２０１９ 入試対策
２次数学アーカイブ

複素数
理系

２００１－２０１８

外林康治 編著

電送数学舎

複素数

【問題一覧】

1 複素数平面上の点zを考える。

(1) 実数a, cと複素数bが$|b|^2-ac>0$を満たすとき，$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0$を満たす点$z$は$a\neq 0$のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\bar{z}$は$z$に共役な複素数を表す。

(2) 0でない複素数dに対して，$dz(\bar{z}+1)=\bar{d}\bar{z}(z+1)$を満たす点$z$はどのような図形を描くか。 ［2001 九州大］

2 複素数平面上の点a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$を

$$a_1=1,\ a_2=i,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。ただし，iは虚数単位である。

(1) 3点b_1，b_2，b_3を通る円Cの中心と半径を求めよ。

(2) すべての点b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$は円Cの周上にあることを示せ。 ［2001 東京大］

3 次の問いに答えよ。ただし，偏角θは，$0°\leqq\theta<360°$の範囲で考えるものとする。

(1) $|z+i|=|z-i|$を満たす複素数zは，実数に限ることを示せ。

(2) 複素数平面上でzが実軸上を動くとき，複素数$z+i$の偏角$\arg(z+i)$の動く範囲を求めよ。

(3) zを未知数とする方程式$(z+i)^9=(z-i)^9$のすべての解zについて$z+i$の偏角$\arg(z+i)$を求めよ。 ［2002 名古屋大］

4 aを実数とし，zを複素数とする。複素数平面上で，a，z，z^2，z^3が表す4点が，あるひし形の4頂点になるとする。ただし，aとz^2が表す頂点は対角線上にあるとする。このようなaとzの値をすべて求めよ。 ［2003 千葉大］

5 次の問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とする。

(1) 複素数zに対し，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$とする。zが実軸上を動くとき，複素数平面上でwを表す点が描く図形を求めよ。

(2) 複素数zとその共役複素数$\bar{z}$に対し，$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2=\dfrac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$とする。$z\neq\pm i$のとき，複素数平面上で$w_1$を表す点をP，$w_2$を表す点をQとする。P, Qと原点Oが同一直線上にあることを示せ。 ［2003 神戸大］

6 O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) $\angle\mathrm{APB}$ を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。 [2003 東京大]

7 複素数 α，β は $|\alpha-1|=1$，$|\beta-i|=1$ を満たす。

(1) $\alpha+\beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。 [2003 一橋大]

8 複素数平面上に異なる 3 点 z，z^2，z^3 がある。

(1) z，z^2，z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。

(2) z，z^2，z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。また，z，z^2，z^3 が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ。

[2004 一橋大]

9 α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で, z が原点と点 α を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき, w の表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で, z が不等式 $|z|>1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。 [2005 千葉大]

10 t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，$w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。 [2005 九州大]

11　α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1)　複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき，C は原点を通る円であることを示せ。

(2)　複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3)　β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P，Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。　［2015 筑波大］

12　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。　［2016 千葉大］

13　多項式 $P(x)$ を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$ により定める。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数 a_0，…，a_7 をすべて求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3)　(1)で求めた a_1，a_3，a_5，a_7 を用いて，多項式 $Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ。　［2016 東北大］

14　z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。　［2016 東京大］

15 複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。
2. 時刻 1 に P は $\mathrm{Q}_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $\mathrm{Q}_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1) z_3，z_4 を求めよ。

(2) z_n を α , n を用いて表せ。

(3) P が $\mathrm{Q}_1(z_1)$，$\mathrm{Q}_2(z_2)$，…と移動するとき, P はある点 $\mathrm{Q}(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4) z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

［2016 広島大］

16 複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

(1) 等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。

［2016 筑波大］

17 $s>0$，$t>0$とする。複素数平面上の$\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに, 点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり, $\triangle$ACD が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) zをs, tを用いて表せ。

(2) α, β, γが等式$4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$を満たすとき，$\gamma$と z をそれぞれ求めよ。

(3) (2)で求めたγと z に対して, 直線 AC と直線 BD の交点を F とし, $\angle\mathrm{DFC}=\theta$とする。このとき，$\cos\theta$の値を求めよ。 [2017 熊本大]

18 α，β，γを複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$……$(*)$を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) zは，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$を仮定し，またγは負の実数であると仮定する。このとき，$(*)$を満たすzがちょうど 2 個あるための必要十分条件をα，βを用いて表せ。

[2017 東北大]

19 wを 0 でない複素数, x, yを$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$を満たす実数とする。

(1) 実数Rは$R>1$を満たす定数とする。wが絶対値Rの複素数全体を動くとき，xy平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2) 実数αは$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$を満たす定数とする。w が偏角αの複素数全体を動くとき，xy平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。 [2017 京都大]

20 複素数平面上の原点以外の点zに対して，$w=\dfrac{1}{z}$とする。

(1) αを 0 でない複素数とし，点αと原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線をLとする。点zが直線L上を動くとき，点wの軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち, 虚部が正であるものをβとする。点βと点β^2を結ぶ線分上を点zが動くときの点wの軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。 [2017 東京大]

21 複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする△OAB がある。ただし，O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，$\alpha\beta = z$ が成り立つとする。

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。　　[2017 北海道大]

22 実数 a, b, c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく。また，複素数平面内の単位円周から 2 点1，-1 を除いたものを T とする。

(1) $f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ。

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。　　[2017 東京工大]

23 複素数 $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ に対し，$\alpha=z+z^8$ とおく。$f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で，3 次の係数が 1 であり，かつ $f(\alpha)=0$ となるものとする。ただし，すべての係数が整数である多項式を，整数係数の多項式という。

(1) $f(x)$ を求めよ。ただし，$f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解を，α の 2 次以下の，整数係数の多項式の形で表せ。　　[2018 千葉大]

24 α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\bar{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。　　[2018 九州大]

25 $z+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような 0 と異なる複素数 z の全体を D とする。

(1) D を複素数平面上に図示せよ。

(2) k を実数とする。D に属する z で方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$ を満たすものが存在するような k の値の範囲を求めよ。ただし，i は虚数単位を表す。

[2018 北海道大]

$\boxed{26}$ α を複素数とする。複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，以下の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。

(1) 方程式①が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。

(2) 方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつように α が動くとする。原点を中心に α を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転させた点を表す複素数を β とするとき，点 β が複素数平面上に描く図形を図示せよ。 [2018 東北大]

$\boxed{27}$ 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ を満たす点 z の全体を H とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 θ の範囲は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) H の点 z に対して，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) H の点 z に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。w の絶対値 r_2 と偏角 θ_2 のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 [2018 熊本大]

$\boxed{28}$ 複素数 α に対して，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ を考える。次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)をすべて満たす複素数 α 全体の集合を S とする。

(Ⅰ) α は実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ) $|\alpha|>1$ である。

(Ⅲ) 三角形 OAB は直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) α が S に属するとき，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2) 集合 S を複素数平面上に図示せよ。

(3) x, y を $\alpha^2=x+yi$ を満たす実数とする。α が S を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求め，図示せよ。 [2018 筑波大]

29 複素数平面上の 4 点 A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)を頂点とする四角形 ABCD を考える。ただし，四角形 ABCD は，すべての内角が180°より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また，四角形 ABCD の頂点は反時計回りに A, B, C, D の順に並んでいるとする。四角形 ABCD の外側に，4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を表す複素数を求めよ。

(2) 四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，四角形 ABCD がどのような四角形であることか答えよ。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるならば，四角形 PQRS は正方形であることを示せ。 ［2018 広島大］

複 素 数

【解答例と解説】

1　　[2001 九州大]

(1)　条件より，$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ $(a\neq 0)$ なので，

$$z\overline{z}+\frac{\overline{b}}{a}z+\frac{b}{a}\overline{z}+\frac{c}{a}=0,\ \left(z+\frac{b}{a}\right)\left(\overline{z}+\frac{\overline{b}}{a}\right)=-\frac{c}{a}+\frac{b\overline{b}}{a^2}$$

a は実数より，$\left(z+\dfrac{b}{a}\right)\left(\overline{z+\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|^2=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$

ここで，$|b|^2-ac>0$ なので，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，点 z は中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円を描く。

(2)　条件より，$dz(\overline{z}+1)=\overline{d}\,\overline{z}(z+1)$，$(d-\overline{d})z\overline{z}+dz-\overline{d}\,\overline{z}=0$

(i)　$d=\overline{d}$（d が実数）のとき

$dz-d\overline{z}=0$ より，$d\neq 0$ より $z=\overline{z}$ となり，点 z は実軸を描く。

(ii)　$d\neq\overline{d}$（d が虚数）のとき

$z\overline{z}+\dfrac{d}{d-\overline{d}}z-\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\overline{z}=0$ より，$\left(z-\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\right)\left(\overline{z}+\dfrac{d}{d-\overline{d}}\right)=-\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\cdot\dfrac{d}{d-\overline{d}}$

$$\left(z-\frac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\right)\left(\overline{z-\frac{\overline{d}}{d-\overline{d}}}\right)=\frac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\cdot\overline{\frac{\overline{d}}{d-\overline{d}}},\ \left|z-\frac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\right|^2=\left|\frac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\right|^2$$

