２０１９ 入試対策
２次数学アーカイブ

微分法
理系

２００１－２０１８

外林康治 編著

電送数学舎

微 分 法

【問題一覧】

1 aを正の定数とし，関数$f(x)$を以下のように定める。

$$f(x)=\frac{\log x}{(1+x)^a}\quad (x>0)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $e^{\frac{1}{a}}$と$e^{\frac{2}{a}}$の間に$f'(c)=0$となるcが存在することを示せ。

(2) $f'(c)=0$となる c はただ 1 つであり，関数$f(x)$は$x=c$で最大値をとることを示せ。 ［2002 筑波大］

2 (1) xを正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$と$\dfrac{1}{x+1}$の大小を比較せよ。

(2) $\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$の大小を比較せよ。 ［2002 名古屋大］

3 以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 $x,\ y$ に対して，不等式$x(\log x-\log y)\geqq x-y$が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは$x=y$の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数x_1，…，x_nが$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=1$を満たしているとき，不等式$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\geqq\log\frac{1}{n}$が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは$x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$の場合に限ることを示せ。 ［2002 金沢大］

4 関数$f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\quad f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$は$f_n(x)$の第k次導関数を表す。

(1) $f_n(x)$は$n+1$次多項式であることを示し，x^{n+1}の係数を求めよ。

(2) $f_n^{(1)}(0)$，$f_n^{(2)}(0)$，$f_n^{(3)}(0)$，$f_n^{(4)}(0)$を求めよ。 ［2003 東京工大］

5 座標平面上に直線$l : x\sin\theta + y\cos\theta = 1$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$がある。不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x\sin\theta + y\cos\theta \geqq 1$が表す領域を D, 不等式$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x\sin\theta + y\cos\theta \leqq 1$ が表す領域をD'とする。

D 内に半径 R の 2 つの円C_1，C_2を，C_1は l と y 軸に接し，C_2は l と x 軸に接し，さらにC_1とC_2が外接するようにとる。またD'内に半径 r の 2 つの円C_1'，C_2'を，C_1'はlとy軸に接し，C_2'はlとx軸に接し，さらにC_1'とC_2'が外接するようにとる。

(1) $\dfrac{r}{R}$をθで表せ。

(2) θが$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，$\dfrac{r}{R}$のとりうる値の範囲を求めよ。

［2004 大阪大］

6 aを $0<a<1$ を満たす定数とし，$f(x) = \dfrac{\cos 2x - 2}{a\cos x + 1}$ とする。

(1) $f(x)$が$0 \leqq x \leqq \pi$で減少関数となるaの範囲を求めよ。

(2) $f(x)$の$0 \leqq x \leqq \pi$における最大値は$f(0)$であることを示せ。 ［2005 東北大］

7 kを正の整数とし，$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ の範囲で定義された 2 曲線

$$C_1 : y = \cos x,\ C_2 : y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える。

(1) C_1とC_2は共有点をもつことを示し，その点におけるC_1の接線は点$(0,\ 1)$を通ることを示せ。

(2) C_1とC_2の共有点はただ 1 つであることを証明せよ。 ［2005 京都大］

8 $a \geqq b > 0$, $x \geqq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1) $0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2e^x}{2}$

(2) $a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3) $e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2e^x}{2n}$ ［2006 筑波大］

9　すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 $a,\ b$ に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。　　　　［2007 京都大］

10　曲線 $C: y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P, Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P, Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

［2008 名古屋大］

11　$a,\ b$ は実数で $a>b>0$ とする。区間 $0\leqq x\leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log\big(ax+b(1-x)\big)-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし, log は自然対数を表す。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2)　$f'(c)=0$ を満たす実数 c が, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して，$ax+b(1-x)\geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

［2009 神戸大］

12　(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

［2009 東京大］

13 長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A, B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

(1) y を x を用いて表せ。

(2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

［2012 東北大］

14 k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

［2013 東京工大］

15 a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\ \ g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。 ［2013 東京大］

16 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a，b，c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 a，b，c，d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 ［2014 熊本大］

