2019 入試対策

2次数学アーカイブ

曲線

理系

2001–2018

外林康治 編著

電送数学舎

曲　　線

【問題一覧】

1 C を双曲線 $2x^2-2y^2=1$ とする。l, m を点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸とそれぞれ θ，$\theta+\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1) 直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2) PQ^2 を，θ を用いて表せ。

(3) 直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。 ［2001 筑波大］

2 C を曲線 $a^2x^2+y^2=1$，l を直線 $y=ax+2a$ とする。ただし，a は正の定数である。

(1) C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2) C 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) (1)における交点を P, Q とし，点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする。a が(1)の範囲を動くとき，X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ。 ［2002 広島大］

3 θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q, R とし，接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。 ［2003 九州大］

4 楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点で，$x\geqq 0$ の範囲にあり，定点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ との距離が最大となる点を P とする。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする。△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および△APQ の面積を求めよ。 ［2004 筑波大］

5 実数 a に対して，曲線C_aを方程式$(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$によって定める。

(1) C_aは a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。

(2) aが正の実数全体を動くとき，C_aが通過する範囲を図示せよ。 ［2005 筑波大］

6 直線$y=x$を l で，直線$y=-x$をl'で表す。直線l，l'のどちらの上にもない点$\mathrm{A}(a,\ b)$をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線l，l'とそれぞれ点P，P′で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l とl'を漸近線とする双曲線となることを示せ。 ［2006 大阪大］

7 空間内に, 3 点$\mathrm{A_0}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A_1}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{A_2}(1,\ 0,\ 1)$を通る平面αと, 3 点$\mathrm{B_0}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B_1}(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B_2}\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$を通る平面$\beta$を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを$\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$とおくとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}$を$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$で表せ。ただし, O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O とα上の点 P を通る直線がβ上の点P′も通っているとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+a\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+b\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}+p\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}+q\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}$$

とおくとき, a, b を p, q で表せ。

(3) 点 P がα上の点$\mathrm{A_0}$を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき，点P′が動いてできる図形C'の方程式を(2)の p, q で表し，C'が楕円であることを示せ。

［2006 北海道大］

8 平面の原点 O を端点とし, x 軸となす角がそれぞれ$-\alpha$，α $\left(ただし0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$である半直線を$L_1$，$L_2$とする。$L_1$上に点 P，$L_2$上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に△PQR が正三角形になるようにとる。

(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2) 2 点 P，Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったままL_1，L_2上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。 ［2008 東京工大］

9 d を正の定数とする。2 点 $\mathrm{A}(-d,\ 0)$, $\mathrm{B}(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, 点 B, 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2) $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ。

(3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

[2011 筑波大]

10 2 つの双曲線 $C: x^2-y^2=1$，$H: x^2-y^2=-1$ を考える。双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ に対して，方程式 $sx-ty=1$ で定まる直線を l とする。

(1) 直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2) 直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し，$\triangle$PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3) (2)における 3 点 G, Q, R に対して，$\triangle$GQR の面積は点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ。

[2012 筑波大]

11 楕円 $C: \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を l_1，l_1' とし，l_1，l_1' に直交する C の 2 接線を l_2，l_2' とする。

(1) l_1，l_1' の方程式を m を用いて表せ。

(2) l_1 と l_1' の距離 d_1 および l_2 と l_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし，平行な 2 直線 l，l' の距離とは，l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4) l_1，l_1'，l_2，l_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ。

[2013 筑波大]

12　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$)を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。　［2015 千葉大］

13　曲線 $C:x^2+4y^2=4$ 上を動く点 P と，C 上の定点 $\mathrm{Q}(2,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　△PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

［2016 金沢大］

14　座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2)　t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。　［2017 金沢大］

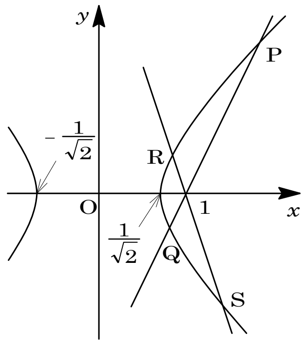
15　$a,\ b,\ c$ を正の数とする。楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が，4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S，楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする。このとき，不等式 $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。　［2018 金沢大］

曲　　線

【解答例と解説】

1 ［2001 筑波大］

(1) 直線 l の方向ベクトルを$(\cos\theta,\ \sin\theta)$とすることができるので,



$$(x,\ y)=(1,\ 0)+t(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$=(1+t\cos\theta,\ t\sin\theta)$$