よって，$\left|z-\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\right|=\left|\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\right|$ より，点 z は中心 $\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}$，半径 $\left|\dfrac{\overline{d}}{d-\overline{d}}\right|$ の円を描く。

［解　説］

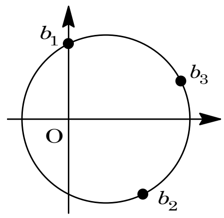
複素数平面における円の方程式が題材です。(2)でも共役複素数を前面に出さずに，$z=x+yi$ として解けますが，結論を d を用いて記述するのに苦労します。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2001 東京大］

(1)　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より，$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ ………①

まず，$b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=i$ なので，①より，

$$b_2=1+\frac{1}{i}=1-i,\quad b_3=1+\frac{1}{1-i}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$



3 点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心を $x+yi$ とおくと，

$$|x+yi-i|=|x+yi-(1-i)|=\left|x+yi-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|$$

$$|x+(y-1)i|=|(x-1)+(y+1)i|=\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)i\right|$$

よって，$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+1)^2$ ………②

$$x^2+(y-1)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \text{………③}$$

②より $2x-4y=1$，③より $6x-2y=3$ なので，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ となり，円 C の中心は点 $\dfrac{1}{2}$，半径は $\left|\dfrac{1}{2}-i\right|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ である。

(2)　すべての点 b_n が円 C の周上にあることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　点 b_1 は明らかに円 C の周上にある。

(ii)　$n=k$ のとき　点 b_k が円 C の周上にあると仮定する。

$$\left|b_k-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2} \text{………④}$$

このとき，①より $b_{k+1}=1+\dfrac{1}{b_k}$ なので，$b_k=\dfrac{1}{b_{k+1}-1}$

④に代入して，$\left|\dfrac{1}{b_{k+1}-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\left|\dfrac{3-b_{k+1}}{2(b_{k+1}-1)}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{|3-b_{k+1}|}{2|b_{k+1}-1|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$$|b_{k+1}-3|=\sqrt{5}|b_{k+1}-1|,\quad |b_{k+1}-1|:|b_{k+1}-3|=1:\sqrt{5}$$

ここで，2 点 1，3 を結ぶ線分を $1:\sqrt{5}$ に内分する点を z_1，$1:\sqrt{5}$ に外分する点を z_2 とすると，点 b_{k+1} は 2 点 z_1，z_2 を直径の両端とする円周上にある。

$$z_1=\frac{\sqrt{5}\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{5}+1}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad z_2=\frac{\sqrt{5}\cdot 1-1\cdot 3}{\sqrt{5}-1}=\frac{-3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

すると円の中心は $\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{1}{2}$，半径は $\dfrac{1}{2}|z_1-z_2|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ となり，円 C に一致する。

(i)(ii)より，すべての点 b_n は円 C の周上にある。

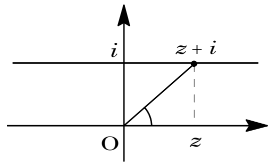
［解　説］

複素数平面上における円を題材とした問題です。それに加えて漸化式がスパイスとしてよく効いています。

$\boxed{3}$ ［2002 名古屋大］

(1) $|z+i|=|z-i|$ より，複素数平面上で，点 z は 2 点 i，$-i$ を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち実軸上にある。よって，z は実数である。

(2) z が実数のとき，点 $z+i$ は点 i を通り，実軸に平行な直線上にあるので，



$$0°<\arg(z+i)<180°$$

(3) $(z+i)^9=(z-i)^9$ より，$|z+i|^9=|z-i|^9$

$$|z+i|=|z-i|$$

よって，(1)より，z は実数となる。

また，n を整数として，$\arg(z+i)^9=360°\times n+\arg(z-i)^9$

$$9\arg(z+i)=360°\times n+9\arg(z-i),\ \ \arg(z+i)=40°\times n+\arg(z-i)$$

ここで，z が実数より，$z-i=\overline{z+i}$ となり，$\arg(z-i)=-\arg(z+i)$ から，

$$2\arg(z+i)=40°\times n,\ \ \arg(z+i)=20°\times n$$

(2)より，$0°<\arg(z+i)<180°$ なので，

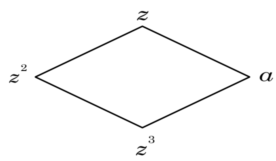
$$\arg(z+i)=20°,\ 40°,\ 60°,\ 80°,\ 100°,\ 120°,\ 140°,\ 160°$$

［解 説］

(1)と(2)が，(3)のための親切な誘導となっています。そのため，方針について迷う必要は全くありません。

$\boxed{4}$ ［2003 千葉大］

4 点a, z, z^2, z^3がひし形の頂点となるので，まず 2 点a, z^2の中点と, 2 点z, z^3の中点が一致する。



$$\frac{a+z^2}{2}=\frac{z+z^3}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

さらに，辺z^2z^3と辺z^2zの長さが等しいので，

$$|z^3-z^2|=|z^2-z|\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$|z|^2|z-1|=|z||z-1|$

zが実数のとき，ひし形はできないので，$z\neq 0$，$z\neq 1$となり，

$$|z|\neq 0,\ |z-1|\neq 0$$

よって，$|z|=1$から$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<\pi,\ \pi<\theta<2\pi)$とおくことができる。

①に代入して，$a+\cos 2\theta+i\sin 2\theta=\cos\theta+i\sin\theta+\cos 3\theta+i\sin 3\theta$

$$a+\cos 2\theta=\cos\theta+\cos 3\theta\cdots\cdots\cdots③,\ \sin 2\theta=\sin\theta+\sin 3\theta\cdots\cdots\cdots④$$

④より，$\sin 2\theta=2\sin 2\theta\cos\theta$，$\sin 2\theta(2\cos\theta-1)=0$

$\sin 2\theta=0$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$となり，$0<\theta<\pi$, $\pi<\theta<2\pi$から，

$$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$$

(i) $\theta=\frac{\pi}{2}$のとき

$z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$となり，③より$a=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\pi=1$

(ii) $\theta=\frac{3\pi}{2}$のとき

$z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$となり，③より$a=\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{9\pi}{2}-\cos 3\pi=1$

(iii) $\theta=\frac{\pi}{3}$のとき

$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$となり，③より$a=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi-\cos\frac{2\pi}{3}=0$

(iv) $\theta=\frac{5\pi}{3}$のとき

$z=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$となり，③より$a=\cos\frac{5\pi}{3}+\cos 5\pi-\cos\frac{10\pi}{3}=0$

［解 説］

ひし形を，平行四辺形の中で隣りあう 2 辺の長さが等しい四角形という条件で定義しています。aの入っていない②の関係式がポイントです。

5 ［2003 神戸大］

(1) $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ より，$w(z+i)=z-i$，$(w-1)z=-i(w+1)$

ここで，$w=1$ とすると成立しないので $w\neq 1$ から，$z=\dfrac{-i(w+1)}{w-1}$ ………①

条件より, z は実数なので，$z=\overline{z}$ ………②

①②より，$\dfrac{-i(w+1)}{w-1}=\dfrac{i(\overline{w}+1)}{\overline{w}-1}$，$-(w+1)(\overline{w}-1)=(\overline{w}+1)(w-1)$

$2w\overline{w}=2$，$|w|=1$

よって，点 w は原点を中心とする半径 1 の円を描く。ただし，点 1 は除く。

(2) $\dfrac{w_2}{w_1}=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\cdot\dfrac{z+i}{z-i}=\dfrac{z\overline{z}-i(z-\overline{z})+1}{z\overline{z}+i(z-\overline{z})+1}=\dfrac{|z|^2+1-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1+i(z-\overline{z})}$

ここで，$\overline{i(z-\overline{z})}=-i(\overline{z}-z)=i(z-\overline{z})$ より，$i(z-\overline{z})$ は実数となる。

よって，$\dfrac{w_2}{w_1}$ は実数であり，この値を k とおくと $w_2=kw_1$ となることから，3 点 P, Q, O は同一直線上にある。

［解 説］

点 z が実軸上を動く条件を $|z+i|=|z-i|$ として数式化することもできますが，(2)との関連を考え，$z=\overline{z}$ を利用しました。

$\boxed{6}$ ［2003 東京大］

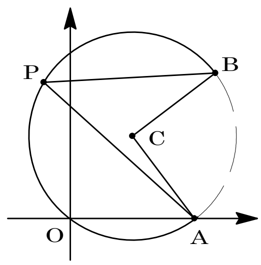
(1) 点 $\mathrm{P}(z)$ とし，$z=\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ とおくと，

$$\frac{(7+7i)-z}{6-z}=\frac{(7+7i)\{(t-7)-ti\}-14(t-3)}{6\{(t-7)-ti\}-14(t-3)}=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}$$
$$=\frac{7+49i}{8t+6ti}=\frac{(7+49i)(8-6i)}{t(8+6i)(8-6i)}=\frac{7+7i}{2t}$$

$t>0$ より，$\arg\dfrac{(7+7i)-z}{6-z}=\arg\dfrac{7}{2t}(1+i)=45°$

よって，$\angle\mathrm{APB}=45°$

(2) (1)より，点 P は $\angle\mathrm{APB}$ が一定より，2 点 A, B を通る円周上にある。さらに，PA から PB を測った角が $45°$ なので，点 P は，右図の実線部に存在する。