17 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。 ［2014 九州大］

18 a は実数とし，2 つの曲線 $C_1: y=(x-1)e^x$，$C_2: y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ がある。ただし，e は自然対数の底である。C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

(1) a を t で表せ。

(2) t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ。

［2015 北海道大］

19 (1)　a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　$a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。　[2015 京都大]

20　xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。　[2015 東京工大]

21　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^x$ $(x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2)　方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。　[2015 名古屋大]

22　次の問いに答えよ。

(1)　c を正の定数とする。正の実数 $x,\ y$ が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2)　正の実数 $x,\ y,\ z$ が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。　[2016 大阪大]

23 2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2) (1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2), (3)においては，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。 [2016 名古屋大]

24 $a,\ b$ を実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし，x についての方程式 $f(x)=b$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。 [2016 金沢大]

25 e を自然対数の底，すなわち $e=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

[2016 東京大]

26 以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，不等式 $\log x<x$ を示せ。

(2) $1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3) $x\geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。 [2016 千葉大]

27 半径 1 の円に外接する△ABC について，$\angle\mathrm{CAB}=2x$，$\angle\mathrm{ABC}=2y$，$\angle\mathrm{BCA}=2z$ とする。△ABC の面積を S とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $S=\dfrac{1}{\tan x}+\dfrac{1}{\tan y}+\dfrac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(2) $z=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，S の最小値とそのときの x, y を求めよ。 ［2017 熊本大］

28 曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が $t\,(t\geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。 ［2017 千葉大］

29 n を自然数とする。$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。

(3) (2)における解を x_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx_n$ を求めよ。

［2017 神戸大］

30 a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。 ［2018 名古屋大］

31 次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ の範囲で不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ が成り立つことを示せ。

(2) x が $x>0$ の範囲を動くとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

［2018 大阪大］

微 分 法

【解答例と解説】

1 ［2002 筑波大］

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{(1+x)^a}$ より，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}(1+x)^a-a\log x\cdot(1+x)^{a-1}}{(1+x)^{2a}}=\dfrac{1+x-ax\log x}{x(1+x)^{a+1}}$

ここで，$g(x)=1+x-ax\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^{a+1}}$ となり，

$$g\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=1+e^{\frac{1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{a}=1,\ \ g\left(e^{\frac{2}{a}}\right)=1+e^{\frac{2}{a}}-ae^{\frac{2}{a}}\cdot\frac{2}{a}=1-e^{\frac{2}{a}}<0$$

$x>0$ なので $x(1+x)^{a+1}>0$ より，$f'\left(e^{\frac{1}{a}}\right)>0$，$f'\left(e^{\frac{2}{a}}\right)<0$

よって，$e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在する。

(2) $g'(x)=1-a\log x-ax\cdot\dfrac{1}{x}=1-a-a\log x$

$g'(x)=0$ の解は $\log x=\dfrac{1-a}{a}$ より $x=e^{\frac{1-a}{a}}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty$ から，

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

$g(x)$ の増減は右表のようになる。

よって，$g(x)=0$ となる x は 1 つしかなく，言い換えると，$f'(c)=0$ となる c はただ 1 つである。

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることになる。

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

［解 説］

微分法の標準的な問題です。ただ，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$ はプロセス抜きで答えるしかないでしょう。

$\boxed{2}$ [2002 名古屋大]

(1) $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

$f(x)$ は $x>0$ において単調減少で，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より，$f(x)>0$

よって，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2) $g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，(1)より，

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

よって，$g(x)$ は $x>0$ において単調増加である。

すると，$\dfrac{2001}{2002}<\dfrac{2002}{2001}$ より，$g\left(\dfrac{2001}{2002}\right)<g\left(\dfrac{2002}{2001}\right)$ となるので，

$$\log\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\log\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$$

したがって，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

［解 説］

(2)において $g(x)$ を設定するところがポイントです。$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ または $g(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ でしょうが，前者の方が(1)と相性がよさそうです。

3 [2002 金沢大]

(1) x, y の大小関係で場合分けをして，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ を証明する。

