

$$= 4\cos^2\theta\sin^2\theta = \sin^2 2\theta$$

よって，$y = \pm\sin 2\theta$ となり，共通部分の面積は，

$$S(t) = 2\left\{\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta + \frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi - 2\theta) - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin 2\theta\right\}$$

$$= 4\theta\cos^2\theta + \pi - 2\theta - \sin 2\theta = 2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi$$

(2) $t = 1-\cos\theta$ より，$\dfrac{dt}{d\theta} = \sin\theta$ となり，$t=0$ のとき $\theta = 0$，$t=1$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$V = \int_0^1 S(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\cos 2\theta - \sin 2\theta + \pi)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\cos 2\theta\sin\theta - \sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta\cos 2\theta\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(\sin 3\theta - \sin\theta)\,d\theta$

$$= -\left[\theta\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta - \cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta - \cos\theta\right)d\theta = -\frac{10}{9}$$

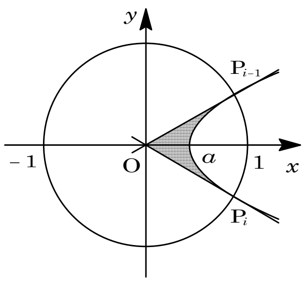
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta - \cos\theta)\,d\theta = \frac{2}{3}$$

よって，$V = -\dfrac{10}{9} - \dfrac{2}{3} + \pi\cdot 1 = \pi - \dfrac{16}{9}$

［解 説］

空間図形の求積に関する頻出題です。誘導の与え方を見て，似た問題があったという記憶があり，調べてみると，それは 1994 年度の 3 番でした。

７ ［2004 大阪大］



$1\leqq i\leqq n$ として，右図のように，$P_{i-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{n},\ \sin\dfrac{\pi}{n}\right)$，$P_i\left(\cos\dfrac{\pi}{n},\ -\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$とおく。

また，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接する放物線を $y^2=4p(x-a)\ (p>0)$ とすると，点 P_{i-1} における接線は，$y\sin\dfrac{\pi}{n}=2p\left(x-a+\cos\dfrac{\pi}{n}-a\right)$

$$y=\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{n}}x+2p\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n}-2a}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdots\cdots\cdots①$$

また，直線 OP_{i-1} は，$y=x\tan\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots②$

①と②が一致することより，

$$\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{n}}=\tan\frac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots③,\ \ \cos\frac{\pi}{n}-2a=0\cdots\cdots\cdots④$$

③より $p=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots⑤$，④より $a=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots⑥$となる。

このとき，直線 OP_{i-1}，OP_i と放物線によって囲まれた図形の面積を T_i とおくと，

$$T_i=2\left\{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}-\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}y\,dx\right\}$$

ここで, $n\geqq3$ なので，$0<\dfrac{\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{3}$ となり，⑤⑥より，

$$\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}y\,dx=\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}2\sqrt{p}\sqrt{x-a}\,dx=2\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}\Big[(x-a)^{\frac{3}{2}}\Big]_a^{\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{p}\left(\cos\frac{\pi}{n}-a\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\tan\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

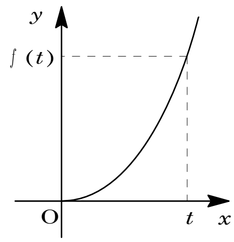
よって，$T_i=\cos\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{2}{3}\cos\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$

すると，$S_n=nT_i=\dfrac{n}{3}\cos\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi}{3}$

［解 説］

ひねりはあるものの，よく見かける問題です。

８　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2004 筑波大］



(1)　まず，$X(t)=\pi\int_0^t\{f(x)\}^2dx$ より，$X'(t)=\pi\{f(t)\}^2$

また，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で連続で，単調に増加するので,

$$Y(t)=\pi\int_0^{f(t)}x^2dy=\pi\int_0^t x^2f'(x)dx$$

よって，$Y'(t)=\pi t^2f'(t)$

(2)　$t\geqq 0$ に対して $X(t)=Y(t)$ より，$X'(t)=Y'(t)$ $(t>0)$ となるので, (1)から,

$$\pi\{f(t)\}^2=\pi t^2f'(t)\,,\ \{f(t)\}^2=t^2f'(t)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)$ が定数の場合は，明らかに(∗)は成立しないので，$n\geqq 1$ として，$f(x)$ を n 次の整式とする。

(∗)の左辺の次数は $2n$, 右辺の次数は $2+(n-1)=n+1$ から,

$$2n=n+1\,,\ n=1$$

これより，$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ とおくことができる。

(∗)に代入して，$(at+b)^2=at^2$，$(a^2-a)t^2+2abt+b^2=0$

すべての $t>0$ に対して成立するので,

$$a^2-a=0\,,\ 2ab=0\,,\ b^2=0$$

$a\neq 0$ から，$a=1$，$b=0$ となり，$f(x)=x$ $(x\geqq 0)$ である。

(3)　$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ のとき，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$ $(x>0)$ であり,

$$\{f(t)\}^2=\frac{t^2}{(1+t)^2}=t^2f'(t)$$

よって, (1)より，$X'(t)=Y'(t)$

すると，$X(0)=Y(0)$ から, $t\geqq 0$ において，$X(t)=Y(t)$ である。

［解　説］

抽象関数が題材で，しかも問題文が長いのですが，案ずるほどではありませんでした。

9 ［2004 岡山大］

(1) $\mathrm{PH}:\mathrm{PA}=k:1$ より，$\mathrm{PH}=k\mathrm{PA}$ となり，S の方程式は，

$$|x|=k\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}\ ,\ \ x^2=k^2\{(x-1)^2+y^2+z^2\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

点 P と x 軸との距離を d とすると，$d=\sqrt{y^2+z^2}$ なので，$(*)$より，

$$d^2=\frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2=-\frac{k^2-1}{k^2}x^2+2x-1=-\frac{k^2-1}{k^2}\Big(x-\frac{k^2}{k^2-1}\Big)^2+\frac{1}{k^2-1}$$

$k>1$ より $-\dfrac{k^2-1}{k^2}<0$ となり，$x=\dfrac{k^2}{k^2-1}$ のとき d^2 は最大となる。このとき，d は最大値 $\sqrt{\dfrac{1}{k^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ をとる。

(2) $(*)$に $z=0$ を代入すると，$x^2=k^2\{(x-1)^2+y^2\}$，$y^2=\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2$

$y\geqq 0$ より $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2}$ となり，C の方程式は，

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2}\ ,\ \ z=0$$

さて，C を x 軸のまわりに回転してできる図形を，x 軸の垂直な平面 $x=t$ で切断したとき，その切り口は半径が $\sqrt{\dfrac{t^2}{k^2}-(t-1)^2}$ の円になり，

$$y^2+z^2=\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2,\ \ x=t$$

t は任意なので，この図形は方程式 $y^2+z^2=\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2$ で表され，これは$(*)$と一致する。すなわち図形 S である。

(3) 切り口が存在する t の範囲は，$\dfrac{t^2}{k^2}-(t-1)^2\geqq 0$，$(k^2-1)t^2-2k^2t+k^2\leqq 0$

$$\{(k+1)t-k\}\{(k-1)t-k\}\leqq 0\ ,\ \ \frac{k}{k+1}\leqq t\leqq\frac{k}{k-1}$$

S で囲まれる立体の体積を V とすると，

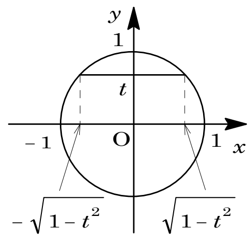
$$V=\pi\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}}\Big\{\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2\Big\}dt=-\frac{k^2-1}{k^2}\pi\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}}\Big(t-\frac{k}{k+1}\Big)\Big(t-\frac{k}{k-1}\Big)dt$$

$$=-\frac{k^2-1}{k^2}\pi\cdot\Big(-\frac{1}{6}\Big)\Big(\frac{k}{k-1}-\frac{k}{k+1}\Big)^3=\frac{k^2-1}{6k^2}\pi\cdot\frac{8k^3}{(k^2-1)^3}=\frac{4\pi k}{3(k^2-1)^2}$$

［解 説］

S で囲まれる立体を x 軸に垂直な平面で切断すると，その断面は円になります。この点を問う(2)は，(3)への誘導となっています。

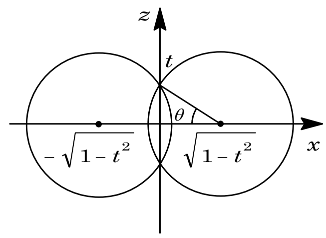
$\boxed{10}$ [2005 東京工大]



円 C の対称性から，条件を満たす円盤 D が通過する領域は，xz 平面に関して対称である。

そこで，$y \geqq 0$ の部分に対し，この部分を平面 $y=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切った切り口を考える。

この切り口は，中心$(\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0)$，半径 1 の円と，中心$(-\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0)$，半径 1 の円の和集合となっている。



右図のように角 θ をとると，

$$\cos\theta = \sqrt{1-t^2}\ ,\ \sin\theta = t \cdots\cdots\cdots(*)$$

そこで，切り口の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = 4\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-\theta) + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}\ \right\}$$
$$= 2\pi - 2\theta + 2t\sqrt{1-t^2}$$

求める D の通過領域の体積 V は，

$$V = 2\int_0^1 S(t)\,dt = 4\int_0^1 (\pi - \theta + t\sqrt{1-t^2}\,)\,dt = 4\pi - 4\int_0^1 \theta\,dt + 4\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$(*)$より，$dt = \cos\theta\, d\theta$ となり，

$$\int_0^1 \theta\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos\theta\,d\theta = \Big[\,\theta\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2} - 1$$

また，$\sqrt{1-t^2} = u$ とおくと，$1-t^2 = u^2$，$-2tdt = 2udu$ から，

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_1^0 u(-u)\,du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

以上より，

$$V = 4\pi - 4\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 4\cdot\frac{1}{3} = 2\pi + \frac{16}{3}$$

［解 説］

初めは，z 軸に垂直な切り口を考えましたが，複雑そうなので，考えを改め，y 軸に垂直な切り口に変更しました。断面積を求めるときに，中心角を設定する必要がありますが，今年は，東大でもこの技法を用いる問題が出ています。

11 ［2005 東京大］

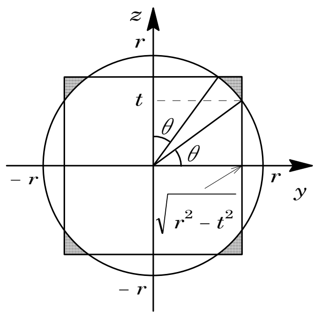
不等式 $x^2+y^2 \leqq r^2$ ……①，$y^2+z^2 \geqq r^2$ ……②，$z^2+x^2 \leqq r^2$ ……③で表される立体を K とおく。

まず，K は yz 平面に対称であり，$x \geqq 0$ の部分を考える。そこで，K を平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq r)$ で切ったときの断面を表す式は，①③より，

$$y^2 \leqq r^2-t^2,\ -\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2} \ \cdots\cdots\text{④}$$

$$z^2 \leqq r^2-t^2,\ -\sqrt{r^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2-t^2} \ \cdots\cdots\text{⑤}$$

よって，平面 $x=t$ 上の断面は，②④⑤の連立式として表される。



この断面が存在する条件は，$\sqrt{r^2-t^2} \geqq r\cos\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2} \geqq r,\ 2(r^2-t^2) \geqq r^2$$

$0 \leqq t \leqq r$ から，$0 \leqq t \leqq \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

このとき，右図のように θ を設定すると，

$$r\cos\theta = \sqrt{r^2-t^2},\ r\sin\theta = t \ \cdots\cdots\text{⑥}$$

さて，断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = 4\left\{\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2 - \frac{1}{2}t\sqrt{r^2-t^2}\times 2 - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$= (4-\pi)r^2 - 4t^2 - 4t\sqrt{r^2-t^2} + 4r^2\theta$$

よって，K の体積 V は，

$$V = 2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \{(4-\pi)r^2 - 4t^2 - 4t\sqrt{r^2-t^2} + 4r^2\theta\}dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \{(4-\pi)r^2-4t^2\}dt = \left[(4-\pi)r^2t - \frac{4}{3}t^3\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)r^3$

また，$u=\sqrt{r^2-t^2}$ とおくと，$u^2=r^2-t^2$ から，$2udu=-2tdt$ となり，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} 4t\sqrt{r^2-t^2}\,dt = 4\int_r^{\frac{r}{\sqrt{2}}} u(-u)\,du = 4\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r u^2\,du = 4\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r$$