この円の中心を $\mathrm{C}(w)$ とおくと，$\angle\mathrm{ACB}=2\angle\mathrm{APB}=90°$ より，点 C を中心に A を $90°$ 回転すると B になるので，

$$(7+7i)-w=i(6-w),\ (1-i)w=7+i$$
$$w=\frac{7+i}{1-i}=3+4i$$

さて，$\mathrm{OC}=|w|=5$，円の半径 $\mathrm{AC}=|w-6|=|-3+4i|=5$ より，線分 OP の長さが最大になる点 P の位置は，OC の延長と円との交点であり，$z=2w=6+8i$ の場合である。

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6+8i,\ 14(t-3)=(6+8i)(t-7-ti),\ (t-28)i=0$$

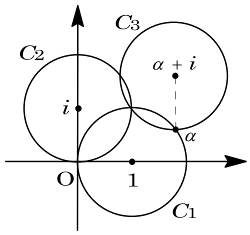
よって, OP が最大になるのは $t=28$ のときである。

［解 説］

誘導に従っていくと，一見，複雑そうに見える点 P の動きがよくわかってきます。なお，計算量も適当なものです。

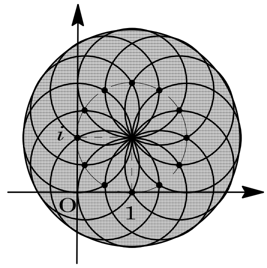
$\boxed{7}$ [2003 一橋大]

(1) $|\alpha-1|=1$ より，点 α は点 1 を中心とする半径 1 の円 C_1 上にある。また，$|\beta-i|=1$ より，点 β は点 i を中心とする半径 1 の円 C_2 上にある。



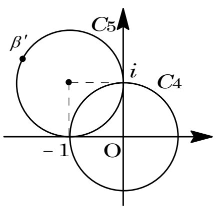
さて，$z=\alpha+\beta$ とおき，点 α を C_1 上に固定するとき，点 z は円 C_2 を α だけ平行移動した円，すなわち点 $\alpha+i$ を中心とする半径 1 の円 C_3 上にある。

そこで，点 α を円 C_1 上で動かすと，円 C_3 はこの関係を保ったまま動くことより，C_3 の中心 $\alpha+i$ は点 $1+i$ を中心とする半径 1 の円上を動く。



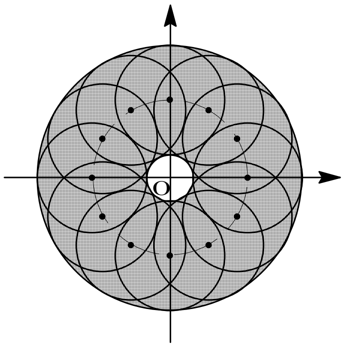
よって，円 C_3 全体は右図のように動く。すると，点 z の存在範囲は，点 $1+i$ を中心とする半径 2 の円の内部または周上となり，図示すると，右図の網点部となる。

(2) $\alpha'=\alpha-1$ とおくと，点 α' は原点を中心とする半径 1 の円 C_4 上にある。また，$\beta'=\beta-1$ とおくと，点 β' は点 $-1+i$ を中心とする半径 1 の円 C_5 上にある。



さて，$w=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha'\beta'$ とおき，点 β' を円 C_5 上に固定するとき，$|\alpha'|=1$ より，点 w は点 β' を原点のまわりに回転した円上にある。

そこで，点 β' を円 C_5 上で動かすと，円 C_5 全体が原点のまわりを右図のように回転する。すると，点 w の存在範囲は，原点を中心とする半径 $\sqrt{2}+1$，$\sqrt{2}-1$ の 2 つの同心円にはさまれたドーナツ状の部分（境界を含む）となり，図示すると，右図の網点部となる。



［解 説］

いくら書いても真意が伝わらないような感じのする解の書きにくい問題です。言い換えると，表現力を養うための良問です。

8 ［2004 一橋大］

(1) 3 点z, z^2, z^3が異なるので, $z \neq z^2$から$z \neq 0$, $z \neq 1$, また$z \neq z^3$から$z \neq 0$, $z \neq \pm 1$, さらに$z^3 \neq z^2$から$z \neq 0$, $z \neq 1$である。まとめて, $z \neq 0$, $z \neq \pm 1$となる。

さて, z, z^2, z^3が同一直線上にある条件は, kを実数として,

$$z^3 - z = k(z^2 - z),\ z(z+1)(z-1) = kz(z-1)$$

$z \neq 0$, $z \neq 1$より, $z+1=k$, すなわちzは実数である。

したがって, 条件を満たすzは, 0, ± 1以外の実数である。

(2) z, z^2, z^3が二等辺三角形の頂点になるのは, (1)よりzが実数でないもとで,

(i) $|z^2 - z| = |z^3 - z|$のとき

$$|z||z-1| = |z||z-1||z+1|$$

(1)より, $|z| \neq 0$, $|z-1| \neq 0$なので, $|z+1| = 1$

点zは点-1を中心とする半径 1 の円周上にある。ただし実軸上の点は除く。

(ii) $|z^2 - z| = |z^3 - z^2|$のとき

$$|z||z-1| = |z|^2|z-1|$$

(1)より, $|z| \neq 0$, $|z-1| \neq 0$なので, $|z| = 1$

点zは原点を中心とする半径 1 の円周上にある。ただし実軸上の点は除く。

(iii) $|z^3 - z| = |z^3 - z^2|$のとき

$$|z||z+1||z-1| = |z|^2|z-1|$$

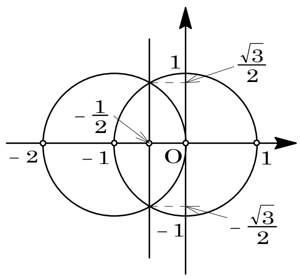
(1)より, $|z| \neq 0$, $|z-1| \neq 0$なので, $|z+1| = |z|$

点 z は点-1と原点を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし実軸上の点は除く。

(i)(ii)(iii)より, z, z^2, z^3が二等辺三角形の頂点になる z 全体は右図のようになる。なお, 実軸上の点は除く。

また, z, z^2, z^3が正三角形の頂点になるのは, 右図の交点より,

$$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



［解 説］

複素数平面を題材とした標準的な問題で，うまく誘導がつけられています。

9 [2005 千葉大]

(1) z が原点と点 α を通る直線上の点 $\dfrac{\alpha}{2}$ 以外を動くとき, k を実数とし,

$$z = k\alpha \left(k \neq \frac{1}{2}\right)$$

このとき，$w = \dfrac{\overline{\alpha}z - 2}{2z - \alpha} = \dfrac{k\overline{\alpha}\alpha - 2}{2k\alpha - \alpha}$ となり，$|\alpha| = 1$ より $\alpha\overline{\alpha} = 1$ であるので,

$$w = \frac{k-2}{2k-1} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{k-2}{2k-1}\overline{\alpha}$$

よって，点 w は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にある。

(2) $w = \dfrac{\overline{\alpha}z - 2}{2z - \alpha}$ より，$(2z - \alpha)w = \overline{\alpha}z - 2$，$(2w - \overline{\alpha})z = \alpha w - 2$ ………①

ここで，$w = \dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ とすると，$\alpha w - 2 = \dfrac{\alpha\overline{\alpha}}{2} - 2 = -\dfrac{3}{2}$ となり，①は成立しない。

よって，$w \neq \dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ から，$z = \dfrac{\alpha w - 2}{2w - \overline{\alpha}}$ ………②

さて，条件から，$|z| > 1$ なので,

$$\left|\frac{\alpha w - 2}{2w - \overline{\alpha}}\right| > 1,\ \frac{|\alpha w - 2|}{|2w - \overline{\alpha}|} > 1,\ |\alpha w - 2| > |2w - \overline{\alpha}|$$

$$(\alpha w - 2)(\overline{\alpha}\overline{w} - 2) > (2w - \overline{\alpha})(2\overline{w} - \alpha),\ \alpha\overline{\alpha}w\overline{w} + 4 > 4w\overline{w} + \alpha\overline{\alpha}$$

$\alpha\overline{\alpha} = 1$ から，$w\overline{w} < 1$ となり，$|w| < 1$ である。

よって，点 w は中心が原点，半径が 1 の円の内部を動く。ただし $\dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ を除く。

［解 説］

複素数平面上の変換に関する基本問題です。2 つの設問とも頻出です。

$\boxed{10}$ 　　[2005 九州大]

(1)　2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ ……①が異なる 2 つの虚数解をもつ条件は,

$$D=t^2-4t=t(t-4)<0$$

よって, $0<t<4$ となり，このとき①より， $z=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4t}}{2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$

(2)　条件より， $z(t)=\dfrac{-t+\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$ なので， $z(t)=x+yi$ とおくと，

$$x=-\frac{t}{2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{\sqrt{-t^2+4t}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