(i) $0<y<x$ のとき

$f(x)=\log x$ とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ となるので，平均値の定理より，

$$\frac{\log x-\log y}{x-y}=\frac{1}{c_1}\quad (0<y<c_1<x)$$

$\dfrac{1}{c_1}>\dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log x-\log y}{x-y}>\dfrac{1}{x}$，$x(\log x-\log y)>x-y$

(ii) $0<x<y$ のとき

(i)と同様にして，$\dfrac{\log y-\log x}{y-x}=\dfrac{1}{c_2}\quad (0<x<c_2<y)$

$\dfrac{1}{c_2}<\dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log y-\log x}{y-x}<\dfrac{1}{x}$，$x(\log y-\log x)<y-x$

$$x(\log x-\log y)>x-y$$

(iii) $0<x=y$ のとき

$\log x-\log y=0$，$x-y=0$ より，$x(\log x-\log y)=x-y$

(i)(ii)(iii)より，$x(\log x-\log y)\geqq x-y$ （等号は $x=y$ のとき成立）

(2) $1\leqq i\leqq n$ として，(1)から，$x_i\left(\log x_i-\log\dfrac{1}{n}\right)\geqq x_i-\dfrac{1}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\log x_i-\log\frac{1}{n}\right)\geqq\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i-\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqq\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1$$

条件より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ なので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i-\log\frac{1}{n}\geqq 1-\frac{1}{n}\cdot n$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\geqq\log\frac{1}{n}$$

等号が成立するのは，$(*)$において $x_i=\dfrac{1}{n}$ のとき，すなわち $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ の場合に限る。

［解 説］

(2)は(1)を利用します。等号成立条件を参照すれば，x を x_i，y を $\dfrac{1}{n}$ と置き換えるのは，そんなに難しいことではありません。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2003 東京工大］

(1)　$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$f_1(x)=x^2$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$f_k(x)$ が $k+1$ 次多項式であるとする。

このとき $f_k^{(2)}(x)$ は $k-1$ 次多項式となり，$x^3 f_k^{(2)}(x)$ は $k+2$ 次多項式である。

すると，$f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3 f_k^{(2)}(x)$ より，$f_{k+1}(x)$ は $k+2$ 次多項式となる。

(i)(ii)より，$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式である。

さて，$f_n(x)$ の x^{n+1} の係数を a_n とすると，$a_1=1$ で，$f_n^{(2)}(x)$ の x^{n-1} の係数は $n(n+1)a_n$ となるので，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$ から x^{n+2} の係数を比べると，

$$a_{n+1}=n(n+1)a_n$$

$n\geqq 2$ で，$a_n=a_1(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(3\cdot 4)\cdots(n-1)n=(n-1)!\,n!$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=0!1!=1$ となり成立する。

よって，$a_n=(n-1)!\,n!$

(2)　$g_n(x)$ を x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項が 0 の 5 次以上の多項式として，

$$f_n(x)=g_n(x)+p_n x^4+q_n x^3+r_n x^2+s_n x+t_n$$

すると条件より，
$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=f_n(x)+x^3\{g_n^{(2)}(x)+12p_n x^2+6q_n x+2r_n\}\\&=f_n(x)+x^3 g_n^{(2)}(x)+12p_n x^5+6q_n x^4+2r_n x^3\end{aligned}$$

ここで x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項を比べると，

$$p_{n+1}=p_n+6q_n\ \cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=q_n+2r_n\ \cdots\cdots②$$
$$r_{n+1}=r_n\ \cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=s_n\ \cdots\cdots④,\quad t_{n+1}=t_n\ \cdots\cdots⑤$$

また，$f_1(x)=x^2$ より，$p_1=q_1=0$，$r_1=1$，$s_1=t_1=0$ となり，

③より $r_n=1$，④⑤より $s_n=t_n=0$

②に代入して，$q_{n+1}=q_n+2$ より，$q_n=0+2(n-1)=2(n-1)$

さらに①に代入して，$p_{n+1}=p_n+12(n-1)$ より，$n\geqq 2$ で，

$$p_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}12(k-1)=6(n-1)(n-2)$$

$n=1$ をあてはめると，$p_1=0$ となり成立する。

よって，$f_n^{(1)}(x)=g_n^{(1)}(x)+4p_n x^3+3q_n x^2+2r_n x+s_n$ より，$f_n^{(1)}(0)=s_n=0$