$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)r^3$$

さらに，⑥より，$r\cos\theta\,d\theta = dt$ なので，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} 4r^2\theta\,dt = 4r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\cos\theta\,d\theta = 4r^3\left\{\left[\theta\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta\right\}$$

$$= 4r^3\left\{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\} = 4r^3\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + 2\sqrt{2} - 4\right)r^3$$

以上より,

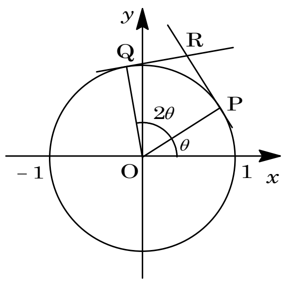
$$V=2\left\{\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)r^3-\left(\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)r^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+2\sqrt{2}-4\right)r^3\right\}$$
$$=\left(8\sqrt{2}-\frac{32}{3}\right)r^3$$

［解 説］

②式の不等号が逆向きになると，有名問題です。パラメータθの置き方については, 1994 年, 1998 年, 2003 年の類題が参考になります。

12 ［2006 岡山大］

(1) 点$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$における接線の方程式は，それぞれ，



$$x\cos\theta+y\sin\theta=1,\ \ x\cos 3\theta+y\sin 3\theta=1$$

この２本の接線の交点$\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$は，

$$\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=1\ \cdots\cdots\text{①}$$

$$\alpha\cos 3\theta+\beta\sin 3\theta=1\ \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$(\cos\theta\sin 3\theta-\cos 3\theta\sin\theta)\alpha=\sin 3\theta-\sin\theta$

$$(\cos\theta\sin 3\theta-\cos 3\theta\sin\theta)\beta=-\cos 3\theta+\cos\theta$$

さて，$\varDelta=\cos\theta\sin 3\theta-\sin\theta\cos 3\theta=\sin(3\theta-\theta)=\sin 2\theta$

すると，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$より，$\sin 2\theta>0$なので，

$$\alpha=\frac{1}{\sin 2\theta}(\sin 3\theta-\sin\theta)=\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\cdot 2\cos 2\theta\sin\theta=\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

$$\beta=\frac{1}{\sin 2\theta}(-\cos 3\theta+\cos\theta)=\frac{1}{\sin 2\theta}\cdot 2\sin 2\theta\sin\theta=2\sin\theta$$

(2) (1)より，$x=\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$，$y=2\sin\theta$となり，

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{-2\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

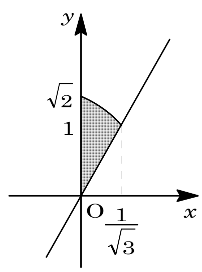
$$=\frac{-4\sin\theta\cos^2\theta+(2\cos^2\theta-1)\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{-\sin\theta(2\cos^2\theta+1)}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$$

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dx}{d\theta}$		$-$	
x	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

よって，点 R の軌跡は右図のようになり，求める網点部の面積をSとすると，



$$S=\int_1^{\sqrt{2}}x\,dy+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

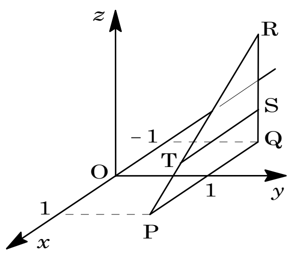
$$=\Big[\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

［解 説］

和積公式を利用して，点 R の座標を整理しておかないと，積分の実行が困難になってきます。また，(2)の面積計算は，計算量を考えると，y 軸方向で積分すべきです。

$\boxed{13}$ ［2006 神戸大］

(1) P(1, 1, 0)，Q(−1, 1, 0)，R(−1, 1, 2) のとき，



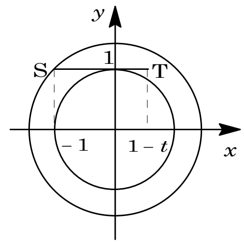
まず線分 QR は xy 平面に垂直なので，平面 $z=t$ との交点 S の座標は，S(−1, 1, t) である。

また，線分 PR と平面 $z=t$ との交点 T は，線分 PR を $t:2-t$ に内分する点より，

$$\mathrm{T}\left(\frac{-t+2-t}{t+(2-t)},\ \frac{t+2-t}{t+(2-t)},\ t\right)=(1-t,\ 1,\ t)$$

(2) 点 T の x 座標の符号で場合分けをする。

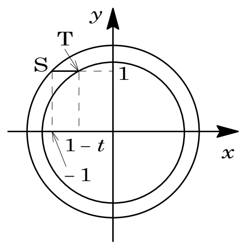
(i) $1-t\geqq 0$ $(0\leqq t\leqq 1)$ のとき



線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が 1 であるので，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\cdot 1^2=\pi$$

(ii) $1-t\leqq 0$ $(1\leqq t\leqq 2)$ のとき



線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が $\sqrt{(1-t)^2+1^2}$ であるので，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\left(\sqrt{(1-t)^2+1^2}\right)^2=\pi(2t-t^2)$$

(i)(ii)より，△PQR の z 軸まわりの回転体の体積 V は，

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\pi\int_0^1 dt+\pi\int_1^2(2t-t^2)\,dt=\pi+\pi\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=\frac{5}{3}\pi$$

［解 説］

平面図形の回転体の体積を求める頻出題です。回転軸に垂直な回転体の切り口がドーナツ形であることがわかれば，積分計算は難しくありません。

$\boxed{14}$ ［2006 筑波大］

(1) 条件より，立体 $R : |x| \leqq z^2$ ………①

l を中心軸とする半径 1 の円柱 C の方程式は，

$$C : y^2 + (z-1)^2 \leqq 1 \text{………②}$$

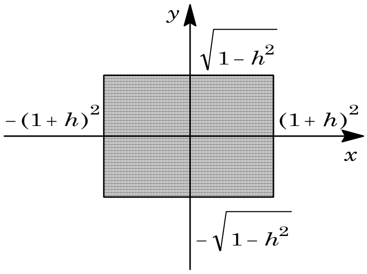
また，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面の方程式は，

$$z = 1+h \text{………③}$$

③を①に代入して，$|x| \leqq (1+h)^2$，$-(1+h)^2 \leqq x \leqq (1+h)^2$

③を②に代入して，$y^2 + h^2 \leqq 1$，$-\sqrt{1-h^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-h^2}$

R と C の共通部分 T を平面③で切断したときの切り口を図示すると，右図の網点部となる。その面積 $S(h)$ は，



$$S(h) = 2(1+h)^2 \cdot 2\sqrt{1-h^2}$$
$$= 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}$$

(2) T の体積を V とすると，

$$V = \int_{-1}^{1} S(h)\,dh = \int_{-1}^{1} 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$= 4\int_{-1}^{1} \sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{-1}^{1} h\sqrt{1-h^2}\,dh + 4\int_{-1}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$= 8\int_{0}^{1} \sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{0}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$

ここで，原点が中心で，半径 1 の四分円の面積は $\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-h^2}\,dh = \frac{\pi}{4}$$

また，$h = \sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\int_{0}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

以上より，$V = 8\times\dfrac{\pi}{4} + 8\times\dfrac{\pi}{16} = \dfrac{5}{2}\pi$ である。

［解 説］

10 年以上も前に頻出していた共通部分の体積を求める問題です。ここ数年は，空間図形の内容が削減されたため，散見される程度でしたが，やや風向きが変わってきたのでしょうか。

$\boxed{15}$ [2007 東北大]

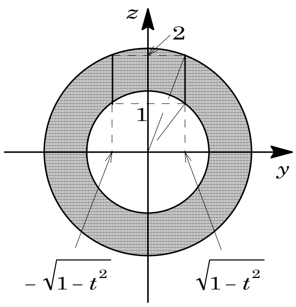
点(1, 0, 1)と点(1, 0, 2)を結ぶ線分 l を，z 軸のまわりに 1 回転してできる円筒形 A の方程式は，

$$x^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$

ここで，円筒形 A を x 軸に垂直な平面 $x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切断すると，その切り口は線分となり，

$$t^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$

$$y=\pm\sqrt{1-t^2},\ 1\leqq z\leqq 2$$



ここで，この 2 本の線分を x 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ状の図形について，その外径を R，内径を r とおき，その面積を $S(t)$ とすると，

$$\begin{aligned}S(t)&=\pi R^2-\pi r^2\\&=\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+2^2\right\}-\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+1^2\right\}\\&=\pi(5-t^2)-\pi(2-t^2)=3\pi\end{aligned}$$

よって，A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とおくと，

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt=\int_{-1}^{1}3\pi\,dt=6\pi$$

［解 説］

立体を回転してできる回転体の求積という，2 代前の課程のころ，よく出題された問題です。回転軸に垂直な断面積を考えるのがポイントです。なお，円柱側面の方程式については，「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

16 [2007 東京工大]

(1) $f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ に対して，

$$f_n'(x)=a_n\{(n+1-x)-(x-n)\}=a_n(-2x+2n+1)$$

また，$y=e^{-x}$ に対して，$y'=-e^{-x}$

さて, 2 曲線 $y=a_n(x-n)(n+1-x)$ と $y=e^{-x}$ が $x=t_n$ で接するとすると，

$$a_n(-2t_n+2n+1)=-e^{-t_n}\cdots\cdots\cdots①,\quad a_n(t_n-n)(n+1-t_n)=e^{-t_n}\cdots\cdots\cdots②$$

$a_n>0$ より，①②から，$2t_n-2n-1=(t_n-n)(n+1-t_n)$

$$t_n{}^2-(2n-1)t_n+n^2-n-1=0$$

よって，$t_n=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2}$

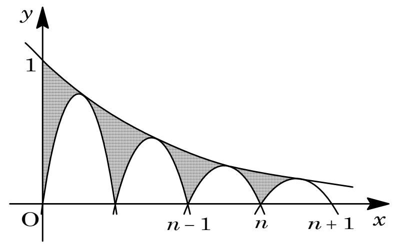
$n<t_n<n+1$ から，$t_n=\dfrac{2n-1+\sqrt{5}}{2}$ となり，①に代入すると，

$$a_n=\frac{-1}{-(2n-1+\sqrt{5})+2n+1}e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}=(2+\sqrt{5})e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2) まず，$y=f_n(x)$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は，

$$\int_n^{n+1}a_n(x-n)(n+1-x)\,dx=\frac{a_n}{6}(n+1-n)^3=\frac{a_n}{6}$$

ここで，$0\leqq x\leqq n$ において，曲線 $y=e^{-x}$ と $y=f_0(x)$，$y=f_1(x)$，…，$y=f_{n-1}(x)$ によってはさまれた部分の面積を T_n とおくと，



$$T_n=\int_0^n e^{-x}dx-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

$$=-\left[e^{-x}\right]_0^n-\frac{2+\sqrt{5}}{6}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=-e^{-n}+1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$$

さて，条件より，$T_n<S_0+S_1+\cdots+S_n<T_{n+1}$ であり，

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}T_{n+1}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

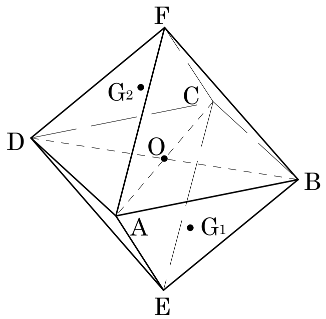
[解 説]

(2)では，最初，S_n を定積分で立式しましたが，とうてい計算を実行する気になれません。そこで，$\dfrac{1}{6}$ 公式が登場したわけです。

17 ［2008 東京大］

(1) 1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF において，正方形 ABCD の対角線の交点を O とすると，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

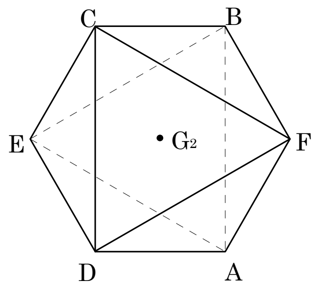


また，△ACE は∠AEC＝90°の直角二等辺三角形であるので，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OE}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

すると，四面体 OABE において，底面の正三角形 ABE の重心をG_1とおくと，①②より，線分OG_1は平面 ABE に垂直である。

同様に，正三角形 CDF の重心をG_2とおくと，線分OG_2は平面 CDF に垂直である。さらに，平面 ABE と平面 CDF は平行であることより，3 点G_1, O, G_2は一直線上にある。



これより，△ABE の面を水平な台に置き，真上から見ると，正三角形 ABE を$G_2(G_1)$のまわりに180°だけ回転すると正三角形 CDF の位置になっている。

したがって，正八面体を真上から見た図は，正六角形 AFBCED を外形とする右図である。

(2) 直線G_1G_2を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体を R とすると，その外形は，辺 AF をG_1G_2のまわりに回転したものに等しい。