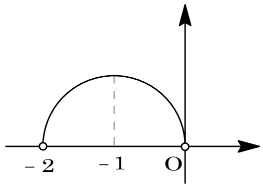
②より， $t=-2x$ となり，③に代入すると，

$$2y=\sqrt{-4x^2-8x}$$

$y>0$ で両辺を 2 乗すると， $4y^2=-4x^2-8x$

$$x^2+y^2+2x=0,\ (x+1)^2+y^2=1$$

よって，点 $z(t)$ の描く図形は，右図のようになる。



(3)　$w=\dfrac{iz}{z+1}$ より， $(z+1)w=iz$ ， $(w-i)z=-w$ ………④

ここで， $w=i$ とすると④は成立しないので， $w\neq i$ から， $z=\dfrac{-w}{w-i}$ ………⑤

また, (2)より，点 z は点 -1 を中心とする半径 1 の上半円を描くので,

$$|z+1|=1\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad |z-i|<|z+i|\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥より， $\left|\dfrac{-w}{w-i}+1\right|=1$ ， $\left|\dfrac{-i}{w-i}\right|=1$ となり， $\dfrac{|-i|}{|w-i|}=1$ から， $|w-i|=1$

よって，点 w は点 i を中心とする半径 1 の円を描く。

⑤⑦より， $\left|\dfrac{-w}{w-i}-i\right|<\left|\dfrac{-w}{w-i}+i\right|$ ， $\left|\dfrac{(-1-i)w-1}{w-i}\right|<\left|\dfrac{(-1+i)w+1}{w-i}\right|$ となり，

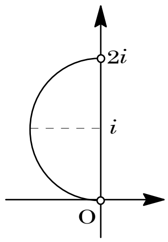
$$|(-1-i)w-1|<|(-1+i)w+1|\quad (w\neq i)$$

$|-1-i|\left|w+\dfrac{1}{1+i}\right|<|-1+i|\left|w+\dfrac{1}{-1+i}\right|$ から， $\sqrt{2}\left|w-\dfrac{-1+i}{2}\right|<\sqrt{2}\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|$

$$\left|w-\frac{-1+i}{2}\right|<\left|w-\frac{1+i}{2}\right|$$

よって，点 w は 2 点 $\dfrac{-1+i}{2}$ ， $\dfrac{1+i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線すなわち虚軸の左側にある。

以上まとめて，点 w の描く図形は，右図のようになる。



［解　説］

複素数と軌跡に関する頻出タイプの問題です。なお，軌跡の限界である z の虚部が正という条件は，⑦で数式化しています。

11 [2015 筑波大]

(1) $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ より，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z=0$ となり，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ から，

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|^2=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|=|\alpha|$$

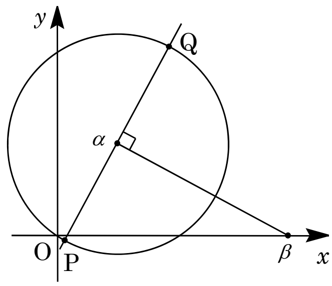
よって，z の描く図形 C は，点 α を中心とし半径が $|\alpha|$ の円である。すなわち，原点を通る円となる。

(2) α は虚数，β は正の実数より，$\beta-\overline{\alpha}=\overline{\beta-\alpha}$ である。

さて，$w=(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ とおくと，

$$w=(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})=\frac{(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}|\beta-\alpha|^2$$

ここで，w は純虚数より，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数となる。



すると，z の描く図形 L は，点 α を通り，点 α と点 β を結ぶ線分に垂直な直線$(z\neq\alpha)$ であり，C と L は 2 つの共有点をもつ。この 2 点を P, Q とすると，P, Q は円 C の直径の両端となるので，

$$\mathrm{PQ}=2|\alpha|=2\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$$

(3) $\mathrm{R}(\beta)$ としたとき，$\mathrm{RP}=\mathrm{RQ}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になる条件は，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{3}|\alpha|,\ (\beta-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})=3\alpha\overline{\alpha},\ \beta^2-(\alpha+\overline{\alpha})\beta-2\alpha\overline{\alpha}=0$$

すると，$\beta>0$ より，$\beta=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{(\alpha+\overline{\alpha})^2+8\alpha\overline{\alpha}}}{2}=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+10\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2}}{2}$

［解 説］

現行課程で復活した複素数と図形の問題です。複素数平面上で，円と直線の表現方法が問われています。

12 ［2016 千葉大］

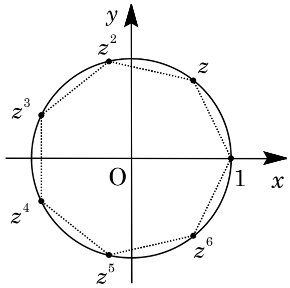
(1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して，$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

(2) $\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\overline{\alpha}=\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}=z^6+z^5+z^3$

$$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3=-1$$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7\\&=3+z^6+z^4+z+z^5+z^3+z^2\\&=3-1=2\end{aligned}$$



よって，α，$\overline{\alpha}$ は２次方程式 $x^2+x+2=0$ の解より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

そして，α の虚部は $\overline{\alpha}$ の虚部より大きいので，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ である。

(3) $x^7=1$ の解は，$x=1$，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 より，

$$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

そして，$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ より，

$$\begin{aligned}&x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\&=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)\cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$に $x=1$ を代入すると，

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=7$$

［解 説］

１の n 乗根に関する超有名問題です。解答例に示した図がすべてと言っても構わない内容です。

$\boxed{13}$ ［2016 東北大］

(1) $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\dfrac{2({}_7\mathrm{C}_1x^6i+{}_7\mathrm{C}_3x^4i^3+{}_7\mathrm{C}_5x^2i^5+i^7)}{2i}$

$$=\frac{7ix^6-35ix^4+21ix^2-i}{i}=7x^6-35x^4+21x^2-1$$

ここで，$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ から，

$$a_0=a_2=a_4=a_6=0,\ a_1=7,\ a_3=-35,\ a_5=21,\ a_7=-1$$

(2) ド・モアブルの定理を用いると，

$$P\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)=\frac{1}{2i}\Big\{\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\Big)^7-\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\Big)^7\Big\}$$

$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\}$$

$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos7\theta+i\sin7\theta)-(\cos7\theta-i\sin7\theta)\}$$

$$=\frac{2i\sin7\theta}{2i\sin^7\theta}=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) $P(x)=a_1x^6+a_3x^4+a_5x^2+a_7$，$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ より，$x>0$ で，

$$Q(x)=P(\sqrt{x}\,)$$

さて，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}>0$，$\dfrac{\cos2\theta}{\sin2\theta}>0$，$\dfrac{\cos3\theta}{\sin3\theta}>0$ から，(*)を用いて，

$$Q(x_1)=Q\Big(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}=\frac{\sin\pi}{\sin^7\theta}=0$$

$$Q(x_2)=Q\Big(\frac{\cos^22\theta}{\sin^22\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\Big)=\frac{\sin14\theta}{\sin^72\theta}=\frac{\sin2\pi}{\sin^72\theta}=0$$

$$Q(x_3)=Q\Big(\frac{\cos^23\theta}{\sin^23\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos3\theta}{\sin3\theta}\Big)=\frac{\sin21\theta}{\sin^73\theta}=\frac{\sin3\pi}{\sin^73\theta}=0$$

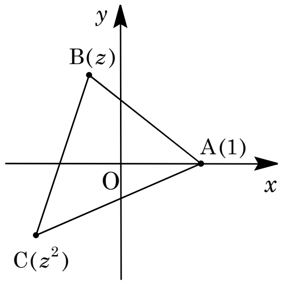
さらに，$x_1=\dfrac{1}{\tan^2\frac{\pi}{7}}$，$x_2=\dfrac{1}{\tan^2\frac{2\pi}{7}}$，$x_3=\dfrac{1}{\tan^2\frac{3\pi}{7}}$ なので，x_1，x_2，x_3 は互いに異なる。よって，x_1，x_2，x_3 は３次方程式 $Q(x)=0$ の異なる３つの解となり，

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_3}{a_1}=5$$

［解 説］

一見，複素数の難問という構成ですが，細かな誘導のため，それに従えば最後の結論まで導けるようになっています。ただ，いろいろな定理が絡んでいますが。

$\boxed{14}$ ［2016 東京大］



3 点 $A(1)$，$B(z)$，$C(z^2)$ に対し，$\triangle ABC$ は鋭角三角形より，まず $z\neq 1$ かつ $z^2\neq z$ かつ $z^2\neq 1$ より，

$$z\neq 0,\ z\neq \pm 1$$

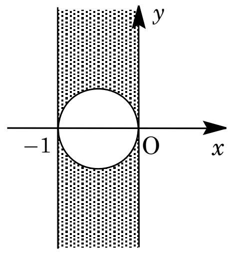
さて，$\angle CAB<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-1}{z-1}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\{z-(-1)\}<\frac{\pi}{2}$$

すると，z は点 -1 を通り実軸に垂直な直線の右側にある。

次に，$\angle ABC<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-z}{1-z}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg(-z)<\dfrac{\pi}{2}$

すると，$-z$ は虚軸の右側にあるので，z は虚軸の左側にある。



さらに，$\angle BCA<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z-z^2}{1-z^2}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{z}{1+z}<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{0-z}{-1-z}<\frac{\pi}{2}$$

すると，z は原点と点 -1 を直径とする円の外部にある。

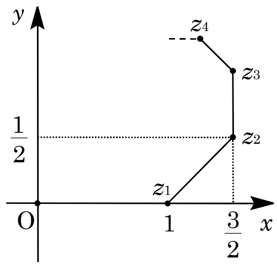
以上より，z の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