$f_n^{(2)}(x)=g_n^{(2)}(x)+12p_n x^2+6q_n x+2r_n$ より，$f_n^{(2)}(0)=2r_n=2$

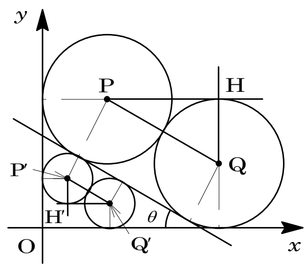
$f_n^{(3)}(x)=g_n^{(3)}(x)+24p_n x+6q_n$ より，$f_n^{(3)}(0)=6q_n=12(n-1)$

$f_n^{(4)}(x)=g_n^{(4)}(x)+24p_n$ より，$f_n^{(4)}(0)=24p_n=144(n-1)(n-2)$

［解　説］

(1)と(2)は同じ解法をとっています。比べる位置が異なるだけです。

5 ［2004 大阪大］



(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から，直線 $l: x\sin\theta+y\cos\theta=1$ の上向きの法線ベクトルの成分を $(\sin\theta,\ \cos\theta)$ とすることができるので，これより l の右向きの方向ベクトルの成分は $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる。

さて，半径 R の 2 つの円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ P, Q とおき，P を通り x 軸に平行な直線と，Q を通り y 軸に平行な直線との交点を H とおくと，$\mathrm{PQ}=2R$，$\angle\mathrm{QPH}=\theta$ となる。

すると，点 P の座標は $\mathrm{P}(R,\ 2R\sin\theta+R)$ となり，直線 l との距離が R なので，

$$\frac{R\sin\theta+(2R\sin\theta+R)\cos\theta-1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=R$$

$R(\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)-1=R$ より，$R=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}$

同様にして，図のように点 P′，Q′，H′ を設定すると，$\mathrm{P}'(r,\ 2r\sin\theta+r)$ となり，

$$\frac{-\{r\sin\theta+(2r\sin\theta+r)\cos\theta-1\}}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=r$$

$-r(\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)+1=r$ より，$r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

以上より，$\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $1<t\leqq\sqrt{2}$ である。

ここで，$\dfrac{r}{R}=f(t)$ とおくと，(1)より，

$$f(t)=\frac{t+t^2-2}{t+t^2}=1-\frac{2}{t+t^2}$$

すると，$1<t\leqq\sqrt{2}$ で，$f'(t)=\dfrac{2(2t+1)}{(t+t^2)^2}>0$ より，$f(t)$ は単調増加し，

$$f(1)<f(t)\leqq f(\sqrt{2})$$

よって，$f(1)=0$，$f(\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$ より，$0<\dfrac{r}{R}\leqq-1+\sqrt{2}$ である。

［解 説］

(1)はいろいろな解法が考えられます。最初に考えたのは，直線 l の x 切片と y 切片の間の距離を R と θ で表すものでした。しかし，計算が複雑になりすぎ，次に考えたのが上に記した解法です。

$\boxed{6}$　　［2005 東北大］

(1)　$f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{-2\sin 2x(a\cos x+1)-(\cos 2x-2)(-a\sin x)}{(a\cos x+1)^2}$$

$$=\frac{\sin x\{-4\cos x(a\cos x+1)+a(2\cos^2 x-3)\}}{(a\cos x+1)^2}$$

$$=-\frac{\sin x(2a\cos^2 x+4\cos x+3a)}{(a\cos x+1)^2}$$

ここで，$g(x)=2a\cos^2 x+4\cos x+3a$ とおくと，$f(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数となる条件は，$0<x<\pi$ において $g(x)\geqq 0$ と同値である。

さらに，$t=\cos x$，$h(t)=g(x)$ とおくと，$0<x<\pi$ から $-1<t<1$ のもとで，

$$h(t)=2at^2+4t+3a=2a\left(t+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{2}{a}+3a$$