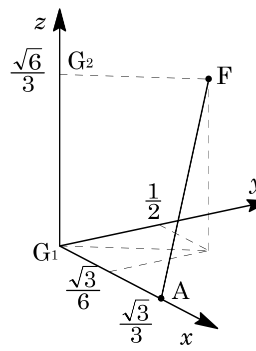
さて，辺 BE の中点を M とおき，△OAM において，

$$\mathrm{AG_1}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{G_1G_2}=2\mathrm{OG_1}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AG_1}^2}=2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここで，G_1を原点とし，平面 ABE を xy 平面とする座標系を設定する。さらに，G_1Aを x 軸，G_1G_2を z 軸とすると，

$$G_1(0,\ 0,\ 0),\ G_2\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$$



また，点 F の x 座標と y 座標は，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}$$

よって，$\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{1}{6}(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$$

これより，直線 AF のパラメータ表示は，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)+t(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})\cdots\cdots\cdots③$$

直線③と平面 $z=k\left(0\leqq k\leqq\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ との交点は，$2\sqrt{6}t=k$ より $t=\frac{\sqrt{6}}{12}k$ となり，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k,\quad y=3\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{6}}{4}k$$

よって，立体 R を平面 $z=k$ で切断したときの切り口の面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k)=\pi(x^2+y^2)=\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}k\right)^2\right\}=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)$$

これより，立体 R の体積 V は,

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}S(k)\,dk=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)dk$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}k-\frac{\sqrt{6}}{12}k^2+\frac{1}{6}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{6}}{18}+\frac{\sqrt{6}}{27}\right)=\frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$$

［解 説］

ありふれた素材をもとにしたものですが，内容は本格的な求積問題です。東大らしい構図です。

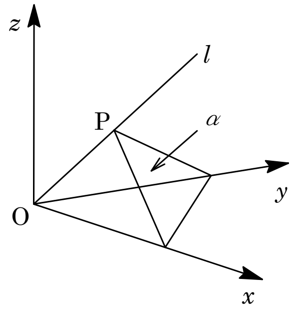
18 ［2009 東京工大］

(1) 原点と点$(1,\ 1,\ 1)$を通る直線lの方程式は,

$$x=y=z\ \cdots\cdots\cdots①$$

これより，点$\mathrm{P}\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$を通り l と垂直な平面αは,

$$\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(y-\frac{t}{3}\right)+\left(z-\frac{t}{3}\right)=0,\ x+y+z=t$$



この平面とxy平面との交線は，$z=0$を代入して,

$$x+y=t,\ z=0$$

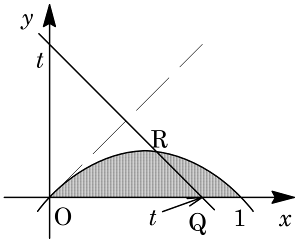
(2) xy 平面上で，$x+y=t\ \cdots\cdots②$と$y=x(1-x)\ \cdots\cdots③$を連立すると,

$$t-x=x-x^2,\ x^2-2x+t=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

②と③が共有点をもつ条件は,

$$D/4=1-t\geqq 0,\ t\leqq 1$$

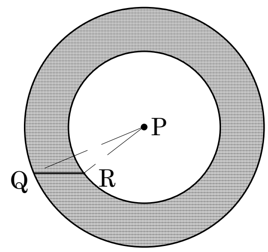
よって，直線②と領域$D:0\leqq y\leqq x(1-x)$が共有点をもつ条件は，$0\leqq t\leqq 1$である。



このとき，右図のように共有点を Q, R とおくと，④から，$\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{R}(1-\sqrt{1-t},\ t-1+\sqrt{1-t},\ 0)$となる。

また，直線 l を xy 平面へ正射影すると，直線$x=y$，$z=0$となり，この直線は放物線③の原点における接線と一致する。

これより，平面α上で点 P を中心として線分 QR を回転してできるドーナツ状の図形の外径は PQ，内径は PR となり，その面積$S(t)$は,



$$\mathrm{PQ}^2=\left(-\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2}{3}t^2$$

$$\mathrm{PR}^2=\left(\frac{t}{3}-1+\sqrt{1-t}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}t+1-\sqrt{1-t}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}t^2-4(t-1)-2(2-t)\sqrt{1-t}$$

$$S(t)=\pi(\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2)=\pi\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}$$

さて，直線lの$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$の部分を正とするl軸を設定し，$l=\mathrm{OP}$とおくと，$t\geqq 0$において,

$$l=\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}t$$

よって，$\dfrac{dl}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$となり，求める回転体の体積$V$は,

$$V=\int_0^1 S(t)\frac{dl}{dt}dt=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}dt$$

ここで，$1-t=u$ とおくと，

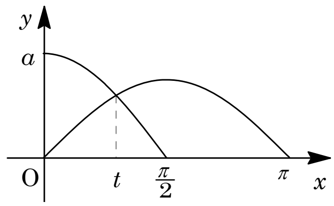
$$V=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_1^0\{-4u+2(u+1)\sqrt{u}\}(-du)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1(-4u+2u\sqrt{u}+2\sqrt{u})\,du$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big[-2u^2+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big(-2+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\Big)=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$

［解 説］

過去問を探す気分にはなりませんが，20 年以上も前には，よく見かけた問題です。ドーナツ状の断面の外径がいつも PQ，内径がいつも PR で，場合分けが必要ないのにはホッとします。なお，空間における直線や平面の方程式については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

19 ［2010 京都大］



曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^\pi=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ における曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ の交点を $x=t$ とおくと,

$$\sin t=a\cos t\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると, 2 曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 T は,

$$T=\int_0^t \sin x\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^t+a\Big[\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\cos t+1+a(1-\sin t)=-a\sin t-\cos t+a+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，条件より $S:T=3:1$ なので，$S=3T$ となり，①③から,

$$2=3(-a\sin t-\cos t+a+1),\ \ 3a\sin t+3\cos t-3a-1=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$3(a^2+1)\cos t=3a+1$ となり,

$$\cos t=\frac{3a+1}{3(a^2+1)},\ \ \sin t=\frac{a(3a+1)}{3(a^2+1)}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を，$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ に代入すると，$\dfrac{a^2(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}+\dfrac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}=1$

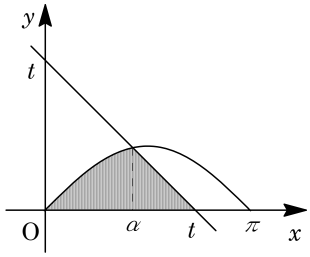
$$\frac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)}=1,\ \ 9a^2+6a+1=9a^2+9$$

よって，$a=\frac{4}{3}$ となり，この値は $a>0$ を満たす。

［解 説］

交点の x 座標を文字でおき，その条件②を用いて，間接的に解き進めるタイプの有名問題です。演習必須の 1 題です。

20 [2010 東北大]



領域$0 \leqq y \leqq \sin x$ ……①，$0 \leqq x \leqq t-y$ ……②に対して，$0<t<3$ より，①の境界線$y=\sin x$と②の境界線$y=t-x$の交点はただ１つ存在し，それを$x=\alpha$とおくと，

$$\sin\alpha = t-\alpha\,,\ t=\alpha+\sin\alpha \cdots\cdots\cdots ③$$

このとき，右図の網点部を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積$V(t)$は，③を利用すると，

$$V(t)=\pi\int_0^{\alpha}\sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi(t-\alpha)\sin^2\alpha=\pi\int_0^{\alpha}\sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，③から，$\dfrac{dt}{d\alpha}=1+\cos\alpha$ となり，④より，

$$\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{d\alpha}V(t)\frac{d\alpha}{dt}=(\pi\sin^2\alpha+\pi\sin^2\alpha\cos\alpha)\cdot\frac{1}{1+\cos\alpha}=\pi\sin^2\alpha$$

さて，条件より，$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}$

$0<\alpha<3$から，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ となり，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ である。

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，③より $t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}<3$ から適する。

$\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，③より $t=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{1}{2}>\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$ から適さない。

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}$ であり，このとき，④より，

$$V(t)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2x)\,dx+\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{24}\pi=\frac{\pi^2}{12}-\Big(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{24}\Big)\pi$$

［解 説］

$0<x<\pi$ において，$y=\sin x$ のグラフは上に凸であり，$x=\pi$ における接線の傾きが-1であることから，$y=\sin x$ と $y=t-x$ の交点はただ１つであることがわかります。また，$0<\alpha<\pi$ において，t はαの単調増加関数なので，αは t の関数になっています。

21 [2010 大阪大]

条件より，球T_1，T_2の中心をそれぞれ$(0,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 0,\ 0)$とすると，

$$T_1 : x^2+y^2+z^2=9,\ T_2 : (x-2)^2+y^2+z^2=1$$

また，球Sの中心を$(x_0,\ y_0,\ z_0)$とおくと，

$$S : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=1$$

さて，SはT_1の内部にあるかT_1に内接していることより，

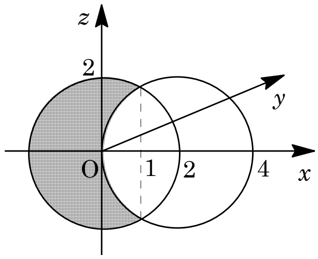
$$\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2}\leqq 3-1,\ {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2\leqq 4\cdots\cdots\cdots①$$

また，SはT_2の外部にあるかT_2に外接していることより，

$$\sqrt{(x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2}\geqq 1+1,\ (x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2\geqq 4\cdots\cdots\cdots②$$

よって，Sの中心が存在しうる範囲Dは，①②より，

$$x^2+y^2+z^2\leqq 4\cdots\cdots\cdots①'$$
$$(x-2)^2+y^2+z^2\geqq 4\cdots\cdots\cdots②'$$



ここで，平面$x=k\ (0\leqq k\leqq 1)$で①′ ②′の共通範囲を切断すると，

$$y^2+z^2\leqq 4-k^2\cdots\cdots\cdots①'$$
$$y^2+z^2\geqq 4-(k-2)^2\cdots\cdots\cdots②'$$

これより，切り口は，x軸上に中心があり，外径が$\sqrt{4-k^2}$，内径が$\sqrt{4-(k-2)^2}$のドーナツ形であり，その面積$S(k)$は，

$$S(k)=\pi(4-k^2)-\pi\{4-(k-2)^2\}=\pi(4-4k)$$

これより，立体Dの体積Vは，

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3+\int_0^1 S(k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+\int_0^1\pi(4-4k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+2\pi=\frac{22}{3}\pi$$

［解 説］

平面図形では頻出の内接と外接を題材にした問題です。対象が空間図形でも同じように考えることができます。なお，球面の方程式などについては「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

22 [2011 東北大]

(1) 円 C の中心 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ は, 点 $(a,\ -a)$ を通り, 接線 $y=-x$ に垂直な直線上にあり,

$$Y+a=X-a\,,\ \ X=Y+2a\cdots\cdots\text{①}$$

また, 点 P と点 $(a,\ -a)$ の距離と, 点 P と点 $(0,\ 1)$ の距離は等しいので,

$$(X-a)^2+(Y+a)^2=X^2+(Y-1)^2\,,\ \ -2aX+2(a+1)Y+2a^2=1\cdots\cdots\text{②}$$

①②より, $-2a(Y+2a)+2(a+1)Y+2a^2=1$, $2Y=2a^2+1$ となり,

$$Y=\frac{2a^2+1}{2}\,,\ \ X=\frac{2a^2+1}{2}+2a=\frac{2a^2+4a+1}{2}$$

(2) (1)より, 点 P の軌跡は, $x=\dfrac{2a^2+4a+1}{2}$, $y=\dfrac{2a^2+1}{2}$ から,

$$\frac{dx}{da}=2a+2\,,\ \ \frac{dy}{da}=2a$$

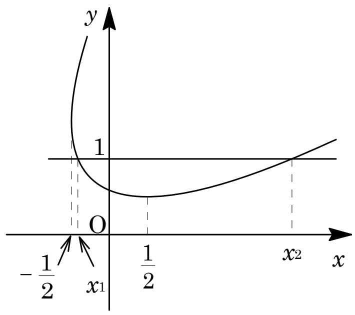
すると, x, y の増減は右表のようになる。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{da}$	$-$	0	$+$		$+$
x	↘	$-\dfrac{1}{2}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↗
$\dfrac{dy}{da}$	$-$		$-$	0	$+$
y	↘	$\dfrac{3}{2}$	↘	$\dfrac{1}{2}$	↗

また, 点 P の軌跡と直線 $y=1$ との交点は,

$$\frac{2a^2+1}{2}=1\,,\ \ a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより, 点 P の軌跡と直線 $y=1$ とで囲まれる図形の面積 S は,



$$\begin{aligned}S&=\int_{x_1}^{x_2}(1-y)\,dx\\&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big(1-\frac{2a^2+1}{2}\Big)(2a+2)\,da\\&=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^3-2a^2+a+1)\,da\\&=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^2+1)\,da\\&=2\Big[-\frac{2}{3}a^3+a\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