［解 説］

複素数平面についての問題です。鋭角三角形という条件を，偏角の言葉に翻訳して処理をしました。なお，余弦定理を利用する方法も考えられます。

15 ［2016 広島大］

(1) $\alpha=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$なので，点$\alpha z$は点 z を原点回りに$\dfrac{\pi}{4}$回転し，原点との距離$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍した点である。



すると，与えられた条件から，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)=\frac{3+i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2}$$

$$=\frac{3+i}{2}+\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}$$

$$z_4=z_3+\alpha(z_3-z_2)=\frac{3+2i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}+\frac{-1+i}{4}=\frac{5+5i}{4}$$

(2) $(*)$より，$z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=\dfrac{1+i}{2}\alpha^{n-1}=\alpha^n$となり，$n\geqq 2$で，

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$n=1$のときも成立するので，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$である。

(3) $n\to\infty$のとき$|\alpha^n|=|\alpha|^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\to 0$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$となり，

$$w=\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{2}{1-i}=1+i$$

(4) (2)より，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=(1+i)(1-\alpha^n)=(1+i)\left\{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi+i\sin\dfrac{n}{4}\pi\right)\right\}$

ここで，z_nの実部がwの実部 1 より大きくなることより，

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n}{4}\pi+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n}{4}\pi>1,\ \sin\frac{n}{4}\pi-\cos\frac{n}{4}\pi>0$$

すると，$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{n}{4}-\dfrac{1}{4}\right)\pi>0$となるので，$k$を 0 以上の整数として，

$$2k\pi<\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{4}\right)\pi<(2k+1)\pi,\ 8k+1<n<8k+5$$

よって，$n=8k+2$，$8k+3$，$8k+4$である

［解 説］

複素数平面上の点の移動を題材にした頻出問題です。現行課程で復活し，日も浅いためなのか，問題文の説明が度を超えた丁寧さです。

16　　　　[2016 筑波大]

(1)　$|z-1|=|z+1|$……①に対して，左辺は点 z と点 1 との距離，右辺は点 z と点 -1 との距離を表す。これより，①を満たす点 z の全体は，点 1 と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸となる。

(2)　$w=\dfrac{z+1}{z}$ $(z\neq 0)$ より，$wz=z+1$ となり，$(w-1)z=1$ ………②

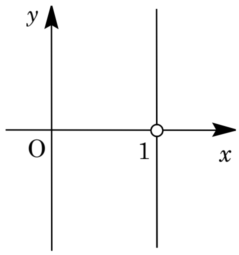
ここで，$w=1$ とすると②は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{1}{w-1}$ ………③

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{w-1}+1\right|$ となり，$\left|\dfrac{2-w}{w-1}\right|=\left|\dfrac{w}{w-1}\right|$ から，

$\dfrac{|2-w|}{|w-1|}=\dfrac{|w|}{|w-1|}$，$|2-w|=|w|$

すると，点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，点 w は点 2 と点 0 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 1 を通り実軸に垂直な直線上を動く。ただし $w\neq 1$ から点 1 は除く。

図示すると，右図のようになる。



(3)　$a>0$ で $w=\dfrac{z+1}{z-a}$ より，$w(z-a)=z+1$ となり，$(w-1)z=aw+1$ ………④

ここで，$w=1$ とすると④は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{aw+1}{w-1}$ ………⑤

⑤を①に代入すると，$\left|\dfrac{aw+1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{aw+1}{w-1}+1\right|$ となり，

$\left|\dfrac{(a-1)w+2}{w-1}\right|=\left|\dfrac{(a+1)w}{w-1}\right|$，$|(a-1)w+2|=|(a+1)w|$

両辺を 2 乗して，$|(a-1)w+2|^2=(a+1)^2|w|^2$ より，

$\{(a-1)w+2\}\{(a-1)\overline{w}+2\}=(a+1)^2w\overline{w}$

$4aw\overline{w}-2(a-1)w-2(a-1)\overline{w}=4$，$w\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}w-\dfrac{a-1}{2a}\overline{w}=\dfrac{1}{a}$ ………⑥

⑥より，$\left(w-\dfrac{a-1}{2a}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}\right)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}$ となり，

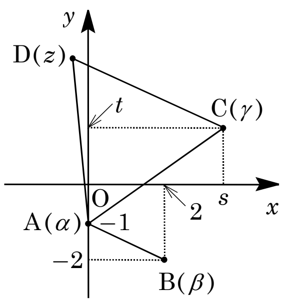
$\left|w-\dfrac{a-1}{2a}\right|^2=\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}$，$\left|w-\dfrac{a-1}{2a}\right|=\dfrac{a+1}{2a}$

よって，点 z が虚軸上を動くとき，点 w は中心 $\dfrac{a-1}{2a}$ で半径 $\dfrac{a+1}{2a}$ の円を描く。ただし，$w\neq 1$ から点 1 は除く。

［解 説］

複素数平面上の変換を問う問題です。(1)において，まず①を変形して，$z+\overline{z}=0$ という関係を導き，この式をもとに(2), (3)を解くという方法もあります。

17 ［2017 熊本大］



(1) $\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ $(s>0,\ t>0)$ に対し，複素数平面上に $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ をとる。

ここで，$\triangle\mathrm{ACD}$ が正三角形で，点 D が直線 AC に関して B と反対側にあることより，$\mathrm{D}(z)$ は $\mathrm{C}(\gamma)$ を $\mathrm{A}(\alpha)$ のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点となり，

$$z-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma-\alpha)$$

$$z=-i+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\{s+(t+1)i\}=-i+\frac{1}{2}\{s-\sqrt{3}t-\sqrt{3}+(\sqrt{3}s+t+1)i\}$$

$$=\frac{1}{2}(s-\sqrt{3}t-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(\sqrt{3}s+t-1)i\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) 与えられた条件 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ より，

$$4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0,\quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$$

ここで，AC は AB を正の向きに回転したものなので，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}i$ となり，

$$\gamma=\alpha+(1+\sqrt{3}i)(\beta-\alpha)=-i+(1+\sqrt{3}i)(2-i)=2+\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i$$

すると，$s=2+\sqrt{3}$，$t=-2+2\sqrt{3}$ となるので，$(*)$から，

$$z=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}-6-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3-2+2\sqrt{3}-1)i$$

$$=-2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$$

(3) まず，xy 平面を対応させて，$\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(2+\sqrt{3},\ -2+2\sqrt{3})$，$\mathrm{D}(-2+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2+\sqrt{3},\ -1+2\sqrt{3}),\quad \overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-4+\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ のなす角が θ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+(-1+2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{(-4+\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(2+\sqrt{3})(-4+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})=5$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{5}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ である。

［解 説］

複素数平面に関する標準的な問題です。(3)は慣れ親しんでいる xy 平面を対応させ，ベクトルの内積を利用しています。

18 [2017 東北大]

(1) $z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)に対して，共役複素数をとると，

$$\overline{z}z+\overline{\alpha}\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \text{ ………(＊＊)}$$

(＊)と(＊＊)の両辺の差をとると，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ ………①

(2) γ は実数なので $\gamma=\overline{\gamma}$ となり，①より，

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0,\ (\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z} \text{ ………②}$$

すると，②から $(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$ となり，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である。

そこで，k を実数として，$(\alpha-\overline{\beta})z=k$ ……③とおく。

(i) $\alpha-\overline{\beta}=0$ のとき

(＊)から，$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ となるので，

$$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}+\gamma=0,\ |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

ここで，γ は負の実数なので $|\beta|^2-\gamma>0$ となり，$|z+\beta|=\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$

すると，複素数平面上で，点 z は点 $-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の点となり，無数に存在する。これより，z がちょうど 2 個あることに反する。

(ii) $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ のとき

③から，$z=\dfrac{k}{\alpha-\overline{\beta}}=\dfrac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)$ となり，(＊)に代入すると，

$$\frac{k^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\alpha\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)+\beta\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\alpha-\overline{\beta})+\gamma=0$$

$$k^2+k\alpha(\overline{\alpha}-\beta)+k\beta(\alpha-\overline{\beta})+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$$

ここで，$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ から $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ なので，$k^2+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$ となり，$-\gamma>0$，$|\alpha-\overline{\beta}|>0$ より，

$$k=\pm\sqrt{-\gamma}\,|\alpha-\overline{\beta}|$$

そして，この値を $k=k_1,\ k_2\ (k_1<k_2)$ とおくと，$z=\dfrac{k_1}{\alpha-\overline{\beta}},\ \dfrac{k_2}{\alpha-\overline{\beta}}$ となる。

(i)(ii)より，z がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ である。

［解 説］

複素数に関する標準的な問題です。(1)で導いた式が(2)へのスムーズな誘導になっています。

$\boxed{19}$ [2017 京都大]

(1) $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ ……①に対し，$|w|=R\ (R>1)$ のとき，θ を任意の実数として，

$$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x+yi=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ となり，

$$x+yi=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より $\cos\theta=\dfrac{R}{R^2+1}x$，④より $\sin\theta=\dfrac{R}{R^2-1}y$ なので，

$$\left(\frac{R}{R^2+1}\right)^2x^2+\left(\frac{R}{R^2-1}\right)^2y^2=1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，⑤で表される楕円である。