$0<a<1$ から $-\dfrac{1}{a}<-1$ となるので，$-1<t<1$ において $h(t)\geqq 0$ となる条件は，

$$h(-1)=5a-4\geqq 0,\ \ a\geqq\frac{4}{5}$$

よって，$0<a<1$ より，$\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ である。

(2)　(i)　$\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ のとき

(1)より，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数なので，最大値は $f(0)$ である。

(ii)　$0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき

$h(-1)=5a-4<0$，$h(1)=5a+4>0$ より，$-1<t<1$ において $h(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在し，これを $t=\alpha$ とおく。すると，$-1\leqq t<\alpha$ において $h(t)<0$，$\alpha<t\leqq 1$ において $h(t)>0$ となる。

さらに，$\alpha=\cos\beta$ とおくと，$\beta<x\leqq\pi$ において $g(x)<0$，$0\leqq x<\beta$ において $g(x)>0$ となる。

よって，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$f(0)-f(\pi)=-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}=\frac{-2a}{(a+1)(a-1)}>0$$

以上より，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値は $f(0)$ である。

［解　説］

一見，平易に見えますが，関数の増減に関する興味深い問題です。置き換えを行って，思考の対象を絞り，グラフをイメージしながら解きました。

７ ［2005 京都大］

(1) $C_1 : y=\cos x$ ……①, $C_2 : y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ……②の共有点の条件は，$\cos x=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

ここで，$f(x)=\cos x-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ とおくと，

$$f(2k\pi)=1-\frac{1-4k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2}=\frac{8k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2}>0$$

$$f((2k+1)\pi)=-1-\frac{1-(2k+1)^2\pi^2}{1+(2k+1)^2\pi^2}=\frac{-2}{1+(2k+1)^2\pi^2}<0$$

これより，$f(x)=0$ は $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。すなわち，C_1 と C_2 はこの区間に少なくとも 1 つの共有点をもつ。

この共有点を $(\alpha,\ \cos\alpha)$ とすると，①②より，$\cos\alpha=\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ ………③

さて，点 $(\alpha,\ \cos\alpha)$ における C_1 の接線は，①より $y'=-\sin x$ なので，

$$y-\cos\alpha=-\sin\alpha(x-\alpha)\ \cdots\cdots\cdots④$$

$x=0$ のとき，$y=\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$ ………⑤

ここで，$2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$ において $\sin\alpha>0$ より，③から，

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}}=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

⑤から，$y=\alpha\cdot\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}+\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}=\dfrac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2}=1$ となり，接線④は点 $(0,\ 1)$ を通る。

(2) 点 $(0,\ 1)$ から C_1 に引いた接線は，接点を $(t,\ \cos t)$ とすると，

$$y-\cos t=-\sin t(x-t)\quad (2k\pi<t<(2k+1)\pi)$$

$(0,\ 1)$ を通ることより，$1-\cos t=t\sin t$，$t\sin t+\cos t-1=0$

ここで，$g(t)=t\sin t+\cos t-1$ とおくと，

$$g'(t)=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$$

右表より，$g(t)=0$ となる t は，$2k\pi<t<(2k+1)\pi$ にただ 1 つだけ存在し，言い換えると，点 $(0,\ 1)$ を通る接線の C_1 上の接点は，1 個だけしか存在しない。すなわち，C_1 と C_2 の共有点の個数は多くとも 1 つであり，(1)と合わせると，ただ 1 つとなる。

t	$2k\pi$	…	$\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$	…	$(2k+1)\pi$
$g'(t)$		＋	0	－	
$g(t)$	0	↗		↘	-2

［解 説］

(2)は(1)の後半で示した C_1 と C_2 の共有点における C_1 の接線は，必ず点 $(0,\ 1)$ を通るということを用いています。ややくどく記述しましたが。

８ ［2006 筑波大］

(1) $x \geqq 0$ において，$f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと，$f'(x) = e^x - 1 \geqq 0$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq f(0) = 0$ となり，$e^x - (1+x) \geqq 0$ ………①