$2x^2-2y^2=1$に代入して,

$$2(1+t\cos\theta)^2-2t^2\sin^2\theta=1$$
$$2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)t^2+4t\cos\theta+1=0$$
$$2t^2\cos2\theta+4t\cos\theta+1=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

θは$\frac{\pi}{4}$の整数倍でないので, $\cos2\theta\neq0$となり,

$$D/4=4\cos^2\theta-2\cos2\theta=4\cos^2\theta-2(2\cos^2\theta-1)=2$$

$D>0$よりtは2つ存在し, 直線 l は双曲線 C と相異なる2点で交わる。

(2) $(*)$の解を$t=\alpha,\ \beta$とすると, $\mathrm{P}(1+\alpha\cos\theta,\ \alpha\sin\theta)$, $\mathrm{Q}(1+\beta\cos\theta,\ \beta\sin\theta)$となり, 解と係数の関係より,

$$\alpha+\beta=-\frac{2\cos\theta}{\cos2\theta},\ \ \alpha\beta=\frac{1}{2\cos2\theta}$$

よって, $\mathrm{PQ}^2=(1+\alpha\cos\theta-1-\beta\cos\theta)^2+(\alpha\sin\theta-\beta\sin\theta)^2$

$$=(\alpha-\beta)^2\cos^2\theta+(\alpha-\beta)^2\sin^2\theta=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\frac{4\cos^2\theta}{\cos^22\theta}-\frac{2}{\cos2\theta}=\frac{4\cos^2\theta-2\cos2\theta}{\cos^22\theta}=\frac{2}{\cos^22\theta}$$

(3) (2)と同様にして, $\mathrm{RS}^2=\dfrac{2}{\cos^22\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2}{\cos^2\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{2}{\sin^22\theta}$

したがって, $\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}=\dfrac{\cos^22\theta}{2}+\dfrac{\sin^22\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$

［解 説］

一般的に計算量の多い2次曲線と直線の関係についての問題です。媒介変数を利用して, 計算量を減らす工夫がポイントです。

2 ［2002 広島大］

(1) $a^2x^2+y^2=1$ ……①，$y=ax+2a$ ……②の共有点は，

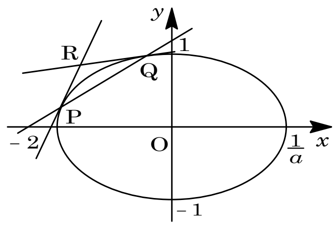
$$a^2x^2+(ax+2a)^2=1,\ 2a^2x^2+4a^2x+4a^2-1=0$$

異なる 2 点で交わる条件は，$D/4=4a^4-2a^2(4a^2-1)>0$

$a>0$ より，$-2a^2+1>0$，$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) ①上の点$(x_0,\ y_0)$における接線の方程式は，

$$a^2x_0x+y_0y=1$$



(3) $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$とおくと，P, Q における接線は，それぞれ，

$$a^2x_1x+y_1y=1,\ a^2x_2x+y_2y=1$$

ともに$\mathrm{R}(X,\ Y)$を通るので，

$$a^2Xx_1+Yy_1=1 \text{……③},\ a^2Xx_2+Yy_2=1 \text{……④}$$

ここで，方程式$a^2Xx+Yy=1$ ……⑤を考えると，これは直線を表し，③より点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$を通り，④より点$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$も通る。すると，⑤は直線 PQ を表す。

⑤を変形すると，$y=-\dfrac{a^2X}{Y}x+\dfrac{1}{Y}$となり，これが②と一致することから，

$$-\frac{a^2X}{Y}=a \text{……⑥},\ \frac{1}{Y}=2a \text{……⑦}$$

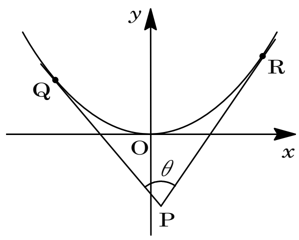
⑦より$a=\dfrac{1}{2Y}$，⑥に代入して，$-\dfrac{1}{2Y}\cdot\dfrac{X}{Y}=1$，$X=-2Y^2$

また，⑦より$Y=\dfrac{1}{2a}$なので，(1)より，$Y>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

［解 説］

(2)は結論だけですが，プロセスを書いた方がよいのかどうか迷います。(3)は有名問題の有名な解法を用いて解きました。

3 [2003 九州大]



(1) x 軸の正の方向から PQ, PR を測った角をそれぞれ α, β とおくと，$m_1 = \tan\alpha$，$m_2 = \tan\beta$ となる。