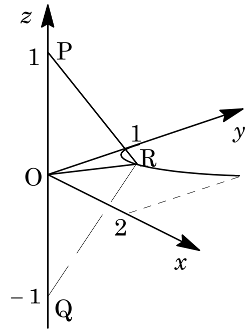
［解 説］

(2)では, 最初, パラメータを消去しようとしましたが, 交点の座標の値をみて, 考え直しました。その結果が, 上の解答例です。

$\boxed{23}$ [2011 熊本大]

(1) まず，△PQR の xy 平面での切り口は，線分 OR である。

すると，立体 K を xy 平面で切ったときの断面は，線分 OR の通過領域として求められる。



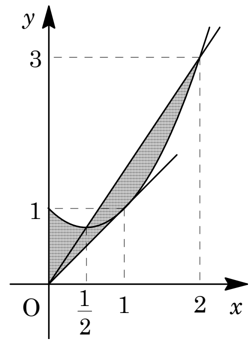
さて，$0\leqq t\leqq 2$ のとき，点 $\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ は，xy 平面上で放物線 $y=x^2-x+1\ (0\leqq x\leqq 2)$ ……①を描く。

以下，xy 平面上で考えると，①から，$y'=2x-1$ となり，点 $(a,\ a^2-a+1)$ における接線の方程式は，

$$y-(a^2-a+1)=(2a-1)(x-a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

原点を通るとき，$-(a^2-a+1)=-a(2a-1)$，$a^2-1=0$

$0\leqq a\leqq 2$ から $a=1$ であり，このとき②は，$y=x$ となる。



さらに，$t=2$ のとき $\mathrm{R}(2,\ 3)$ で，直線 $\mathrm{OR}: y=\dfrac{3}{2}x$ と放物線①との交点は，$x^2-x+1=\dfrac{3}{2}x$ より，

$$2x^2-5x+2=0\,,\ x=\frac{1}{2},\ 2$$

以上より，線分 OR の通過領域は，右図の網点部となり，その面積を S_0 とすると，

$$S_0=\int_0^1(x^2-x+1)\,dx-\frac{1}{2}\times1^2+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{\frac{3}{2}x-(x^2-x+1)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1-\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(2-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{43}{48}$$

(2) まず，立体 K を z 軸に垂直な平面で切ったときの断面は，K を xy 平面で切ったときの断面と相似である。

そこで，$0\leqq k\leqq 1$ のとき，K を平面 $z=k$ で切ったときの断面積を S_k とおくと，相似比が $1-k:1$ であることから，$S_k:S_0=(1-k)^2:1$ となり，

$$S_k=(1-k)^2S_0=\frac{43}{48}(1-k)^2$$

立体 K は xy 平面について対称なので，その体積 V は，

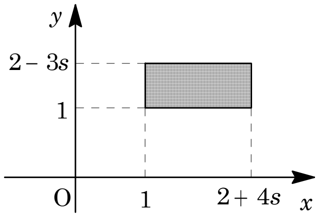
$$V=2\int_0^1 S_k\,dk=\frac{43}{24}\int_0^1(k-1)^2\,dk=\frac{43}{72}\Big[(k-1)^3\Big]_0^1=\frac{43}{72}$$

［解 説］

設問(1)の定点通過する線分 OR の通過領域は，図形的に解いています。

$\boxed{24}$ ［2011 名古屋大］

(1) 右図の長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 K_s の体積 $V(s)$ は,



$$V(s)=\pi\{(2-3s)^2-1^2\}(2+4s-1)$$
$$=3\pi(3s^2-4s+1)(4s+1)$$
$$V'(s)=3\pi\{(6s-4)(4s+1)+4(3s^2-4s+1)\}$$
$$=6\pi s(18s-13)$$

すると，$-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ における $V(s)$ の増減は右表のようになる。

s	$-\dfrac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		$\nearrow$	3π	$\searrow$	

よって，$V(s)$ は，$s=0$ のとき最大値 3π をとる。

(2) $s=0$ のとき，長方形 $R_s:1\leqq x\leqq 2,\ 1\leqq y\leqq 2$ となり，立体 K_s を表す式は,

$$1\leqq y^2+z^2\leqq 4\ ,\ 1\leqq x\leqq 2$$

さて，立体 K_s を，平面 $y=k$ で切断したときの断面は,

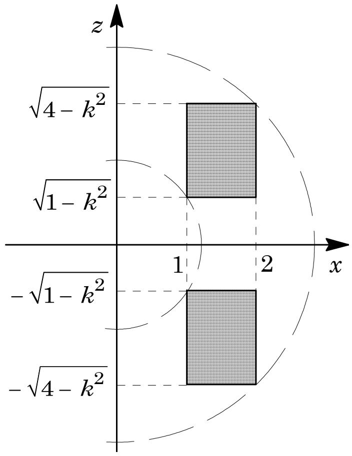
$$1-k^2\leqq z^2\leqq 4-k^2\cdots\cdots\cdots①,\ 1\leqq x\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，断面の存在する k の範囲は，$-2\leqq k\leqq 2$ であるが，xz 平面に関する対称性から，以下，$0\leqq k\leqq 2$ で考える。

(i) $0\leqq k\leqq 1$ のとき

①より，$\sqrt{1-k^2}\leqq|z|\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。



この断面を y 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ形の図形の外径を R，内径を r とすると,

$$R^2=2^2+\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=8-k^2$$
$$r^2=1^2+\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2=2-k^2$$

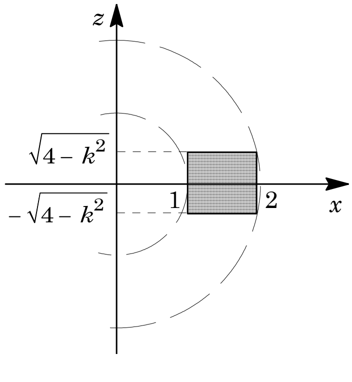
よって，このドーナツ形の面積 $S(k)$ は,

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=6\pi$$

(ii) $1\leqq k\leqq 2$ のとき

$1-k^2\leqq 0$ より，①から，$-\sqrt{4-k^2}\leqq z\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。



この断面を y 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ形の図形の外径を R，内径を r とすると,

$$R^2=2^2+\left(\sqrt{4-k^2}\right)^2=8-k^2\ ,\ r^2=1^2$$

よって，この図形の面積$S(k)$は，$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(7-k^2)$

(i)(ii)より，立体Lの体積Vは,

$$V=2\int_0^2 S(k)\,dk=2\int_0^1 6\pi\,dk+2\int_1^2 \pi(7-k^2)\,dk=12\pi+2\pi\Big[\,7k-\frac{k^3}{3}\,\Big]_1^2$$

$$=12\pi+\frac{28}{3}\pi=\frac{64}{3}\pi$$

［解 説］

立体の回転体の体積を求める問題で，20 年ほど前にはよく見かけました。回転軸に垂直に切った断面の形状を考えることがポイントです。なお，上の解答例で用いた円柱面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

$\boxed{25}$ ［2012 千葉大］

(1) $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ より，

$$\int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx=\left[\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)\right]_a^b-\int_a^b -f'(x)\,dx$$
$$=\frac{a-b}{2}f'(b)-\frac{b-a}{2}f'(a)+\Big[\,f(x)\Big]_a^b$$
$$=f(b)-f(a)$$

(2) 車が時刻 0 で発進後，時刻 t での位置を $x(t)$ とすると，$0<T$ に対して，

$$L=\left|\int_0^T x'(t)\,dt\right|=\left|x(T)-x(0)\right|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，条件より，$x'(0)=x'(T)=0$ なので, (1)から，

$$x(T)-x(0)=\int_0^T\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\,dt\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\left|x''(t)\right|<\dfrac{4L}{T^2}$ と仮定すると，①②より，

$$L=\left|\int_0^T\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\,dt\right|\leqq\int_0^T\left|\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\right|dt=\int_0^T\left|\frac{T}{2}-t\right|\left|x''(t)\right|dt$$
$$<\frac{4L}{T^2}\int_0^T\left|\frac{T}{2}-t\right|dt=\frac{4L}{T^2}\left(\frac{T^2}{8}+\frac{T^2}{8}\right)=L$$

すると，$L<L$ となり成立しない。

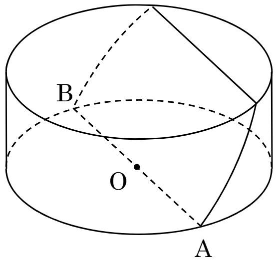
よって，この車の加速度の絶対値 $\left|x''(t)\right|$ は，ある瞬間に $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である。

［解 説］

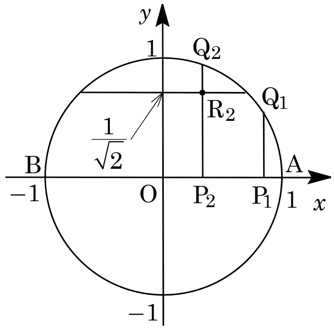
速度，加速度が題材になっているユニークな問題です。(1)の結論を利用すると，(2)の背理法へとスムーズに繋がります。なお，定積分の計算は，記述を省略しましたが，面積を対応させて値を求めています。

26 ［2013 東北大］

(1) 半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱を，底面の直径 AB を含み底面と 45° の角度をなす平面で切断したときできる部分のうち，体積の小さい方を V とする。



さて，点 O を原点，A(1, 0, 0)，B(−1, 0, 0) とおく。さらに，直径 AB 上に $0\leqq t\leqq 1$ として点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ 0)$ をとり，P を通り AB と直交する平面で立体 V を切断する。



(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1$ のとき

$\mathrm{P_1}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q_1}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$ とおくと，切り口は，直角をはさむ辺の長さが $\mathrm{P_1Q_1}=\sqrt{1-t^2}$ の直角二等辺三角形となり，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2=\frac{1}{2}(1-t^2)$$

(ii) $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$\mathrm{P_2}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q_2}(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$，$\mathrm{R_2}\left(t,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ とおくと，切り口は，上底の長さ $\mathrm{R_2Q_2}=\sqrt{1-t^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，下底の長さ $\mathrm{P_2Q_2}=\sqrt{1-t^2}$，高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の台形となり，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-t^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}$$

(2) V の体積を W とおくと，対称性より，

$$W=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\right)dt+2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1}{2}(1-t^2)\,dt$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(1-t^2)\,dt$$

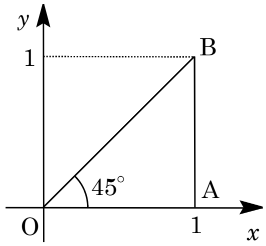
$$=\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{5}{12}\sqrt{2}+\frac{2}{3}$$

［解 説］

教科書などでよく見かけるタイプですが，本問では，低い直円柱という「ひねり」が加わっています。

$\boxed{27}$ ［2013 大阪大］



3 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐 V の側面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると,

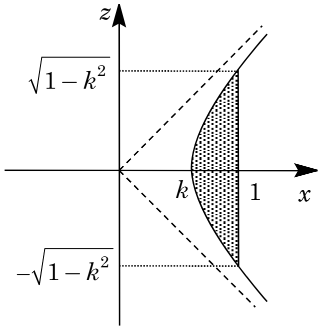
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos 45^\circ$$

$$x=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

$$x^2=y^2+z^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

この円錐 V を y 軸に垂直な平面 $y=k\ \ (0\leqq k\leqq 1)$ で切断すると, その切り口は,

$$x^2=k^2+z^2,\ \ x^2-z^2=k^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$



そこで, この切り口を y 軸のまわりに 1 回転させると, その形状はドーナツ形になり, その外径を R, 内径を r とおくと,

$$R=\sqrt{1^2+(\sqrt{1-k^2})^2}=\sqrt{2-k^2}\ ,\ \ r=k$$

すると, 切り口の面積 $S(k)$ は,

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(2-k^2-k^2)=2\pi(1-k^2)$$

よって, 円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は, xz 平面に関する対称性から,

$$2\int_0^1 S(k)dk=4\pi\int_0^1(1-k^2)dk=4\pi\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=\frac{8}{3}\pi$$

［解 説］

阪大頻出の立体の求積問題です。円錐の回転体が題材ですが, 内容は基本事項の組合せです。なお, 円錐面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

28 ［2014 金沢大］

(1) $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ に対して，$y'=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$ となり，

$$y''=-\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})\cdot 2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^4}$$

$$=-\frac{(e^x+e^{-x})^2-2(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{2x}-6+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{4x}-6e^{2x}+1}{e^{2x}(e^x+e^{-x})^3}$$

ここで，$y''=0$ とすると，$e^{2x}=3\pm2\sqrt{2}$ となり，

$$x=\frac{1}{2}\log(3\pm2\sqrt{2})=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}\pm1)^2=\log(\sqrt{2}\pm1)$$