また, $x \geqq 0$ において，$g(x) = \dfrac{x^2 e^x}{2} - e^x + (1+x)$ とおくと,

$$g'(x) = \frac{2xe^x + x^2 e^x}{2} - e^x + 1 = \frac{(x^2+2x-2)e^x}{2} + 1$$

$$g''(x) = \frac{(2x+2)e^x + (x^2+2x-2)e^x}{2} = \frac{(x^2+4x)e^x}{2} \geqq 0$$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$g'(x) \geqq g'(0) = 0$ より,

$$g(x) \geqq g(0) = 0,\ \frac{x^2 e^x}{2} \geqq e^x - (1+x) \cdots\cdots\text{②}$$

①②より, $x \geqq 0$ のとき，$0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2}$

(2) (i) $a > b > 0$ のとき

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}$$
$$< a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

よって，$a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1}$

(ii) $a = b > 0$ のとき　$a^n - b^n = n(a-b)a^{n-1} = 0$

(i)(ii)より, $a \geqq b > 0$ のとき，$a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$ ………③

(3) $x \geqq 0$ のとき，①より，$e^{\frac{x}{n}} \geqq 1 + \dfrac{x}{n} > 0$ となるので，③より,

$$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right)\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n-1}$$

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x} \cdots\cdots\text{④}$$

②より，$e^{\frac{x}{n}} - 1 - \dfrac{x}{n} \leqq \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 e^{\frac{x}{n}}}{2} = \dfrac{x^2 e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}$ となるので,

$$n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x} \leqq n \cdot \frac{x^2 e^{\frac{x}{n}}}{2n^2} e^{\frac{n-1}{n}x} = \frac{x^2 e^x}{2n} \cdots\cdots\text{⑤}$$

④⑤より, $x \geqq 0$ のとき，$e^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2n}$

［解 説］

(1)と(2)の不等式が, (3)の不等式を証明するための親切な誘導となっています。そっけない感じのする問題文ですが，内容には味わいがあります。

9 ［2007 京都大］

(1) $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ……①において，$b=-a$ とおくと，$f(0)=0$ から，

$$0=\frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)}，\ f(-a)=-f(a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，①において，$b=a$ とおくと，$f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1+\{f(a)\}^2}$ となり，

$$f(a)+1=\frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}+1=\frac{\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)+1\right\}^2}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}\geqq 0$$

ここで，$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-1$ となる a の存在を仮定すると，②より，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right)=-f\left(\frac{a}{2}\right)=1$$

すると，$1+f\left(\dfrac{a}{2}\right)f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=0$ となり，条件に反する。

よって，$f(a)+1>0$ から，$f(a)>-1$ となる。

さらに，②を用いると，$f(-a)=-f(a)<1$ となり, a が任意より $f(a)<1$

以上より，$-1<f(a)<1$ である。

(2) ①の両辺を b で微分すると，

$$f'(a+b)=\frac{f'(b)\{1+f(a)f(b)\}-\{f(a)+f(b)\}f(a)f'(b)}{\{1+f(a)f(b)\}^2}$$

$$=\frac{f'(b)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(b)\}^2}\cdots\cdots\cdots③$$

③に $b=0$ を代入すると，

$$f'(a)=\frac{f'(0)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(0)\}^2}=1-\{f(a)\}^2\cdots\cdots\cdots④$$

すると, (1)から，$-1<f(x)<1$ なので，$f'(x)=1-\{f(x)\}^2>0$ となり, $x>0$ で

$$f(x)>f(0)=0$$

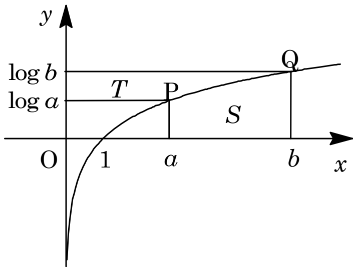
このとき，④より，$f''(x)=-2f(x)f'(x)<0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸である。

［解 説］

$f(0)=0$ が利用できるように，a と b に適当な関係を設定していくと，$f(x)$ が奇関数であることがわかります。この点を解の糸口としています。

10 ［2008 名古屋大］



$a \leqq x \leqq b$ において，曲線 $C: y=\log x$ と x 軸にはさまれた部分の面積 S は,

$$S=\int_a^b \log x\,dx=\left[\,x\log x-x\,\right]_a^b$$

$$=b\log b-a\log a-b+a$$

$\log a \leqq y \leqq \log b$ において，曲線 C と y 軸にはさまれた部分の面積 T は,

$$T=b\log b-a\log a-S=b-a$$

条件より，$S=T$ のとき，$b\log b-a\log a=2(b-a)$ となり,

$$\frac{b\log b-a\log a}{b-a}=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