$m_1 < 0 < m_2$ より，$\beta < \alpha$ となり，

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \cdots\cdots\cdots ①$$

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通り，傾き m の直線は，

$$y - b = m(x - a),\quad y = mx - ma + b$$

放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ と接することより，$\frac{1}{4}x^2 - mx + ma - b = 0$

$$D = m^2 - 4\cdot\frac{1}{4}(ma - b) = 0,\quad m^2 - am + b = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

$a^2 > 4b$ より，②は 2 つの実数解をもち，これを m_1，m_2 $(m_1 < m_2)$ とすると，

$$m_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2},\quad m_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $m_1 < 0 < m_2$ となるので，①より，$\tan\theta = \frac{-\sqrt{a^2 - 4b}}{1 + b}$

$$(1 + b)\tan\theta = -\sqrt{a^2 - 4b}$$

$\tan\theta > 0$ から，$1 + b < 0$ すなわち $b < -1$ のもとで，

$$(1 + b)^2\tan^2\theta = a^2 - 4b,\quad a^2 = (1 + b)^2\tan^2\theta + 4b$$

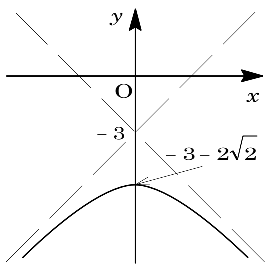
よって，$\mathrm{P}(a,\ b)$ の作る図形の方程式は，$x^2 = (1 + y)^2\tan^2\theta + 4y$ $(y < -1)$

(3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\tan\theta = 1$ より，$x^2 = (1 + y)^2 + 4y$

$$x^2 - y^2 - 6y = 1,\quad x^2 - (y + 3)^2 = -8$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{(y + 3)^2}{8} = -1$$

よって，図形 G は双曲線であり，その 2 本の漸近線は，$x \pm (y + 3) = 0$ から $y = \pm x - 3$ となる。さらに，$y < -1$ より双曲線の下側の枝となり，図示すると，右図のようになる。

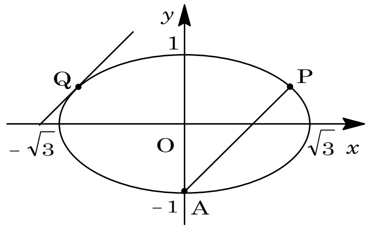


［解 説］

放物線に引いた 2 本の接線の交点が描く軌跡を求める問題です。2 本の接線の位置関係について，チェックが必要です。

$\boxed{4}$ ［2004 筑波大］

(1) 点 P は楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点なので，



$P(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと,

$$\begin{aligned}AP^2&=(\sqrt{3}\cos\theta)^2+(\sin\theta+1)^2\\&=3\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta+1\\&=-2\sin^2\theta+2\sin\theta+4\\&=-2\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

これより, AP は $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき, 最大値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ をとる。このとき, 点 P の座標は, $x\geqq 0$ より $\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, すなわち $P\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2) まず, $\overrightarrow{AP}=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{3}{2}(1,\ 1)$ である。

楕円 C 上の点 Q を $(\sqrt{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおくとき, Q における接線の方程式は,

$$\frac{\sqrt{3}\cos\varphi}{3}x+(\sin\varphi)y=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

この接線が直線 AP と平行になるとき, △APQ の面積は最大となる。このとき, $(*)$の法線ベクトルの成分が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi\right)$ から,

$$1\times\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi+1\times\sin\varphi=0,\ \ \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ より, $\varphi+\dfrac{\pi}{6}=\pi$, $\varphi=\dfrac{5}{6}\pi$

以上より, 点 Q の座標は $\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{5}{6}\pi,\ \sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$, すなわち $Q\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

△APQ の面積の最大値は, $\triangle APQ=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$ となる。

［解 説］

いろいろな解法が考えられますが, 上の解では, (1), (2)とも楕円のパラメータ表示を利用しています。なお, 最後の△APQ の面積計算は, P と Q の y 座標が等しいので, 簡単でした。

$\boxed{5}$ ［2005 筑波大］

(1) C_a: $(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ より，$x^2+ay^2-2ax-3a-1=0$

$$(y^2-2x-3)a+(x^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

どんな a に対しても①が成立する条件は，

$$y^2-2x-3=0 \cdots\cdots\cdots ②,\quad x^2-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③より，$x=\pm 1$

$x=1$ のとき②から $y=\pm\sqrt{5}$，$x=-1$ のとき②から $y=\pm 1$ となり，定点の座標は，

$$(1,\ \sqrt{5}),\ (1,\ -\sqrt{5}),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