この x の値の前後で y'' の符号は変わり，x 座標の大きい方の変曲点 P の x 座標は $\log(\sqrt{2}+1)$ である。

(2) 条件より，$b=\log(\sqrt{2}+1)$，$\tan\theta=e^b=\sqrt{2}+1$ なので，

$$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(3+2\sqrt{2})}=-1$$

これより，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $2\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$\theta=\dfrac{3}{8}\pi$ である。

(3) 直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を S とする。

ここで，$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}>0$ なので，$S=\displaystyle\int_0^b\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^b\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ である。

(2)より，$e^x=\tan\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$e^xdx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ より，

$$dx=\frac{1}{\tan\theta\cos^2\theta}d\theta=\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta$$

すると，$S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}d\theta=\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

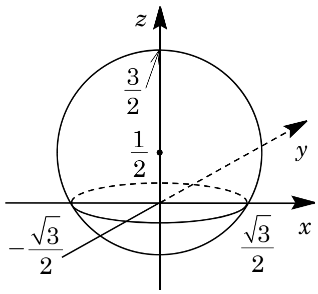
［解 説］

(2)の設問が(3)の定積分の計算への誘導となっています。(2)がない場合は $e^x=t$ とおいた後，$t=\tan\theta$ とするので，結局，同じことになります。ただ，上端の値がちょっとわかりにくいですが。

$\boxed{29}$ [2014 名古屋大]

(1) 半径 1 の球 B の中心から直線 l に垂線を下ろすと，その足は長さ$\sqrt{3}$の線分の中点となり，Bの中心と l との距離 d は,

$$d=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$



(2) 直線 l を x 軸とすると，(1)から B の球面は,

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，B を x 軸に垂直な平面 $x=k$ ……②で切断したときの断面は，①②を連立して,

$$y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1-k^2$$

これより，断面は平面 $x=k$ 上で，点$\left(k,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$を中心とする半径$\sqrt{1-k^2}$の円であることがわかる。なお，$yz$ 平面に関する対称性より，以下，$0\leqq k\leqq 1$ で考える。

(i) $0\leqq k\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，半径$\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$の円板となり，その面積 $S(k)$ は,

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2=\pi\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)$$

(ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq 1$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，外径$\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$で内径$\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}$のドーナツ形となり，その面積 $S(k)$ は,

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}\right)^2=2\pi\sqrt{1-k^2}$$

(i)(ii)より，求める立体の体積を V とすると，対称性を考えて,

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)dk+2\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 2\sqrt{1-k^2}\,dk$$

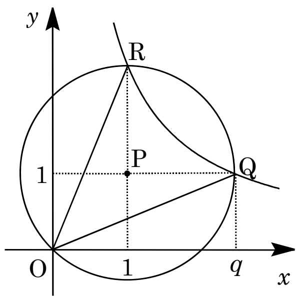
$$=2\pi\left[\frac{5}{4}k-\frac{k^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2\pi\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+4\pi\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$=\sqrt{3}\pi+\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

［解 説］

立体の回転体の求積についての頻出問題です。要演習の 1 題です。

30 ［2015 広島大］



(1) 円 C_1 は中心 $\mathrm{P}(1,\ 1)$，半径は $\sqrt{2}$ から，

$$C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，C_1 と $C_2: y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)\cdots\cdots②$は点 Q, R で交わり，PQ は x 軸に平行であることより，$\mathrm{Q}(1+\sqrt{2},\ 1)$ となる。これより，$q=1+\sqrt{2}$ である。そして，C_2 が点 Q を通ることより，②から $k=(1+\sqrt{2})\cdot 1=1+\sqrt{2}$ である。

さらに，C_1，C_2 がともに直線 $y=x$ について対称なので $\mathrm{R}(1,\ 1+\sqrt{2})$ となり，$r=1$ である。

(2) C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+\sqrt{2})+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot 1$$
$$=(1+\sqrt{2})\Big[\log x\Big]_1^{1+\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})$$

(3) $I=\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ に対して，$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと,

$$I=\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(4) 円 C_1 の $y\geqq 1$ の部分は, ①より $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ となる。

すると, 求める回転体の体積 V は,

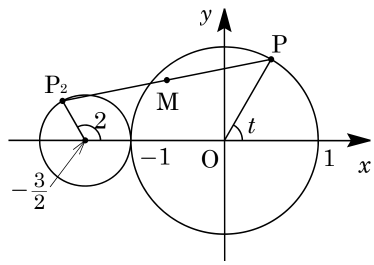
$$V=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2dx-\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{x^2}dx$$
$$=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\left\{3-(x-1)^2+2\sqrt{2-(x-1)^2}\right\}dx-(1+\sqrt{2})^2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\pi\Big[3x-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_1^{1+\sqrt{2}}+2\pi I-(1+\sqrt{2})^2\pi\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\left(3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\pi+2\pi\cdot\frac{\pi}{2}-(1+\sqrt{2})^2\left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}+1\right)\pi$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi+\pi^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\pi=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\right)\pi+\pi^2$$

［解 説］

定積分による求積問題です。誘導つきで計算量も標準的です。なお, (2)はよく見かけるものです。

$\boxed{31}$ ［2015 千葉大］

C_1 は原点中心で半径 1 の円，C_2 は点$\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$中心で半径$\dfrac{1}{2}$の円である。このとき，時刻 $t=0$ から $t=2\pi$ において，点 P_1 は C_1 上を点$(1,\ 0)$から反時計まわりに一周，点 P_2 は C_2 上を点$(-1,\ 0)$から反時計まわりに二周することから，$P_1(\cos t,\ \sin t)$



$$P_2\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

すると，P_1 と P_2 の中点 $M(x,\ y)$ は，

$$x=\frac{1}{2}\left(\cos t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}\sin t$$

さて，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，$f(2\pi-t)=f(t)$，$g(2\pi-t)=-g(t)$

これより，点 M の軌跡について，$0\leqq t\leqq \pi$ の部分と $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分は x 軸について対称となる。以下，$0\leqq t\leqq \pi$ の場合について，軌跡の概形を調べる。

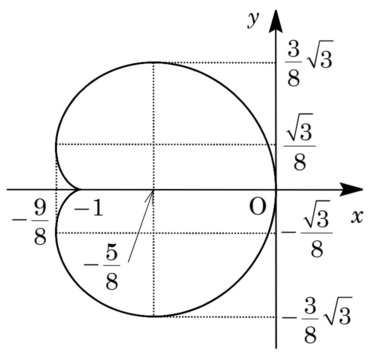
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin t=-\sin\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t=\cos\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	0	↘	$-\frac{5}{8}$	↘	$-\frac{9}{8}$	↗	-1
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\frac{3}{8}\sqrt{3}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	↘	0

t の値の変化に伴う x, y の値の変化は右表のようになる。

さらに，この $0\leqq t\leqq \pi$ における曲線を x 軸対称し，もとの曲線と合わせた曲線が，求める点 M の軌跡である。図示すると，右図のようになる。



また，M の軌跡によって囲まれる図形の面積 S は，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の曲線部分を $y=y_1$，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq t\leqq \pi$ の曲線部分を $y=y_2$ とおくと，

$$S=2\int_{-\frac{9}{8}}^{0}y_1\,dx-2\int_{-\frac{9}{8}}^{-1}y_2\,dx$$

$$=2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}g(t)f'(t)dt-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}g(t)f'(t)dt=2\int_{\pi}^{0}g(t)f'(t)dt$$

ここで，$g(t)=\dfrac{1}{4}(\sin 2t+2\sin t)$，$f'(t)=-\dfrac{1}{2}(\sin 2t+\sin t)$ から，

$$S=2\int_{\pi}^{0}-\frac{1}{8}(\sin 2t+2\sin t)(\sin 2t+\sin t)\,dt$$
$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}(\sin^2 2t+3\sin 2t\sin t+2\sin^2 t)\,dt$$
$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 4t-3\cos 3t+3\cos t+2-2\cos 2t)\,dt$$
$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(3-\cos 4t-3\cos 3t-2\cos 2t+3\cos t)\,dt$$
$$=\frac{1}{8}\Big[\,3t-\frac{\sin 4t}{4}-\sin 3t-\sin 2t+3\sin t\,\Big]_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi$$

［解 説］

パラメータ曲線についての微積分です。方針は明確に決まりますが，この問題のように計算量が多いのが，その特徴です。そのため，対称性を把握して，記述量を減らすことがポイントになります。

32 [2015 九州大]

(1) xy 平面上の点 $(x_0,\ y_0,\ 0)$ を通り，方向ベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ の直線は，

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ 0)+t(0,\ \sqrt{3},\ -1)\ \ (t \text{ は実数})\cdots\cdots\cdots①$$

また，原点を中心とする半径 1 の球は，$x^2+y^2+z^2=1\cdots\cdots\cdots②$

①②を連立すると，$x_0{}^2+(y_0+\sqrt{3}t)^2+(-t)^2=1$

$$4t^2+2\sqrt{3}y_0t+x_0{}^2+y_0{}^2-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

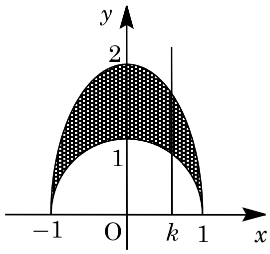
条件より，①と②が $z\geqq 0$ すなわち $-t\geqq 0$ $(t\leqq 0)$ で接することより，

$$D/4=3y_0{}^2-4(x_0{}^2+y_0{}^2-1)=0\cdots\cdots④,\ \ -\frac{\sqrt{3}}{4}y_0\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より $4x_0{}^2+y_0{}^2=4$，⑤より $y_0\geqq 0$ となり，xy 平面上にできる影の境界線は，

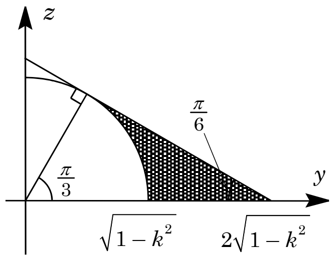
$$4x^2+y^2=4,\ \ y\geqq 0$$

すると，球の外の影は右図の網点部となる。そして，直線 $x=k$ と領域の境界線 $4x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ の交点は，それぞれ $y=\sqrt{4-4k^2}=2\sqrt{1-k^2}$，$y=\sqrt{1-k^2}$ であるので，求める y 座標の範囲は，$\sqrt{1-k^2}\leqq y\leqq 2\sqrt{1-k^2}$



(2) 右図の網点部の面積は，$\dfrac{1}{2}(\pi\cdot 1\cdot 2-\pi\cdot 1^2)=\dfrac{1}{2}\pi$ である。

(3) 球の外で光が当たらない部分を平面 $x=k$ で切断すると，その切り口は右図の網点部となる。



その面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot 2\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(1-k^2)$$

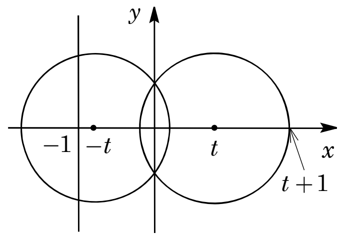
よって，球の外で光が当たらない部分の体積 V は，

$$V=\int_{-1}^{1}S(k)dk=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\int_0^1(1-k^2)dk=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{9}\pi$$

［解 説］

20 年ほど前には，よく出題された平行光源が題材となっています。その後，高校課程では空間図形の分野は薄められ，見かけることが少なくなりました。ただ，今年からの現行課程では，教科書の記述からすると，空間図形の分野は強化されていますので，繰り返す歴史の一つの例かもしれません。

$\boxed{33}$　　　　[2015 大阪大]



(1) 時刻 t において，球 A は中心の座標が $(t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したもの，また球 B は中心の座標が $(-t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x+t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したものである。

さて，球 A, B の交線は yz 平面上にあるので，$x\geqq -1$ における $A\cup B$ の体積 $V(t)$ は，

$$V(t)=\pi\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\pi\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$ とすると，

$$I_1=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x+t)^3\,\Big]_{-1}^{0}=1-\frac{1}{3}\{t^3-(-1+t)^3\}=-t^2+t+\frac{2}{3}$$

$$I_2=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x-t)^3\,\Big]_{0}^{t+1}=t+1-\frac{1}{3}(1+t^3)=-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}$$

よって，$V(t)=\pi(I_1+I_2)=\pi\Big(-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}\Big)$

(2) $f(t)=-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}$ とおくと，$V(t)=\pi f(t)$ となり，

$$f'(t)=-t^2-2t+2$$

すると，$0\leqq t\leqq 1$ における $f'(t)=0$ の解は $t=-1+\sqrt{3}$ となり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$			$\searrow$