(2) $\arg w=\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，r を正の実数として，

$$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

(1)と同様にすると，①⑥より，$x+yi=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha$ となり，

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦より $r+\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{\cos\alpha}$，⑧より $r-\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$ となり，

$$2r=\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑨,\quad \frac{2}{r}=\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

すると，⑨⑩より，

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)=4,\quad \frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，$r>0$ から，$r+\dfrac{1}{r}\geqq 2\sqrt{r\cdot\dfrac{1}{r}}=2$，また $r-\dfrac{1}{r}$ は任意の値をとる。

すると，$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$ で，⑦から $x\geqq 2\cos\alpha$，⑧から y は任意の値をとる。

以上より，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，⑪で表される双曲線である。ただし，$x\geqq 2\cos\alpha$ の部分である。

［解 説］

複素数と軌跡に関する標準的な問題です。なお，(2)では x に限界があり，軌跡は双曲線の右の枝になります。

$\boxed{20}$ [2017 東京大]

(1) 条件より，$z \neq 0$ のとき $w = \dfrac{1}{z}$ から，$z = \dfrac{1}{w}$ $(w \neq 0)$………①

さて，点 z が点 α $(\alpha \neq 0)$ と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線 L 上を動くとき，

$$|z| = |z - \alpha| \cdots\cdots\cdots ②$$

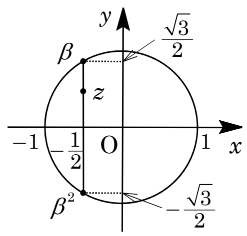
①を②に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w}\right| = \left|\dfrac{1}{w} - \alpha\right|$，$\dfrac{1}{|w|} = \dfrac{|1 - \alpha w|}{|w|}$ となり，

$$|1 - \alpha w| = 1,\ |-\alpha|\left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = 1,\ \left|w - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

よって，点 w の軌跡は，中心 $\dfrac{1}{\alpha}$ で半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円である。ただし，$w \neq 0$ より，原点は除く。

(2) $x^3 = 1$ の解は，$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ より，$x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。

すると，条件より，$\beta = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となる。

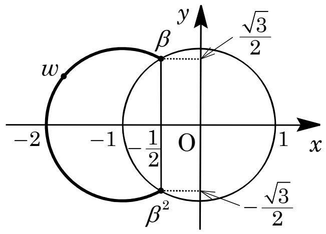


ここで，点 β と点 β^2 を結ぶ直線は，(1)で $\alpha = -1$ として表すことができるので，点 z が点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を動くとき，

$$|z| = |z+1| \cdots\cdots\cdots ③,\ |z| \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ④$$

①③より，$|w+1| = 1$ $(w \neq 0)$………⑤

①④より，$\left|\dfrac{1}{w}\right| \leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{|w|} \leqq 1$ から，$|w| \geqq 1$………⑥



⑤⑥より，点 w の軌跡は，点 -1 を中心とする半径 1 の円周上で，原点を中心とする半径 1 の円の外部または周上の部分となる。

図示すると，右図の太線の弧である。ただし，両端点 β，β^2 は含む。

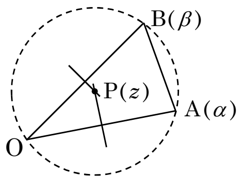
[解 説]

複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。直線や円の絶対値による表現方法が問われています。

21 ［2017 北海道大］

(1) 原点 O, 点 A(α), 点 B(β) を頂点とする△OAB について,

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \alpha \neq \beta \cdots\cdots\cdots ①$$



このとき, 点 P(z) は△OAB の外心なので, 辺 OA および辺 OB の垂直二等分線の交点となり,

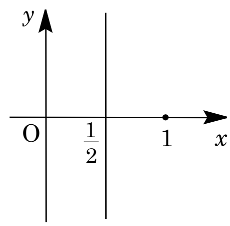
$$|z| = |z-\alpha| \cdots\cdots\cdots ②,\ |z| = |z-\beta| \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで, $z = \alpha\beta$ を②に代入すると, $|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \alpha|$ となり, ①から $|\alpha| \neq 0$ より,

$$|\alpha||\beta| = |\alpha||\beta - 1|,\ |\beta| = |\beta - 1| \cdots\cdots\cdots ④$$

同様に, $z = \alpha\beta$ を③に代入すると, $|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \beta|$ となり, ①から $|\beta| \neq 0$ より,

$$|\alpha||\beta| = |\alpha - 1||\beta|,\ |\alpha| = |\alpha - 1| \cdots\cdots\cdots ⑤$$



④⑤より, 点 A(α), 点 B(β) は, ともに原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし, ①から $\alpha \neq \beta$ である。

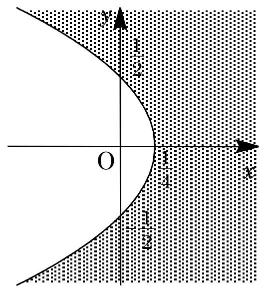
以上より, α の満たすべき条件は $|\alpha| = |\alpha - 1|$ であり, 点 A(α) の描く図形は右図の直線である。

(2) (1)より, $\alpha = \dfrac{1}{2} + ai$, $\beta = \dfrac{1}{2} + bi$ $(a \neq b)$ とおくことができ,

$$z = \alpha\beta = \left(\frac{1}{2} + ai\right)\left(\frac{1}{2} + bi\right) = \left(\frac{1}{4} - ab\right) + \frac{1}{2}(a+b)i$$

ここで, $z = x + yi$ とおくと, $x = \dfrac{1}{4} - ab$, $y = \dfrac{1}{2}(a+b)$ となり,

$$a + b = 2y \cdots\cdots\cdots ⑥,\ ab = \frac{1}{4} - x \cdots\cdots\cdots ⑦$$



⑥⑦より, a, b $(a \neq b)$ は, t についての 2 次方程式 $t^2 - 2yt + \left(\dfrac{1}{4} - x\right) = 0$ の異なる実数解となり, その条件は,

$$D/4 = y^2 - \left(\frac{1}{4} - x\right) > 0,\ y^2 > -\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

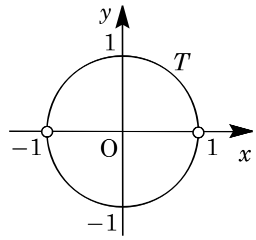
よって, 点 P(z) の存在範囲を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。

［解 説］

複素数と図形に領域が絡んだ問題です。(1)は共役複素数を用いた形で, $\alpha + \overline{\alpha} = 1$ を結論としてもよいでしょう。なお, O, A, B が一直線上にないということについては, (1)の結果から満たしていることがわかります。

22 ［2017 東京工大］

(1) $f(x)=x^2+cx+1$ (c は実数)に対して，$f(x)=0$ の解がすべて T 上にある条件は, 2 つの解がともに虚数で，しかも絶対値が 1 ということである。



そこで，解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ ($|\alpha|^2=1$) となり，$|\alpha|=1$ は満たされている。

よって，求める条件は，解が虚数すなわち $D=c^2-4<0$ から $-2<c<2$ である。

(2) $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ (a，b は実数)に対して，$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるとき，4 つの解はすべて虚数で，しかも絶対値が 1 である。これより，解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ とおき，$F(x)$ の x^4 の係数が 1 であることに注意すると，

$$F(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$$
$$=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}$$

ここで，$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ で，また $\alpha+\overline{\alpha}$，$\beta+\overline{\beta}$ はともに実数なので，それぞれ $-c_1$，$-c_2$ とおくと，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ と表せる。

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は, (1)(2)から,

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)\quad(-2<c_1<2,\ -2<c_2<2)$$

すると，$F(x)=x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1$ となり，

$$c_1+c_2=a\cdots\cdots\cdots①,\quad c_1c_2+2=b\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，c_1，c_2 は 2 次方程式 $t^2-at+(b-2)=0\cdots\cdots③$の 2 つの解となる。

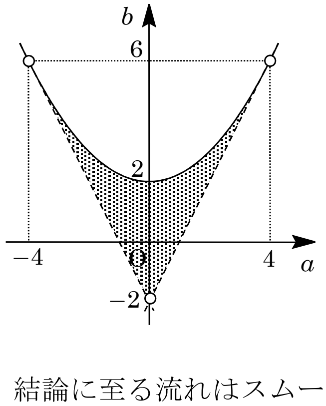
ここで，③の左辺を $g(t)$ とおき変形すると，$g(t)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b-2$ となり，$g(t)=0$ の解がともに $-2<t<2$ から，求める条件は,

$$-\frac{a^2}{4}+b-2\leqq 0\cdots\cdots④,\quad -2<\frac{a}{2}<2\cdots\cdots⑤,\quad g(-2)=2+2a+b>0\cdots\cdots⑥$$
$$g(2)=2-2a+b>0\cdots\cdots⑦$$

④～⑦をまとめると，$b\leqq\dfrac{a^2}{4}+2$，$-4<a<4$

$$b>-2a-2,\ b>2a-2$$

点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線のみ領域に含む。



［解 説］

複素数と方程式の標準的な問題です。丁寧な誘導のため，結論に至る流れはスムーズです。

$\boxed{23}$ [2018 千葉大]