(2) $a>0$ のとき C_a が通過する点 $(x,\ y)$ は，①が $a>0$ の解をもつ $(x,\ y)$ である。

(i) $y^2-2x-3\neq 0$ のとき

①より，$a=-\dfrac{x^2-1}{y^2-2x-3}>0$ から，

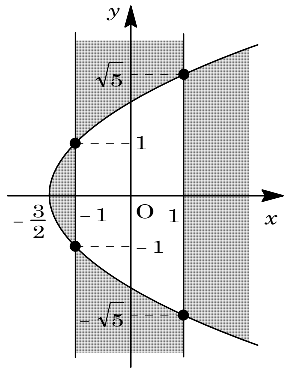
$$-(x^2-1)(y^2-2x-3)>0$$

$$(x+1)(x-1)(y^2-2x-3)<0$$

(ii) $y^2-2x-3=0$ のとき

①より，$x^2-1=0$

(1)から，$(x,\ y)=(1,\ \pm\sqrt{5})$，$(-1,\ \pm 1)$



(i)(ii)より，C_a が通過する範囲は右図の網点部となる。

ただし，黒丸以外の境界は含まない。

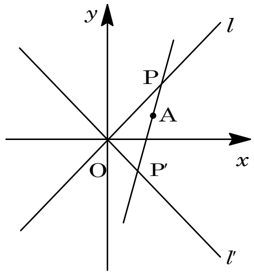
［解 説］

曲線の通過領域を実数解条件として翻訳する頻出問題です。①式がパラメータ a についての 1 次式なので，複雑な処理は必要ありません。なお，領域図示の過程は省きましたが，原点は不等式を満たさないので，その隣接領域からはじめて，市松模様に網点をつけています。

6 ［2006 大阪大］

$\mathrm{P}(p,\ p)$, $\mathrm{P}'(p',\ -p')$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より,

$$p+p'=a+x,\ \ p-p'=b+y$$



よって, $p=\dfrac{1}{2}(a+b+x+y)$ ………①

$$p'=\frac{1}{2}(a-b+x-y)\ \text{………②}$$

また, k を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{AP}'}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より,

$$(p'-a,\ -p'-b)=k(p-a,\ p-b)$$

よって, $(p'-a)(p-b)+(p'+b)(p-a)=0$ ………③

①②を③に代入して,

$$\frac{1}{4}(-a-b+x-y)(a-b+x+y)+\frac{1}{4}(a+b+x-y)(-a+b+x+y)=0$$

$$(x-b)^2-(y+a)^2+(x+b)^2-(y-a)^2=0$$

まとめると, $x^2-y^2=a^2-b^2$

点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ は $y=x$, $y=-x$ 上にないことより, $b\neq\pm a$ から $a^2-b^2\neq0$ であり,

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$$

したがって, 点 Q の軌跡は $l:y=x$ と $l':y=-x$ を漸近線とする双曲線となる。

［解 説］

座標系の回転という方法もありますが, これを思いつくのは, 容易なことではありません。

7 [2006 北海道大]

(1) $A_0(1,\ 0,\ 0)$, $A_1(1,\ 1,\ 0)$, $A_2(1,\ 0,\ 1)$ より,

$$\overrightarrow{OA_0}=(1,\ 0,\ 0)=\overrightarrow{e_1},\ \ \overrightarrow{A_0A_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2},\ \ \overrightarrow{A_0A_2}=(0,\ 1,\ 1)=\overrightarrow{e_3}$$

また, $B_0(2,\ 0,\ 0)$, $B_1(2,\ 1,\ 0)$, $B_2\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より,

$$\overrightarrow{OB_0}=(2,\ 0,\ 0)=2\overrightarrow{e_1},\ \ \overrightarrow{B_0B_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{B_0B_2}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}$$

(2) 条件より, O, P, P′ が同一直線上にあるので, t を実数として,

$$\overrightarrow{OP'}=t\overrightarrow{OP},\ \ \overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}=t(\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2})$$

(1)より, $2\overrightarrow{e_1}+p\overrightarrow{e_2}+q\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}\right)=t(\overrightarrow{e_1}+a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3})$

$\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ は 1 次独立なので,

$$2+\frac{1}{2}q=t\cdots\cdots\cdots①,\ \ p=ta\cdots\cdots\cdots②,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}q=tb\cdots\cdots\cdots③$$

①②より, $p=\left(2+\frac{1}{2}q\right)a$, すなわち $2p=(4+q)a$ となる。

ここで, $q=-4$ のときは①から $t=0$ となり, ③が成立しないことより,

$$a=\frac{2p}{4+q}\cdots\cdots\cdots④$$

①③より, $\frac{\sqrt{3}}{2}q=\left(2+\frac{1}{2}q\right)b$ となり, $b=\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3) 条件より, $|\overrightarrow{A_0P}|=1$ から, $|a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2}|=1$ となり, $|a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}|=1$