ここで，$f(t)$ を $-f'(t)$ で割ると，$f(t)=-f'(t)\Big(-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{3}\Big)+2t+\dfrac{2}{3}$ から，

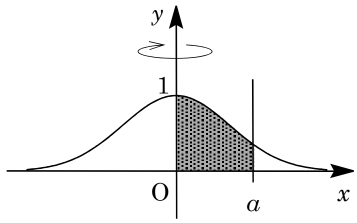
$$f(-1+\sqrt{3})=2(-1+\sqrt{3})+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}+2\sqrt{3}$$

よって，$V(t)$ の最大値は，$\pi f(-1+\sqrt{3})=\Big(-\dfrac{4}{3}+2\sqrt{3}\,\Big)\pi$ である。

［解　説］

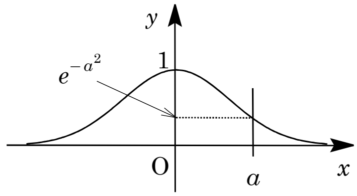
阪大・理系の定番である立体の体積を求める問題です。ただ，例年に比べ穏やかな内容になっています。

34 [2015 東京工大]



(1) 曲線$y=e^{-x^2}$と x 軸, y 軸, および直線$x=a$で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体Aの体積Vは,

$$V=\int_0^a 2\pi x\cdot e^{-x^2}\,dx=2\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^a$$
$$=-\pi\left(e^{-a^2}-1\right)=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$



(2) xy 平面に垂直にz軸をとり, Aについて平面$y=k$で切断したときの切り口を考えると,

(i) $0\leqq k\leqq e^{-a^2}$のとき

切り口は, $x^2+(y-k)^2+z^2=a^2$かつ$y=k$より,

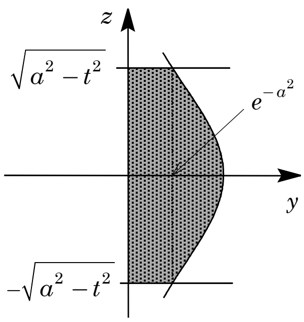
$$x^2+z^2=a^2\quad (0\leqq y\leqq e^{-a^2})\cdots\cdots\cdots①$$

(ii) $e^{-a^2}\leqq k\leqq 1$のとき

$y=e^{-x^2}$を変形すると$x^2=-\log y$, $x\geqq 0$において$x=\sqrt{-\log y}$となる。

すると, 切り口は, $x^2+(y-k)^2+z^2=-\log k$かつ$y=k$より,

$$x^2+z^2=-\log y\quad (e^{-a^2}\leqq y\leqq 1)\cdots\cdots\cdots②$$



さて, Aを平面$x=t$ $(-a\leqq t\leqq a)$で切断すると,

①より, $0\leqq y\leqq e^{-a^2}$において, $t^2+z^2=a^2$から,

$$z=\pm\sqrt{a^2-t^2}$$

②より, $e^{-a^2}\leqq y\leqq 1$において, $t^2+z^2=-\log y$から,

$$y=e^{-(z^2+t^2)}$$

よって, 切り口は右図の網点部となる。この面積を$S(t)$とすると, $-a\leqq-\sqrt{a^2-t^2}\leqq\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$から,

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(z^2+t^2)}\,dz\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(z^2+t^2)}\,dz=\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

(3) (2)より, $V=\displaystyle\int_{-a}^{a}S(t)dt\leqq\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds\Big)dt=\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt$

ここで, $I=\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$とおくと, $\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt=I\int_{-a}^{a}e^{-t^2}dt=I^2$

よって, $V\leqq I^2$すなわち$\sqrt{V}\leqq I$となり, (1)から$\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$

［解 説］

回転体 A を立式した後, 平面$x=t$による切り口を図示というやや迂遠な解法です。

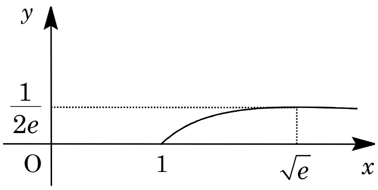
$\boxed{35}$ ［2016 熊本大］

(1) $x \geqq 1$のとき，$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$に対して，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}x^2-2x\log x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

すると，$f'(x)=0$の解は$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$であるので，$f(x)$は増減が右表のようになり，$x=\sqrt{e}$のとき最大値$\dfrac{1}{2e}$をとる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$

(2) 曲線$y=f(x)$と 2 直線$y=0$，$x=\sqrt{e}$で囲まれた図形Dの面積をSとおくと，



$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}dx$$

ここで，$t=\log x$とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$となり，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}te^{-t}dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-\Big[e^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{2\sqrt{e}}+1$$

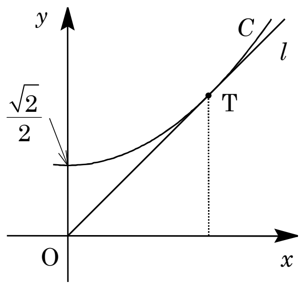
(3) 図形Dをy軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積Vは,

$$V=\int_1^{\sqrt{e}}2\pi x\cdot\frac{\log x}{x^2}dx=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x}dx=2\pi\Big[\frac{1}{2}(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}}=\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{\pi}{4}$$

［解 説］

面積および体積に関する計算問題です。被積分関数は頻出タイプです。なお, (3)の解答例は円筒分割によるものです。

36 ［2016 信州大］



(1) $l: y=x\ (x \geqq 0)$ ……①，$C: y=\frac{\sqrt{2}}{4}x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……②に対して，①と②を連立すると，

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}=x\,,\ \sqrt{2}x^2-4x+2\sqrt{2}=0$$

すると，$\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^2=0$ から $x=\sqrt{2}$ となり，接点 T の座標は $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ である。

(2) l 上の点 $\mathrm{A}(t)$ の座標は，$\mathrm{OA}(t)=t$ から $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

これより，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線は，

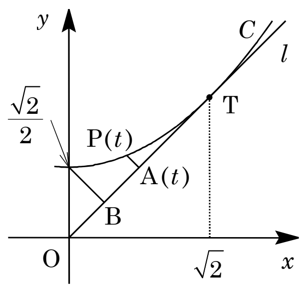
$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}t=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right),\ y=-x+\sqrt{2}t \cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}=-x+\sqrt{2}t$，$\sqrt{2}x^2+4x+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}t=0$ となり，

$$x^2+2\sqrt{2}x+2-4t=0,\ x=-\sqrt{2}\pm 2\sqrt{t}$$

③から $y=\sqrt{2}\mp 2\sqrt{t}+\sqrt{2}t$ なので，求める共有点の座標は，

$$(-\sqrt{2}+2\sqrt{t},\ \sqrt{2}-2\sqrt{t}+\sqrt{2}t),\ (-\sqrt{2}-2\sqrt{t},\ \sqrt{2}+2\sqrt{t}+\sqrt{2}t)$$



(3) $\mathrm{P}(t)$ の座標を $(-\sqrt{2}+2\sqrt{t},\ \sqrt{2}-2\sqrt{t}+\sqrt{2}t)$ とし，2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{P}(t)$ の距離を $d(t)$ とおくと，

$$d(t)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t+\sqrt{2}-2\sqrt{t}\right)=t-2\sqrt{2t}+2$$
$$=(\sqrt{t}-\sqrt{2})^2$$

さて，点 $\left(0,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ から l の下ろした垂線の足を B とすると $\mathrm{OB}=\frac{1}{2}$ であり，また(1)より，$\mathrm{OT}=2$ である。

そこで，C と l および y 軸とで囲まれた図形を，l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{d(t)\}^2dt=\frac{\pi}{24}+\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\sqrt{t}-\sqrt{2})^4dt$$

ここで，$u=\sqrt{t}-\sqrt{2}$ とおくと，$du=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2(u+\sqrt{2})}dt$ となり，

$$V=\frac{\pi}{24}+\pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}u^4\cdot 2(u+\sqrt{2})du=\frac{\pi}{24}+2\pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}(u^5+\sqrt{2}u^4)du$$
$$=\frac{\pi}{24}+2\pi\left[\frac{u^6}{6}+\frac{\sqrt{2}}{5}u^5\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0}=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{8}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{5}\pi\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\pi}{24}-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{10}=\frac{\pi}{10}$$

［解 説］

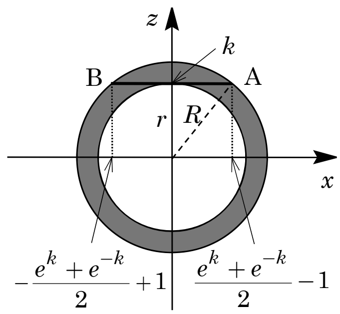
斜回転体の体積を求める問題で，(2)が(3)の誘導です。ただ，$\mathrm{OA}(t)$ の長さを t としたとき，$\mathrm{P}(t)$ の座標がややこしくないように問題が設定されています。その結果，$d(t)$ が簡単な式として表せ，積分計算も標準的というわけです。

$\boxed{37}$ ［2016 京都大］

図形 D : $y=z$，$|x| \leqq \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0 \leqq y \leqq \log a\ (a>1)$ を y 軸に垂直な平面 $y=k$ で切断したときの切り口は,

$$z=k,\ |x| \leqq \frac{e^k+e^{-k}}{2}-1,\ 0 \leqq k \leqq \log a$$

平面 $y=k$ 上で図示すると，右図の線分 AB となる。



さて，この線分を y 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R, 内径を r とすると,

$$R=\sqrt{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2},\ r=k$$

このドーナツ形の面積を $S(k)$ とすると,

$$S(k)=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left\{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2\right\}-\pi k^2=\pi\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)$$

したがって，図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V=\int_0^{\log a} S(k)dk=\frac{\pi}{4}\int_0^{\log a}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)dk$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2k}-\frac{1}{2}e^{-2k}-4e^k+4e^{-k}+6k\right]_0^{\log a}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{2}(a^2-1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)-4(a-1)+4\left(\frac{1}{a}-1\right)+6\log a\right\}$$
$$=\pi\left(\frac{a^2}{8}-\frac{1}{8a^2}-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\right)$$

［解 説］

空間図形の回転体の体積を求める問題です。回転軸に垂直な平面での切り口の面積を求め，それを回転軸方向に積分することで体積を計算するという基本に従っています。見かけよりはスムーズに進みます。

$\boxed{38}$ ［2016 神戸大］

(1) $C: r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を直交座標で表すと，

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\theta+\cos\theta+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

$$y=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin 2\theta-\sin\theta=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$ となり，対応する点は順に，

$$(2,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (2,\ 0)$$

②より，$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos 2\theta+\cos\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ となり，対応する点は順に，

$$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\right),\ (0,\ 0),\ \left(\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{-\sin\theta(2\cos\theta+1)}$ より，

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{(\cos\theta+1)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=-\frac{-2-1}{-2+1}\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

(3) $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおき，

$$f(2\pi-\theta)=f(\theta)$$

$$g(2\pi-\theta)=-g(\theta)$$

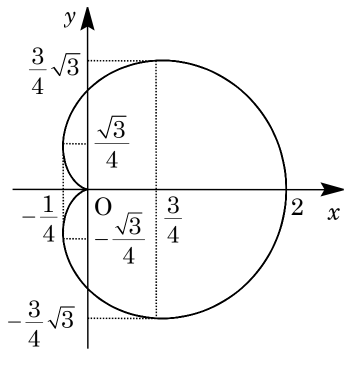
これより，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分は，x 軸対称となり，まず $0\leqq\theta\leqq\pi$ において $x,\ y$ の増減を調べると，右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

また，(2)から $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$ であり，さらに，

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

そして，この $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を x 軸に折り返してできる $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分を合わせると，曲線 C の概形は右図のようになる。



(4) 曲線 C の長さを l とし，(1)から，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2=\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$
$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

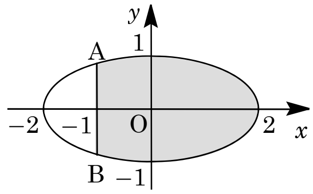
x 軸に関する対称性を利用すると,

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+1+2\cos(2\theta-\theta)}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8\Big[\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi}=8$$

［解 説］

カージオイドの概形をかき，その長さを求める問題です。まったく同じ問題を，一度は演習したにちがいないと思われますが……。

39 [2017 広島大]

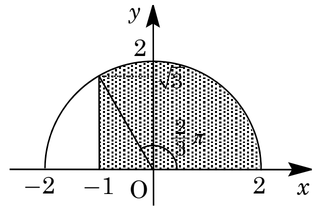


(1) 楕円 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に対して,

$$y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, C に囲まれる図形の $x\geqq -1$ の部分の面積を U とすると, x 軸に関する対称性より,

$$U=2\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

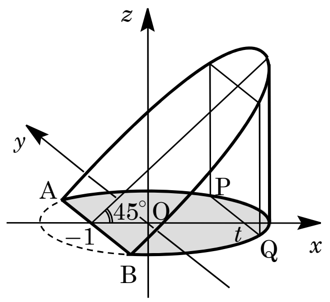


そして, U の値は右図の網点部の面積が対応し,

$$U=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $(*)$に $x=t$ を代入すると, $y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ となり, C と直線 $x=t$ の交点を P, Q とおくと,