(1) $z=\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}$ のとき，$z^9=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z^8=\frac{1}{z}=\cos\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)+i\sin\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)=\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}$$

すると，$\alpha=z+z^8=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となり，$\cos\dfrac{2\pi}{9}=\dfrac{\alpha}{2}$ ………①

ここで，3 倍角の公式より，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=4\cos^3\dfrac{2\pi}{9}-3\cos\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，①より，

$$-\frac{1}{2}=4\cdot\frac{\alpha^3}{8}-3\cdot\frac{\alpha}{2}，\ -1=\alpha^3-3\alpha，\ \alpha^3-3\alpha+1=0 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，α は $x^3-3x+1=0$ の解なので，$f(x)=x^3-3x+1$ となる。

(2) $f(x)$ を $x-\alpha$ で割ると，②から，$f(x)=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2-3)$

すると，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は,

$$x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4(\alpha^2-3)}}{2}=\frac{-\alpha\pm\sqrt{12-3\alpha^2}}{2} \ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，①から，$12-3\alpha^2=12-3\cdot 4\cos^2\dfrac{2\pi}{9}=12\sin^2\dfrac{2\pi}{9}$ となるので，③より，

$$x=-\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{9}=2\Big(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2\pi}{9}\Big)$$
$$=2\Big(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{9}\pm\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{9}\Big)=2\cos\Big(\frac{2\pi}{3}\mp\frac{2\pi}{9}\Big)$$

よって，$x=2\cos\dfrac{4\pi}{9}$ または $x=2\cos\dfrac{8\pi}{9}$ となり，①②より，

$$2\cos\frac{4\pi}{9}=2\Big(2\cos^2\frac{2\pi}{9}-1\Big)=4\cdot\frac{\alpha^2}{4}-2=\alpha^2-2$$
$$2\cos\frac{8\pi}{9}=2\Big(2\cos^2\frac{4\pi}{9}-1\Big)=(\alpha^2-2)^2-2=\alpha^4-4\alpha^2+2$$
$$=\alpha(3\alpha-1)-4\alpha^2+2=-\alpha^2-\alpha+2$$

以上より，$f(x)=0$ の α 以外の 2 つの解は，α^2-2，$-\alpha^2-\alpha+2$ である。

［解 説］

複素数の極形式についての問題です。3 倍角の公式がポイントになりますが，問題文にその利用が暗示されています。また，解と係数の関係を併用すると，解答例が少し簡略になります。

$\boxed{24}$ ［2018 九州大］

まず，与えられた等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ に対して，

$$-i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=\alpha(|z|^2+2)\cdots\cdots\text{①}$$

①の両辺に共役複素数をとると，$i(2|\alpha|^2+1)z=\overline{\alpha}(|z|^2+2)\cdots\cdots$②

①×②より，$(2|\alpha|^2+1)^2 z\overline{z}=\alpha\overline{\alpha}(|z|^2+2)^2$ となり，

$$(2|\alpha|^2+1)^2|z|^2=|\alpha|^2(|z|^2+2)^2,\ (2|\alpha|^2+1)|z|=|\alpha|(|z|^2+2)$$

$|z|$ についてまとめると，$|\alpha||z|^2-(2|\alpha|^2+1)|z|+2|\alpha|=0\cdots\cdots$③

(i) $|\alpha|=0\ (\alpha=0)$ のとき　③より $|z|=0$ となり，$z=0$ である。

(ii) $|\alpha|\neq 0\ (\alpha\neq 0)$ のとき　③より $(|\alpha||z|-1)(|z|-2|\alpha|)=0$ となり，

$$|z|=\frac{1}{|\alpha|},\ |z|=2|\alpha|$$

(ii-i) $|z|=\dfrac{1}{|\alpha|}$ のとき　$|z|^2+2=\dfrac{1}{|\alpha|^2}+2=\dfrac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{\overline{\alpha}}{i(2|\alpha|^2+1)}\cdot\frac{1+2|\alpha|^2}{|\alpha|^2}=\frac{1}{i\alpha}=-\frac{i}{\alpha}$$

(ii-ii) $|z|=2|\alpha|$ のとき　$|z|^2+2=4|\alpha|^2+2=2(2|\alpha|^2+1)$ となり，②より，

$$z=\frac{\overline{\alpha}(|z|^2+2)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}(2|\alpha|^2+1)}{i(2|\alpha|^2+1)}=\frac{2\overline{\alpha}}{i}=-2i\overline{\alpha}$$

［解 説］

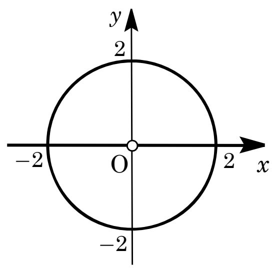
複素数の計算についての問題です。題意は，与えられた等式から z を求めるわけですが，上の解答例では，$z\overline{z}=|z|^2$ という関係式を用いて邪魔な $\overline{z}$ を消去するという方針を立て，$|z|$ についての方程式③を導いています。

25 [2018 北海道大]

(1)　$z\neq 0$ のとき，$z+\dfrac{4}{z}$ が実数なので，$z+\dfrac{4}{z}=\overline{z}+\dfrac{4}{\overline{z}}$ となり，

$$z\overline{z}(z-\overline{z})+4(\overline{z}-z)=0,\ (z-\overline{z})(z\overline{z}-4)=0$$

$$(z-\overline{z})(|z|^2-4)=0$$



よって，$z=\overline{z}$ または $|z|=2$ から，z は 0 でない実数または絶対値が 2 の複素数である。これを複素数平面上に図示すると，右図の太線部となる。ただし，原点は除く。

(2)　k を実数とし，方程式 $k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)=i\left(z-\dfrac{4}{z}\right)$……①に対して，(1)から，

(i)　z が実数 $(z\neq 0)$ のとき

$k\left(z+\dfrac{4}{z}+8\right)$ および $z-\dfrac{4}{z}$ は実数より，$z-\dfrac{4}{z}\neq 0$ のときは①が成立しない。

すると，$z-\dfrac{4}{z}=0$ から $z=\pm 2$ となり，このとき $k=0$ である。

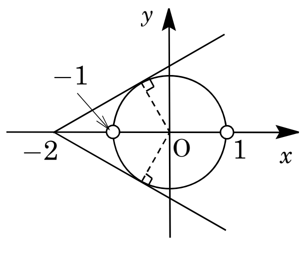
(ii)　z が $|z|=2$ を満たす虚数のとき

$z=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(\sin\theta\neq 0)$ と表せ，$\dfrac{4}{z}=2(\cos\theta-i\sin\theta)$ から，

$$z+\frac{4}{z}=4\cos\theta,\ z-\frac{4}{z}=4i\sin\theta$$

①に代入すると，$k(4\cos\theta+8)=-4\sin\theta$，$k=-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+2}$ ………②

②から，$-k=\dfrac{\sin\theta-0}{\cos\theta-(-2)}$ と表せ，$-k$ は原点が中心の単位円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $(-2,\ 0)$ を結ぶ線分の傾きとなる。



そこで，$\sin\theta\neq 0$ に注意し，右図の円の接線と x 軸のなす角が $\pm 30^\circ$ から，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq -k\leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(k\neq 0)$ となり，

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq \frac{1}{\sqrt{3}}\quad (k\neq 0)$$

(i)(ii)より，①が成り立つ k の値の範囲は，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq k\leqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

［解 説］

複素数についての総合的な問題です。(1)では「z が実数 ⇔ $z=\overline{z}$」に着目して数式処理をしています。また，(2)は①式の形から極形式を設定しました。なお，後半は微分法の利用でも構いませんが，上記の線分の傾きを対応させる方法も有名です。

26 ［2018 東北大］

(1) 複素数αに対し，複素数 z の方程式 $z^2-\alpha z+2i=0$ ……①について，$z=0$ では成立しないことより $z\neq 0$ となり，①より，

$$\alpha=\frac{z^2+2i}{z}=z+\frac{2i}{z}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，方程式①が実数解をもつとき，t を実数として $z=t$ を②に代入すると，

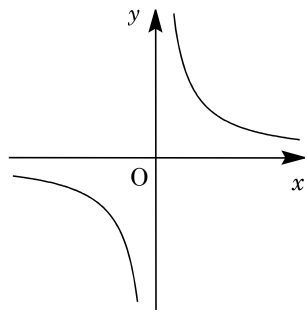
$$\alpha=t+\frac{2}{t}i\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\alpha=x+yi$ とおくと，③より，

$$x=t,\ \ y=\frac{2}{t}$$

これより，点αは複素数平面上で双曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ を描く。

図示すると，右図のようになる。



(2) 方程式①が絶対値 1 の複素数を解にもつとき，θ を実数として，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{z}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\cos\theta-i\sin\theta$

②に代入すると，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta+2i(\cos\theta-i\sin\theta)$ から，

$$\alpha=(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，点αを原点を中心に$\dfrac{\pi}{4}$回転させた点βは，