$a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}=(0,\ a,\ b)$ なので, $a^2+b^2=1$

④⑤を代入すると, $\left(\frac{2p}{4+q}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\right)^2=1$, $2p^2+q^2-4q=8$

$$\frac{p^2}{6}+\frac{(q-2)^2}{12}=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて, $\overrightarrow{B_0P}=p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}$ であり,

$$|\overrightarrow{B_0B_1}|=|\overrightarrow{B_0B_2}|=1,\ \ \overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_2}=0$$

そこで, B_0 を原点とし, $\overrightarrow{B_0B_1}$ を p 軸の基本ベクトル, $\overrightarrow{B_0B_2}$ を q 軸の基本ベクトルとして, 平面 β 上で直交座標系をつくることができる。このとき, 点 P′ の座標は $(p,\ q)$ となるので, ⑥より, 点 P′ が動いてできる図形 C' は楕円である。

[解 説]

大学入試に久々の登場ですが, 空間内の楕円を表現する問題です。一度は演習した方がよい問題です。

8 ［2008 東京工大］

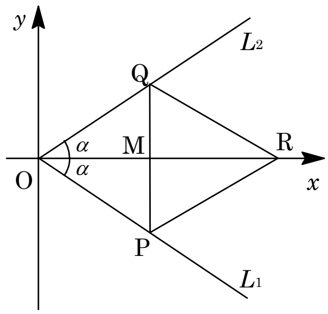
(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，$PQ=1$ より，

$$P\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ -\frac{1}{2}\right),\ Q\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ \frac{1}{2}\right)$$

さて, PQ の中点 M は，$M\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ 0\right)$となり，

$$MR=MP\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$R\left(\frac{1}{2\tan\alpha}+\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$である。



(2) 半直線 L_1，L_2 の方向ベクトルの成分は，それぞれ $(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$，$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ とすることができるので, $p>0$, $q>0$ として，

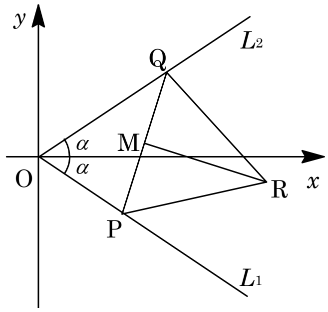
$$P(p\cos\alpha,\ -p\sin\alpha),\ Q(q\cos\alpha,\ q\sin\alpha)$$

すると，$PQ=1$ より，

$$(p-q)^2\cos^2\alpha+(p+q)^2\sin^2\alpha=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて, PQ の中点 M は,

$$M\left(\frac{p\cos\alpha+q\cos\alpha}{2},\ \frac{-p\sin\alpha+q\sin\alpha}{2}\right)$$



また，$\overrightarrow{QP}=(p\cos\alpha-q\cos\alpha,\ -p\sin\alpha-q\sin\alpha)$，$|\overrightarrow{QP}|=1$，$|\overrightarrow{MR}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\overrightarrow{MR}=\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha,\ p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$

そこで，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MR}$ より，$R(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{1}{2}(p\cos\alpha+q\cos\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)(p+q)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p+q) \cdots\cdots ②$$

$$y=\frac{1}{2}(-p\sin\alpha+q\sin\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)(p-q)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p-q) \cdots\cdots ③$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ より，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$ となり，②③を①に代入すると，

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}x^2+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}y^2=1$$

よって，点 R の軌跡は楕円の一部である。

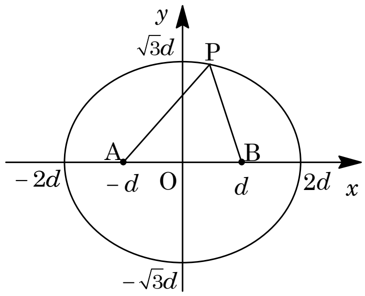
［解 説］

図形と方程式の重要題の１つで，単位ベクトルの効用が実感できる問題です。

9 [2011 筑波大]

(1) 焦点が $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ より，楕円 E の中心は原点となるので，

$$E : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a^2-b^2=d^2)$$



条件より，$2a=4d$ から，$a=2d$ となり，

$$b^2=a^2-d^2=3d^2,\quad b=\sqrt{3}d$$

これより，長軸の長さは $2a=4d$，短軸の長さは $2b=2\sqrt{3}d$ となる。

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=(x+d)^2+y^2+(x-d)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2d^2$$
$$=2\mathrm{OP}^2+2d^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=4d$ なので，①より，

$$2\mathrm{OP}^2+2d^2=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=16d^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$$