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{4-t^2}$$



これより, 立体 V を平面 $x=t$ で切ったとき, 断面の長方形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\mathrm{PQ}\cdot\{t-(-1)\}\tan 45^\circ=(t+1)\sqrt{4-t^2}$$

(3) 立体 V の体積 W は, (1)の結果も利用して,

$$W=\int_{-1}^{2}S(t)dt=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$$
$$=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで, $4-t^2=u$ とおくと, $-2tdt=du$ から,

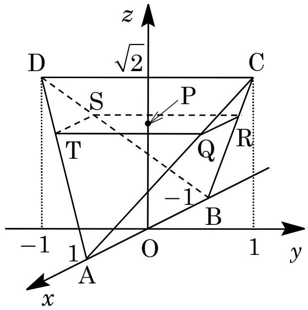
$$\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_{3}^{0}\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_{0}^{3}u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{3}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3=\sqrt{3}$$

よって, $W=\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。

［解 説］

立体の体積を求める頻出タイプの問題です。問題文に参考図が書かれているため, 見通しはかなりよくなっています。

40　　　　［2017 岡山大］

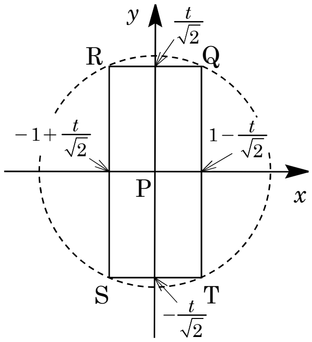


(1) 座標空間内の 4 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，D$(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$ より，辺 AC は $0\leqq q\leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+q(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$$
$$=(1-q,\ q,\ \sqrt{2}q)$$

ここで，点 P$(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面 $z=t$ との交点は，$\sqrt{2}q=t$ より $q=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ となり，$(x,\ y,\ z)=\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ である。

よって，交点 Q の座標は $\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。



(2) 点 P を通り z 軸に垂直な平面と辺 BC, BD, AD との交点を，それぞれ R, S, T とおくと，(1)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-1,\ -1,\ \sqrt{2})$ から T$\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。

また，点 R, S はそれぞれ点 Q, T を yz 平面に関して対称移動したものより，

$$\mathrm{R}\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right),\ \mathrm{S}\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$$

これより，平面 $z=t$ 上で，四角形 QRST は点 P を中心とする長方形であり，この長方形を z 軸のまわりに回転してできる円の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi\mathrm{PQ}^2=\pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\pi(1-\sqrt{2}t+t^2)$$

すると，四面体 ABCD を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

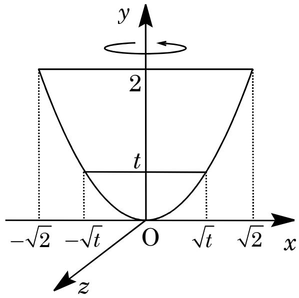
$$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(t)dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}t+t^2)dt=\pi\left[t-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\pi\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$$

［解 説］

立体の回転体の体積を求める頻出題です。誘導に従って計算していけばよいわけですが，それ以外に，対称性に注目して計算量を減らすことも重要です。

41 ［2017 大阪大］

(1) xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 L を，y 軸に直交する平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ で切断したときの切り口は，中心が点$(0,\ t,\ 0)$で半径が $\sqrt{t}$ の円板となるので，



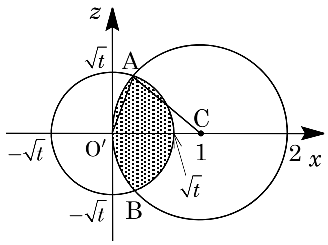
$$x^2+z^2\leqq t,\ \ y=t\cdots\cdots\cdots①$$

また，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下の点で構成される円柱を $y=t$ で切断したときの切り口は，

$$(x-1)^2+z^2\leqq 1,\ \ y=t\cdots\cdots\cdots②$$

すると，立体 M を $y=t$ で切断したときの切り口は，①②から，

$$x^2+z^2\leqq t,\ \ (x-1)^2+z^2\leqq 1,\ \ y=t$$



この連立不等式を平面 $y=t$ 上に図示すると右図の網点部になる。なお，$\mathrm{O}'(0,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ t,\ 0)$とし，2 円の交点を A, B とおく。すると，交点 A, B の x 座標は $x^2+z^2=t$ と $(x-1)^2+z^2=1$ を連立して，

$$2x-1=t-1,\ \ x=\frac{t}{2}$$

そこで，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{O'C}$ で $\mathrm{O'A}=\sqrt{t}$ より，$\sqrt{t}\cos\angle\mathrm{AO'C}=\dfrac{t}{2}$ となり，

$$2\cos\angle\mathrm{AO'C}=\sqrt{t},\ \ t=(2\cos\angle\mathrm{AO'C})^2$$

これより，$\angle\mathrm{AO'C}=\theta$ とおくことができ，$0\leqq t\leqq 2$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，網点部の面積を $S(t)$ とすると，$\angle\mathrm{ACO'}=\pi-2\theta$ から，

$$\begin{aligned}S(t)&=2\Big\{\frac{1}{2}(\sqrt{t})^2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\Big\}\\&=t\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta\\&=2\theta(1+\cos 2\theta)+\pi-2\theta-\sin 2\theta=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi\end{aligned}$$

(2) M の体積 V とすると，$V=\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ となり，(1)より，

$$\begin{aligned}V&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)(-8\cos\theta\sin\theta)\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\theta\cos 2\theta-4\sin 2\theta+4\pi)(\sin 2\theta)\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin 4\theta-2+2\cos 4\theta+4\pi\sin 2\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\Big[\sin 4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=0$，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\cos 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

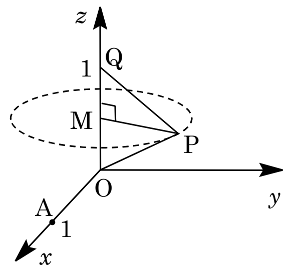
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\theta\sin 4\theta\,d\theta=-\Big[\theta\cos 4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta=-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{4}\pi$$

以上より，$V=-\dfrac{3}{4}\pi-2\cdot\dfrac{\pi}{4}+4\pi\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}\pi$ となる。

［解 説］

立体の体積計算という阪大の頻出問題です。(1)は(2)の計算を考えて，結論をまとめています。ただ，これでも(2)の積分計算は，簡単とはいえません。

42 [2017 東京大]



(1) 原点 O, 点Q$(0,\ 0,\ 1)$に対して, 線分 OQ の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$となる。

さて, 座標空間内で, 1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かすとき，$\mathrm{PM}\perp\mathrm{OQ}$，$\mathrm{PM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，点 P の座標は, φを$0^\circ\leqq\varphi<360^\circ$として，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,\ \dfrac{1}{2}\right)$とおくことができる。すると，点 P の x 座標がとりうる値の範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

また，点$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=1\cdot1\cdot\cos\theta$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$となり，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$から$30^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ$である。

(2) (1)から，Q$(0,\ 0,\ 1)$のとき, 辺 OP が通過してできる図形は, 頂点が原点で, 中心軸が z 軸の円錐側面 C である。そして, 点 Q が平面$x=0$上を動く, すなわち yz 平面上で中心が原点で半径 1 の円を描くとき, 辺 OP が通過してできる図形 K は, 円錐側面 C を x 軸のまわりに回転したものとなる。

さて, 円錐側面 C 上の任意の点を$\mathrm{X}(x,\ y,\ z)$とおくと，$\angle\mathrm{QOX}=\dfrac{\pi}{3}$から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\frac{\pi}{3},\quad z=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{2}$$

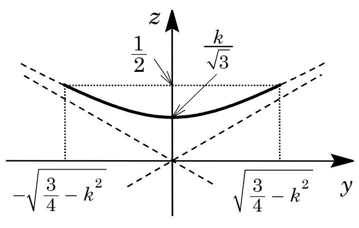
$0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}$から，両辺を 2 乗すると，$4z^2=x^2+y^2+z^2$となり,

$$3z^2=x^2+y^2\quad\left(0\leqq z\leqq\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に, 円錐側面 C を, x 軸に垂直な平面$x=k$で切断したときの切り口を考える。ただし, (1)から，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$とする。

すると, $(*)$から，$3z^2=k^2+y^2$となり,

$$y^2-3z^2=-k^2\quad\left(0\leqq z\leqq\frac{1}{2}\right)$$



$k\neq0$のときは双曲線の一部となり，平面$x=k$上に図示すると，右図の太線部のようになる。

さらに，この双曲線（太線部）を点$(k,\ 0,\ 0)$のまわりに回転してできるドーナツ形の外径を R, 内径を r, 面積を$S(k)$とおくと,

$$R=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-k^2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-k^2}\,,\ \ r=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi\left(1-k^2-\frac{k^2}{3}\right)=\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)$$

また，$k=0$ のときも，上記の $S(k)$ は成立している。

以上より，求める図形 K の体積を V とすると，yz 平面に関する対称性より，

$$V=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}S(k)dk=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk=2\pi\left[\,k-\frac{4}{9}k^3\,\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

［解 説］

東大で頻出の立体の体積を求める問題です。(1)が誘導になり，立式の方針が決まります。なお，円錐側面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

43 ［2018 東京医歯大］

(1) 関数 $f(x)=x-\log(1+x)$ に対して,

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$$

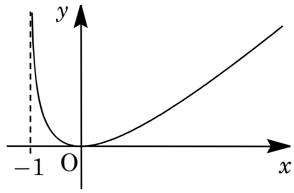
すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\{x-\log(1+x)\}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x\left\{1-\frac{\log(1+x)}{1+x}\cdot\frac{1+x}{x}\right\}=\infty$$

これより，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになり，$f(x)=p$ を満たす実数 x の個数は，$p<0$ のとき 0 個，$p=0$ のとき 1 個，$p>0$ のとき 2 個である。



(2) (1)より，$y=f(x)$ に対し，$x\geqq 0$ のとき y は $y\geqq 0$ で単調に増加する。このとき，$f(x)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

さて，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$ として，$g(p)=q$ とおくと，$p=f(q)$ であり,

$$g(p)-p=q-f(q)=q-\{q-\log(1+q)\}=\log(1+q)\geqq 0$$

よって，$p\leqq g(p)$ ………①

また，$u>0$ として，$F=\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u-g(p)$ と設定すると，$f(u)=u-\log(1+u)$，$f'(u)=\dfrac{u}{1+u}$ であることより,

$$F=\frac{1}{f'(u)}\{f(q)-f(u)\}+u-q$$

(i) $q=u$ のとき $F=\dfrac{1}{f'(u)}\{f(u)-f(u)\}+u-u=0$

(ii) $q>u$ のとき 平均値の定理より，$\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$ $(u<c<q)$

ここで，$x>0$ で，$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$ は正で単調増加より，$f'(c)>f'(u)$ となり,

$$\frac{f(q)-f(u)}{q-u}>f'(u),\quad \frac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$$

よって，$F>(q-u)+u-q=0$ である。

(iii) $q<u$ のとき (ii)と同様にして，$\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}=f'(c)$ $(q<c<u)$

そして，$f'(c)<f'(u)$ から $\dfrac{f(q)-f(u)}{q-u}<f'(u)$ となり，$\dfrac{f(q)-f(u)}{f'(u)}>q-u$

よって，$F>(q-u)+u-q=0$ である。

(i)～(iii)より，$F\geqq 0$ となり，$g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$ ………②

①②より，$p\leqq g(p)\leqq\dfrac{u+1}{u}\{p-u+\log(u+1)\}+u$

(3) $p>0$ として，曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(p,\ g(p))$ を通り，傾きが 1 の直線 l の方程式は，$q=g(p)$ とおくと，

$$y-q=x-p\ ,\ \ y=x-p+q$$

そして，l と x 軸および曲線 $y=g(x)$ によって囲まれた図形 D の面積を S とする。

さて，$y=g(x)\Leftrightarrow x=f(y)$，$y=x-p+q\Leftrightarrow x=y+p-q$ に注意して，図形 D を直線 $y=x$ に関して対称移動する。

すると，図形 D は直線 $m: y=x+p-q$ と y 軸および曲線 $y=f(x)$ によって囲まれた図形に移り，この図形を D' とすると D' の面積も S である。