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

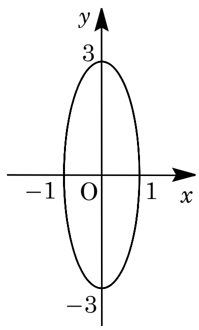
④⑤より，$\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\{(\cos\theta+2\sin\theta)+i(2\cos\theta+\sin\theta)\}$ となり，

$$\begin{aligned}\beta&=\frac{\sqrt{2}}{2}\{(-\cos\theta+\sin\theta)+3i(\sin\theta+\cos\theta)\}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3\sqrt{2}i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\&=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+3i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\ \cdots\cdots\cdots⑥\end{aligned}$$

ここで，$\beta=x+yi$ とおくと，⑥より，

$$x=-\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\ \ y=3\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

これより，点βは複素数平面上で楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ を描く。図示すると，右図のようになる。



［解 説］

複素数平面上の軌跡に関する問題です。点αや点βの軌跡を求めるので，与えられた①ではなく，変形した②をもとに計算を進めています。

$\boxed{27}$ ［2018 熊本大］

(1) 複素数平面上で，$\mathrm{A}(i)$，$\mathrm{B}(-i)$，$\mathrm{P}(z)$ とおくと，$|z+i|-|z-i|=1$ より，

$$\mathrm{BP}-\mathrm{AP}=1$$

すると，点 P の描く図形 H は 2 点 A, B を焦点とする双曲線である。

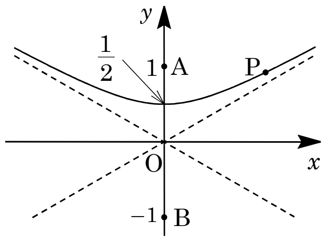
ここで，$z=x+yi$ とおき，$H:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ とすると，$c=1$ かつ $2b=1$ で，

$$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これより，$H:\dfrac{4x^2}{3}-4y^2=-1$ となり，漸近線は，

$$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

ただし，$\mathrm{BP}>\mathrm{AP}$ より $y>0$ であり，図形 H を図示すると右図の曲線となる。



そして，2 本の漸近線と実軸の正の向きとのなす角が $\pm\dfrac{\pi}{6}$ より，z の偏角 θ_1 のとりうる値の範囲は，$0\leqq\theta_1<2\pi$ で考えると，$\dfrac{\pi}{6}<\theta_1<\dfrac{5}{6}\pi$ である。

(2) $w=\dfrac{1}{z}$ のとき，$r_2=|w|=\dfrac{1}{|z|}$ となり，(1)より $|z|\geqq\dfrac{1}{2}$ なので $0<r_2\leqq 2$ である。

また，n を整数として，$\theta_2=\arg w=\arg\dfrac{1}{z}=2n\pi-\arg z=2n\pi-\theta_1$ より，

$$2n\pi-\frac{5}{6}\pi<\theta_2<2n\pi-\frac{\pi}{6}$$

$0\leqq\theta_2<2\pi$ より $n=1$ として，$\dfrac{7}{6}\pi<\theta_2<\dfrac{11}{6}\pi$ である。

［解 説］

双曲線の絡んだ複素数と図形の基本的な問題です。(1)は，x と y を用いて絶対値の計算を行っても構いません。

$\boxed{28}$ [2018 筑波大]

(1) 3 点$O(0)$，$A(\alpha)$，$B(\alpha^2)$に対して，$\triangle OAB$は直角三角形より，

(a) $\angle AOB=\dfrac{\pi}{2}$のとき　$\arg\alpha=\theta$とおくと$\arg\alpha^2=2\theta$となり，nを整数として，

$$2\theta-\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

ところが，これはαが純虚数でないことに反する。

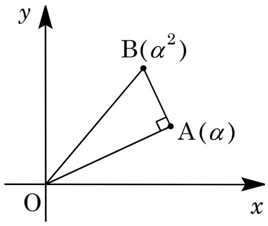
(b) $\angle OBA=\dfrac{\pi}{2}$のとき　辺$OA$が斜辺となるので，$OA>OB$となり，

$$|\alpha|>|\alpha^2|=|\alpha|^2,\ 1>|\alpha|$$

ところが，これは$|\alpha|>1$に反する。

(a)(b)より，$\angle OAB=\dfrac{\pi}{2}$である。

(2) $\angle OAB=\dfrac{\pi}{2}$より，$OB^2=OA^2+AB^2$となり，



$$|\alpha^2|^2=|\alpha|^2+|\alpha^2-\alpha|^2$$

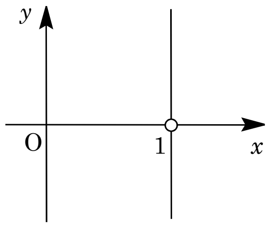
すると，$\alpha^2\overline{\alpha^2}=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)(\overline{\alpha^2-\alpha})$から，

$$\alpha^2(\overline{\alpha})^2=\alpha\overline{\alpha}+(\alpha^2-\alpha)\{(\overline{\alpha})^2-\overline{\alpha}\}$$
$$=\alpha\overline{\alpha}+\alpha^2(\overline{\alpha})^2-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2+\alpha\overline{\alpha}$$

これより，$2\alpha\overline{\alpha}-\alpha^2\overline{\alpha}-\alpha(\overline{\alpha})^2=0$となり，

$$\alpha\overline{\alpha}(2-\alpha-\overline{\alpha})=0$$

$\alpha\overline{\alpha}>0$より，$2-\alpha-\overline{\alpha}=0$となり，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=1$



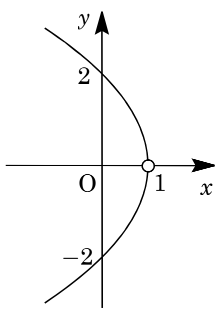
よって，αの実部は 1 となるので，α全体を図示すると右図の直線である。ただし，$\alpha=1$は除く。

(3) (2)より，0 でない実数kをとり，$\alpha=1+ki$とおくと，

$$\alpha^2=(1+ki)^2=1-k^2+2ki\ (k\neq0)$$

ここで，$\alpha^2=x+yi$なので，$x=1-k^2$，$y=2k$となり，

$$x=1-\frac{y^2}{4}\quad(y\neq0)$$

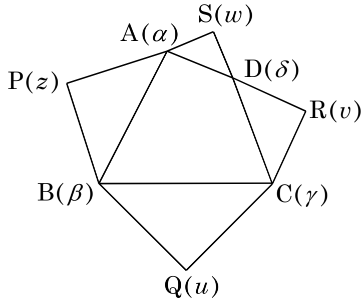


よって，点$(x,\ y)$の軌跡を図示すると，右図の放物線となる。ただし，点$(1,\ 0)$は除く。

［解 説］

複素数と図形についての標準的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，解答例では三平方の定理を利用しました。

29 ［2018 広島大］



(1) 複素数平面上で，A(α)，B(β)，C(γ)，D(δ)を頂点とする四角形 ABCD に対し，その外側に 4 辺 AB, BC, CA, DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB, BQC, CRD, DSA を作る。このとき，P(z)，Q(u)，R(v)，S(w)とおく。

すると，P は B を中心に A を$\dfrac{\pi}{4}$回転し，距離を$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$倍したものとなり，

$$z-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)(\alpha-\beta)=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta)$$

よって，$z=\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta$である。

(2) (1)と同様にして，$u=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$，$v=\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta$，$w=\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha$

さて，四角形 PQRS が平行四辺形であるための必要十分条件は，

$$\frac{z+v}{2}=\frac{u+w}{2},\quad z+v=u+w$$

すると，$\dfrac{1+i}{2}\alpha+\dfrac{1-i}{2}\beta+\dfrac{1+i}{2}\gamma+\dfrac{1-i}{2}\delta=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma+\dfrac{1+i}{2}\delta+\dfrac{1-i}{2}\alpha$

$$i\alpha-i\beta+i\gamma-i\delta=0,\quad \alpha+\gamma=\beta+\delta\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\beta+\delta}{2}$となり，四角形 ABCD は平行四辺形である。

(3) 四角形 PQRS が平行四辺形であるとき，$(*)$より$\delta=\alpha-\beta+\gamma$となり，

$$\begin{aligned}w-z&=\frac{1+i}{2}\delta+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta\\&=\frac{1+i}{2}(\alpha-\beta+\gamma)+\frac{1-i}{2}\alpha-\frac{1+i}{2}\alpha-\frac{1-i}{2}\beta=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma\end{aligned}$$

また，$u-z=\dfrac{1+i}{2}\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma-\dfrac{1+i}{2}\alpha-\dfrac{1-i}{2}\beta=-\dfrac{1+i}{2}\alpha+i\beta+\dfrac{1-i}{2}\gamma$から，

$$i(u-z)=-\frac{i+i^2}{2}\alpha+i^2\beta+\frac{i-i^2}{2}\gamma=\frac{1-i}{2}\alpha-\beta+\frac{1+i}{2}\gamma$$

よって，$w-z=i(u-z)$となり，すなわち S は P を中心に Q を$\dfrac{\pi}{2}$回転したものとなるので，$\mathrm{PS}=\mathrm{PQ}$かつ$\angle\mathrm{QPS}=\dfrac{\pi}{2}$より四角形 PQRS は正方形である。

［解 説］

複素数と図形に関する頻出問題です。なお，(2)の平行四辺形については，「2 本の対角線が互いに他を二等分する」という条件を利用しています。