よって，$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=8d^2-\mathrm{OP}^2-d^2=7d^2-\mathrm{OP}^2 \cdots\cdots\cdots ②$

(3) $\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP})$ なので，①②より，

$$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3=4d(2\mathrm{OP}^2+2d^2-7d^2+\mathrm{OP}^2)=4d(3\mathrm{OP}^2-5d^2) \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$\sqrt{3}d \leqq \mathrm{OP} \leqq 2d$ から $3d^2 \leqq \mathrm{OP}^2 \leqq 4d^2$ であり，③より，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値は $4d(12d^2-5d^2)=28d^3$，最小値は $4d(9d^2-5d^2)=16d^3$ となる。

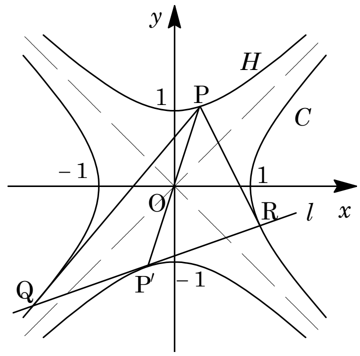
［解 説］

楕円の定義について，基本事項を確認する問題です。なお，①式は中線定理です。

10 ［2012 筑波大］

(1) $C: x^2-y^2=1$ ……①，$H: x^2-y^2=-1$ ……②

に対して，H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の原点対称の点を $\mathrm{P}'(-s,\ -t)$ とおくと，P' における H の接線の方程式は，



$$-sx-(-t)y=-1\,,\ \ sx-ty=1 \text{ ………③}$$

よって，直線 $l: sx-ty=1$ は点 P を通らない。

(2) ①③を連立して，$x^2-\dfrac{1}{t^2}(sx-1)^2=1$ となり，

$$(t^2-s^2)x^2+2sx-t^2-1=0$$

点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は H 上の点から，$s^2-t^2=-1$ ……④となり，

$$x^2+2sx-t^2-1=0 \text{ ………⑤}$$

⑤は，$D/4=s^2+t^2+1>0$ となるので，異なる 2 実数解をもつ。すなわち，直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わる。

そこで，⑤の解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，$\mathrm{Q}\Big(\alpha,\ \dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\Big)$，$\mathrm{R}\Big(\beta,\ \dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\Big)$ と表せ，

$$\alpha+\beta=-2s\,,\ \ \frac{\alpha+\beta}{2}=-s$$

これより，線分 QR の中点は P' となり，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 G は線分 PP' を $2:1$ に内分する点である。

よって，$\mathrm{G}\Big(\dfrac{-2s+s}{3},\ \dfrac{-2t+t}{3}\Big)$ から，$\mathrm{G}\Big(\dfrac{-s}{3},\ \dfrac{-t}{3}\Big)$ である。

(3) $\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{1}{2}\Big|\alpha\Big(\dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\Big)-\beta\Big(\dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\Big)\Big|=\dfrac{1}{2}\Big|\dfrac{\beta-\alpha}{t}\Big|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{s^2+t^2+1}}{|t|}$

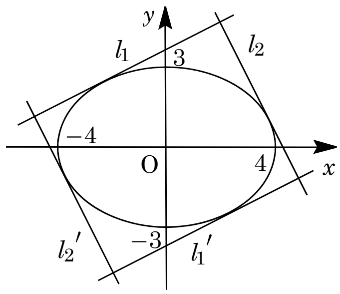
④より，$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{\sqrt{t^2-1+t^2+1}}{|t|}=\dfrac{\sqrt{2t^2}}{|t|}=\sqrt{2}$

以上より，$\triangle\mathrm{GQR}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となり，点 P の位置によらず一定の値をとる。

［解 説］

(1)は普通に連立して計算をしてもよいのですが，直線 l の方程式が，いかにも意味ありげなので工夫をしました。そして，図形的に結論を記しています。

$\boxed{11}$ ［2013 筑波大］



(1) $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ から，$9x^2+16y^2=9\cdot 16$ ………①

直線 $y=mx$ に平行な直線を $y=mx+n$ ……②とおき，①に代入すると，

$$9x^2+16(mx+n)^2=9\cdot 16$$
$$(9+16m^2)x^2+32mnx+16n^2-9\cdot 16=0$$

①②が接することより，

$$D/4=16^2m^2n^2-(9+16m^2)(16n^2-9\cdot 16)=0$$
$$16m^2n^2-(9+16m^2)(n^2-9)=0,\ n^2-9-16m^2=0$$