そこで，曲線 $y=f(x)$ と m の位置関係を考えると，$0\leqq x\leqq q$ で，

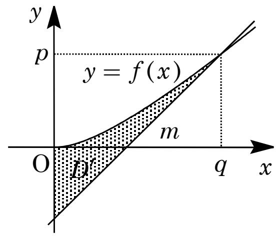
$$f(x)-(x+p-q)=f(x)-x-f(q)+q=-\log(1+x)+\log(1+q)\geqq 0$$

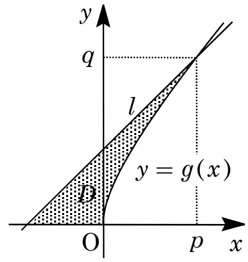
これより，図形 D' および図形 D は右図のようになり，

$$S=\int_0^q\{x-\log(1+x)-(x+p-q)\}dx$$
$$=\int_0^q\{-\log(1+x)-p+q\}dx$$
$$=-\big[(1+x)\log(1+x)\big]_0^q+\int_0^q dx-(p-q)q$$
$$=-(1+q)\log(1+q)+q-(p-q)q$$

ここで，$p=f(q)$ より，$p=q-\log(1+q)$ となり，

$$S=-(1+q)(q-p)+q-(p-q)q$$
$$=-q+p-q(q-p)+q-(p-q)q$$
$$=p$$





［解 説］

逆関数の絡んだ微積分の総合問題です。盛りだくさんです。なお，(2)では，式の形から平均値の定理を利用しましたが，普通に微分しても構いません。また，(3)で l と曲線 $y=g(x)$ の位置関係について，(2)の不等式を利用することもできますが……。

44 ［2018 大阪大］

(1) まず，$f(t)=2\sin t+\cos 2t$ に対して，

$$f'(t)=2\cos t-2\sin 2t$$
$$=2\cos t-4\sin t\cos t$$
$$=2\cos t(1-2\sin t)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

これより，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t)$ は $t=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

また，$g(t)=2\cos t+\sin 2t$ に対して，

$$g'(t)=-2\sin t+2\cos 2t$$
$$=-2\sin t+2(1-2\sin^2 t)$$
$$=-2(2\sin^2 t+\sin t-1)$$
$$=-2(2\sin t-1)(\sin t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	0

これより，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ における $g(t)$ の増減は右表のようになり，$g(t)$ は $t=\frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

(2) $0\leqq t_1<t_2\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $f(t_1)=f(t_2)$ より，$2\sin t_1+\cos 2t_1=2\sin t_2+\cos 2t_2$

$$2\sin t_1+1-2\sin^2 t_1=2\sin t_2+1-2\sin^2 t_2$$

$$\sin t_2-\sin t_1-\sin^2 t_2+\sin^2 t_1=0,\ (\sin t_2-\sin t_1)(1-\sin t_2-\sin t_1)=0$$

すると，$\sin t_2-\sin t_1>0$ から，$\sin t_1+\sin t_2=1$ ………①

さて，$g(t)^2=(2\cos t+\sin 2t)^2$ について，

$$g(t)^2=4\cos^2 t(1+\sin t)^2=4(1-\sin^2 t)(1+\sin t)^2=4(1-\sin t)(1+\sin t)^3$$

ここで，$u=\sin t$ とおき，$h(u)=(1-u)(1+u)^3$ $(0\leqq u\leqq 1)$ と設定すると，

$$g(t)^2=4h(u)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，$u_1=\sin t_1$，$u_2=\sin t_2$ とおくと，$0\leqq u_1<u_2\leqq 1$ となり，②から，

$$g(t_1)^2=4h(u_1),\ g(t_2)^2=4h(u_2)$$

また，①から，$u_1+u_2=1$ ………③

③から，$h(u_1)=(1-u_1)(1+u_1)^3=u_2(1+u_1)^3$，$h(u_2)=u_1(1+u_2)^3$ となり，

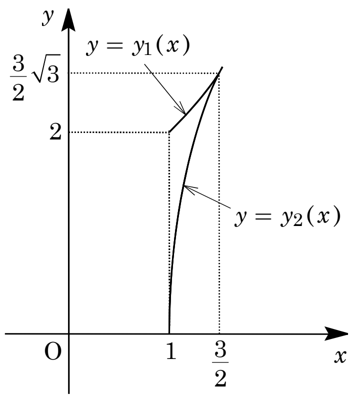
$$h(u_1)-h(u_2)=u_2(1+u_1)^3-u_1(1+u_2)^3$$
$$=(u_2-u_1)+3u_1u_2(u_1-u_2)+u_1u_2(u_1^2-u_2^2)$$
$$=(u_2-u_1)\{1-3u_1u_2-u_1u_2(u_1+u_2)\}=(u_2-u_1)(1-4u_1u_2)$$

ここで，③および $u_1<u_2$ に注意すると，相加平均と相乗平均の関係から，

$$1=u_1+u_2>2\sqrt{u_1u_2},\ 4u_1u_2<1$$

よって，$h(u_1)-h(u_2)>0$ となり，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ である。

(3) 曲線$C: x=f(t)$, $y=g(t)$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$の概形は, (1)(2)から, 右図のようになる。ここで, C の $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の部分を $y=y_1(x)$, $\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分を $y=y_2(x)$ とおくと, C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S は,



$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}\{y_1(x)-y_2(x)\}dx$$
$$=\int_1^{\frac{3}{2}}y_1(x)dx-\int_1^{\frac{3}{2}}y_2(x)dx$$

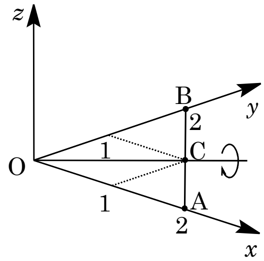
ここで, 変数を x から t に置き換えると,

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}g(t)f'(t)dt+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)f'(t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t+\sin 2t)(2\cos t-2\sin 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 t-2\sin 2t\cos t-2\sin^2 2t)dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+2\cos 2t-\sin 3t-\sin t-1+\cos 4t)dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{3}\cos 3t+\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}(-1)+(-1)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$$

［解 説］

パラメータ曲線と面積についての問題です。曲線 C の概形を書くために, (2)にかなりのボリュームのある問題が設定されています。

45 ［2018 神戸大］



(1) 点 H は直線 OC 上の点なので，t を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(1,\ 1,\ 0)=(t,\ t,\ 0)$$

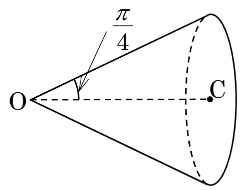
また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x-t,\ y-t,\ z)$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から $\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ となり，

$$(x-t)+(y-t)=0$$

よって，$t=\dfrac{x+y}{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\dfrac{x+y}{2},\ \dfrac{x+y}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\left(\dfrac{x-y}{2},\ \dfrac{-x+y}{2},\ z\right)$



(2) $\angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$ から，回転体 L は，線分 OC を中心軸とし，母線と中心軸のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ の直円錐（内部を含む）を表す。そして，点 P が L 上の点であるための条件は，

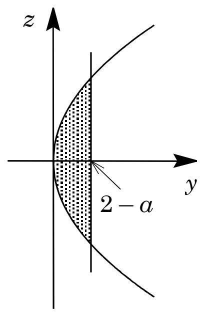
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\geqq|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$$0\leqq x+y\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$x+y\geqq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$(x+y)^2\geqq x^2+y^2+z^2$

$$z^2\leqq 2xy\cdots\cdots\cdots③$$

よって，②③より，$z^2\leqq 2xy$ かつ $0\leqq x+y\leqq 2$ である。



(3) L を平面 $x=a$ $(1\leqq a\leqq 2)$ で切った切り口は，③より，

$$z^2\leqq 2ay\cdots\cdots\cdots④$$

②より $0\leqq a+y\leqq 2$ から，$-a\leqq y\leqq 2-a\cdots\cdots\cdots⑤$

そして，④⑤を平面 $x=a$ 上に図示すると右図の網点部になり，その面積を $S(a)$ とおくと，y 軸に関する対称性から，

$$S(a)=2\int_0^{2-a}\sqrt{2ay}\,dy=2\sqrt{2a}\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2-a}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{2a}\,(2-a)\sqrt{2-a}=\frac{4}{3}\sqrt{2}\,(2-a)\sqrt{a(2-a)}$$

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z)\in L,\ 1\leqq x\leqq 2\}$ の体積を V とすると，

$$V=\int_1^2 S(a)da=\frac{4}{3}\sqrt{2}\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$$

ここで，$I=\displaystyle\int_1^2(2-a)\sqrt{a(2-a)}\,da$ とおくと，

$$I=\int_1^2(2-a)\sqrt{2a-a^2}\,da=\int_1^2(2-a)\sqrt{-(a-1)^2+1}\,da$$

さらに，$s=a-1$ とおくと，$ds=da$ となり，

$$I=\int_0^1(1-s)\sqrt{1-s^2}\,ds=\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds-\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds$$

そして，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-s^2}\,ds=\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{4}$，また $u=1-s^2$ とおくと $du=-2sds$ から，

$$\int_0^1 s\sqrt{1-s^2}\,ds=-\frac{1}{2}\int_1^0\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\Big[\,u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

したがって，$I=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}$ となるので，$V=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi-\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$ である。

［解 説］

立体の体積を求める問題です。たいへん詳しい誘導がついています。なお，回転体 L が直円錐であることは明らかなので，(2)では(1)の誘導を利用しませんでした。立式の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。また，(3)では，この円錐を母線に平行に切っていますので，放物線が出現しています。

46 [2018 東北大]

(1) 条件より，$S: x+y^2 \leqq 2$ ……①，$x+y \geqq 0$ ……②，$x-y \leqq 2$ ……③

まず，①と②の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x+y=0$ から，

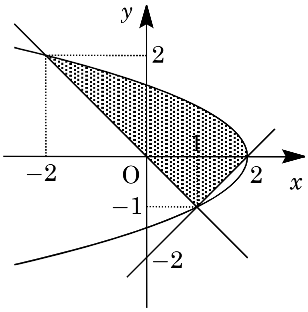
$$y^2-y=2,\ (y-2)(y+1)=0$$

よって，$(x,\ y)=(-2,\ 2)$，$(1,\ -1)$

また，①と③の境界線の交点は，$x+y^2=2$ かつ $x-y=2$ から，

$$y^2+y=0,\ y(y+1)=0$$

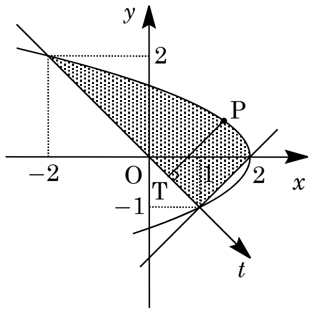
よって，$(x,\ y)=(2,\ 0)$，$(1,\ -1)$



以上より，図形 S は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2) ①の境界線上に点 $\mathrm{P}(-y^2+2,\ y)$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ をとり，P から直線 $y=-x$ に垂線を下ろし，その足を T とおく。

そして，右図のように t 軸を設定し，$\mathrm{OT}=|t|$ とすると，$\mathrm{T}\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ と表せる。



さて，P と直線 $y=-x$ すなわち $x+y=0$ との距離は，

$$\mathrm{PT}=\frac{|-y^2+2+y|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}|-y^2+y+2|$$

ここで，$0 \leqq y \leqq 2$ において，$-y^2+y+2=-(y+1)(y-2) \geqq 0$ から，

$$\mathrm{PT}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2) \text{………④}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ の単位ベクトルの成分は，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$ とおけるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PT}}=(-y^2+2,\ y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2+y+2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ -1)$$
$$=\left(-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+1,\ \frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y-1\right)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ から，$\dfrac{t}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}y^2-\dfrac{1}{2}y+1$ となり，

$$t=-\frac{1}{\sqrt{2}}y^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-y^2-y+2) \text{………⑤}$$

さて，図形 S を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-2\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\mathrm{PT}^2\,dt$$

ここで，変数を t から y に置換すると，⑤より，$t=-2\sqrt{2} \to \sqrt{2}$ のとき $y=2 \to 0$ となり，また $dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)dy$ から，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{2}^{0}\frac{1}{2}(-y^2+y+2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-2y-1)\,dy\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_{0}^{2}(-y^2+y+2)^2(2y+1)\,dy\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_{0}^{2}(2y^5-3y^4-8y^3+5y^2+12y+4)\,dy\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big[\frac{1}{3}y^6-\frac{3}{5}y^5-2y^4+\frac{5}{3}y^3+6y^2+4y\Big]_0^2\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\Big(\frac{64}{3}-\frac{96}{5}-32+\frac{40}{3}+24+8\Big)=\frac{58}{15}\sqrt{2}\pi
\end{aligned}
$$

［解 説］

斜回転体の体積を求める問題です。計算量に配慮した設定となっていますが，それでも最後の定積分は面倒です。