よって，$n=\pm\sqrt{16m^2+9}$ から，l_1，l_1' の方程式は，$y=mx\pm\sqrt{16m^2+9}$

(2) 原点と l_1，l_1' の距離はともに $\dfrac{\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}$ なので，l_1 と l_1' の距離 d_1 は，

$$d_1=\frac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}\ \text{………③}$$

また，l_2 と l_2' の距離 d_2 は，$m\neq 0$ のとき，③において m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換え，

$$d_2=\frac{2\sqrt{16\left(-\frac{1}{m}\right)^2+9}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2+1}}=\frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}\ \text{………④}$$

なお，$m=0$ のときは $d_2=8$ となるが，このときも④は成立している。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2=\dfrac{4(16m^2+9)}{m^2+1}+\dfrac{4(9m^2+16)}{m^2+1}=100$

(4) l_1，l_1'，l_2，l_2' で囲まれる長方形の面積 S は，$S=d_1d_2=d_1\sqrt{100-(d_1)^2}$

ここで，$d_1=t$ とおくと，$6\leqq t<8$ となり，

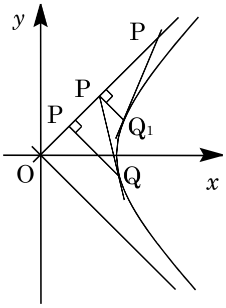
$$S=t\sqrt{100-t^2}=\sqrt{100t^2-t^4}=\sqrt{-(t^2-50)^2+2500}$$

よって，$36\leqq t^2<64$ から，$t^2=50$ のとき S は最大値 $\sqrt{2500}=50$ をとる。

［解 説］

楕円の有名問題です。誘導が非常に細かく付いています。

$\boxed{12}$ ［2015 千葉大］



(1) 双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{Q}_n(b_n,\ c_n)$，その漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ に対して,

$$b_n{}^2-c_n{}^2=1,\ (b_n+c_n)(b_n-c_n)=1\ \cdots\cdots\text{③}$$

点 Q_n を通り，漸近線②に垂直な直線は,

$$x+y=b_n+c_n$$

この直線が $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通ることより,

$$2a_n=b_n+c_n\ \cdots\cdots\text{④}$$

③④より，$b_n-c_n=\dfrac{1}{2a_n}$ ……⑤となり，④⑤から,

$$b_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n+\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n+\frac{1}{4a_n},\ c_n=\frac{1}{2}\Big(2a_n-\frac{1}{2a_n}\Big)=a_n-\frac{1}{4a_n}$$

よって，$\mathrm{Q}_n\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)$ である。

(2) 点 Q_n における①の接線は，(1)から，$\Big(a_n+\dfrac{1}{4a_n}\Big)x-\Big(a_n-\dfrac{1}{4a_n}\Big)y=1$

この接線が点 $\mathrm{P}_{n-1}(a_{n-1},\ a_{n-1})$ を通るので,

$$\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}-\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}\Big)a_{n-1}=1,\ \frac{1}{2a_n}a_{n-1}=1$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ となり，$a_n=a_0\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^n$ である。

(3) $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ は $\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=90^\circ$ の直角三角形であり,

$$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{2}(a_{n-1}-a_n)=\sqrt{2}(2a_n-a_n)=\sqrt{2}a_n$$

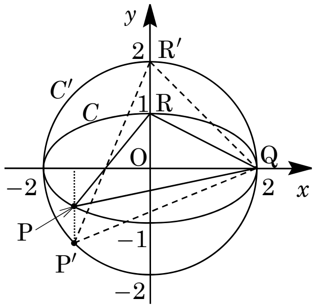
$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{\Big(a_n+\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2+\Big(a_n-\frac{1}{4a_n}-a_n\Big)^2}=\sqrt{\frac{1}{8a_n{}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a_n}$$

よって，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a_n\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}a_n}=\dfrac{1}{4}$ である。

［解 説］

漸化式の双曲線への応用問題です。煩わしい計算の多い 2 次曲線としては, 計算量は少なめです。

$\boxed{13}$ [2016 金沢大]



(1) まず, 楕円$C: x^2+4y^2=4$を y 軸方向に 2 倍拡大して, 円$C': x^2+y^2=4$をつくるとする。

このとき, 点 P はP′, 点R(0, 1)はR′(0, 2)に対応し, 点Q(2, 0)の位置は変わらない。

すると, $\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{P'QR'}$より, △PQR の面積が最大になるのは, △P′QR′の面積が最大のときである。

このときの点P′の座標は, 直線$y=x$に関する対称性から, $\mathrm{P'}\left(2\cos\dfrac{5}{4}\pi,\ 2\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$すなわち$\mathrm{P'}(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$である。また最大値は,

$$\triangle\mathrm{P'QR'}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

よって, △PQR は$\mathrm{P}\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$のときに最大となり, 最大値は,

$$\frac{1}{2}(2+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$$

(2) (1)と同様にして, 円C'の内側で直線P′Qの下方にある部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}$$

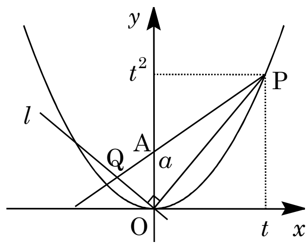
よって, 楕円 C の内側で直線 PQ の下方にある部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

［解 説］

楕円を円に変換して処理する解法を採用しました。そうすると, 計算はほとんど不要といってよいぐらいの解答例になります。

14 ［2017 金沢大］



(1) $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ に対して，OP の傾きは t より，O を通り OP に垂直な直線 l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{t}x\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{A}(0,\ a)\ (0<a\leqq 1)$ に対して，直線 PA の方程式は，

$$y=\frac{t^2-a}{t}x+a\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\dfrac{t^2-a}{t}=-\dfrac{1}{t}$ とすると $\dfrac{t^2-a+1}{t}=0$ となるが，$t^2>0$，$0<a\leqq 1$ から成立しない。よって，直線 PA と l は交わる。

そこで，①②を連立すると，$\dfrac{t^2-a}{t}x+a=-\dfrac{1}{t}x$ より，

$$x=-\frac{at}{t^2-a+1},\ \ y=\frac{a}{t^2-a+1}$$

①と②の交点が $\mathrm{Q}(u,\ v)$ より，$u=-\dfrac{at}{t^2-a+1}$，$v=\dfrac{a}{t^2-a+1}$

(2) 点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通ることより，(1)から，

$$-\frac{at}{t^2-a+1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ \frac{a}{t^2-a+1}=1\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より $t^2-a+1=a$ となり，③に代入すると，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，④から，

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$$

このとき，(1)から，$u=-\dfrac{2t}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑤$，$v=\dfrac{2}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑥$

すると，$v\neq 0$ から $t=-\dfrac{u}{v}$ となり，⑥に代入すると $v\left(3\cdot\dfrac{u^2}{v^2}+1\right)=2$ から，

$$\frac{3u^2}{v}+v=2,\ \ 3u^2+v^2=2v,\ \ 3u^2+(v-1)^2=1$$

ここで，⑤を $u=-\dfrac{2}{3t+\frac{1}{t}}$ と変形すると，$3t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{3}$ から $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq u<0$ となり，また⑥から，$3t^2+1>1$ より $0<v<2$ である。

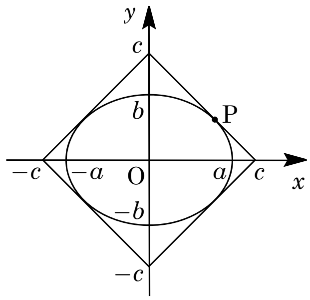
以上より，点 Q の軌跡は，楕円 $3x^2+(y-1)^2=1$ の第 2 象限の部分である。

［解 説］

パラメータ表示された点の軌跡の問題です。ただ，軌跡に限界が現れる点には注意が必要です。

15 [2018 金沢大]

楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の第 1 象限の接点 P の座標を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，接線の方程式は,



$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x+\frac{b\sin\theta}{b^2}y=1,\quad \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

この接線が，点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$ を通るので,

$$\frac{c\cos\theta}{a}=1\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{c\sin\theta}{b}=1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\cos\theta=\dfrac{a}{c}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{c}$ となり，$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$，$a^2+b^2=c^2\ \cdots\cdots\cdots③$

このとき，第 1 象限の接点の座標は $\left(\dfrac{a^2}{c},\ \dfrac{b^2}{c}\right)$ となり，4 つの接点を結んでできる四角形は，対称性から長方形となるので，③を利用すると，その面積 S は,

$$S=4\cdot\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}=\frac{4a^2b^2}{c^2}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

また，楕円 C で囲まれる図形の面積 T は,

$$T=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab$$

このとき，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{\pi ab}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4ab}{\pi(a^2+b^2)}=\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cdots\cdots\cdots④$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より,

$$a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab,\quad \frac{2ab}{a^2+b^2}\leqq 1\quad (\text{等号は}\ a=b\ \text{のとき成立})\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}\geqq 0$，すなわち $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つ。

また，等号成立は，③も合わせると，$a=b=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ のときである。

［解 説］

楕円を題材とした基本的な問題です。式変形を進めると，相加平均と相乗平均の関係を利用することが推測できます。もっとも，c と θ で処理する手もありますが。