以下，①を満たす $b(>a)$ が存在する $a(>1)$ の範囲を求める。

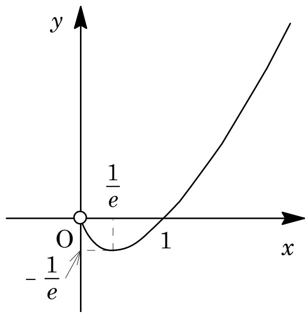
ここで，$f(x)=x\log x$ とおくと,

$$f'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸で，右図のようになる。



さて，①から，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=2\ \cdots\cdots\cdots②$

すると，②を満たす $b(>a)$ が存在する $a(>1)$ の条件は,

$f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ より,

$$\log a+1<2$$

よって，$1<a<e$ である。

［解 説］

②式を，曲線の割線の傾きとしてとらえ，接線の傾きとの関係を図形的に処理しています。

11 ［2009 神戸大］

(1)　$f(x)=\log(ax+b(1-x))-x\log a-(1-x)\log b$ に対して，

$$f'(x)=\frac{a-b}{ax+b(1-x)}-\log a+\log b\,,\quad f''(x)=-\frac{(a-b)^2}{\{ax+b(1-x)\}^2}$$

$a>b>0$ から，$0<x<1$ において $f''(x)<0$ となる。

(2)　まず，$t>0$ のとき，$g(t)=t-1-\log t$ とおくと，

$$g'(t)=1-\frac{1}{t}=\frac{t-1}{t}$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

さて，(1)より，$f'(0)=\dfrac{a-b}{b}-\log a+\log b=\dfrac{a}{b}-1-\log\dfrac{a}{b}=g\Big(\dfrac{a}{b}\Big)$

$$f'(1)=\frac{a-b}{a}-\log a+\log b=1-\frac{b}{a}+\log\frac{b}{a}=-g\Big(\frac{b}{a}\Big)$$

ここで，$a>b>0$ から，$\dfrac{a}{b}>1$，$0<\dfrac{b}{a}<1$ から，$f'(0)>0$，$f'(1)<0$

さらに，(1)から，$0<x<1$ で $f'(x)$ は単調減少であるので，$f'(c)=0$ を満たす実数 c は，$0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在することになる。

(3)　(2)より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

また，$f(0)=f(1)=0$ から，$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となり，

$$\log(ax+b(1-x))\geqq x\log a+(1-x)\log b$$

$$\log(ax+b(1-x))\geqq \log a^xb^{1-x}$$

よって，$ax+b(1-x)\geqq a^xb^{1-x}$ が成り立つ。

［解 説］

曲線 $y=\log x$ が上に凸であることを題材としています。(2)で，平均値の定理を直接的に利用しないときは，上のような解になります。

$\boxed{12}$ ［2009 東京大］

(1) $-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ とおくと，

$$f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)-\frac{x-1}{x}\log(1-x)=\frac{1}{x}\{\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)\}$$

さらに，$g(x)=\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)+\frac{x-1}{1-x}=-\frac{x}{1+x}-\log(1-x)$$

$$g''(x)=-\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		↘	0	↗	

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗	0	↗	

これより，$g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)$ は単調に増加し，$-1<x<0$ のとき $g(x)<0$，$0<x<1$ のとき $g(x)>0$ となる。

すると，$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，

$$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}g(x)>0$$

よって，$\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdots\cdots\cdots(*)$

(2) $(*)$より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$ となり，

$$(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$$

$x=-\dfrac{1}{100}$ とおくと，$0.9999^{101}<0.99$

また，$(*)$より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ となり，

$$1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$x=\dfrac{1}{100}$ とおくと，$0.99<0.9999^{100}$

以上より，$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ が成り立つ。

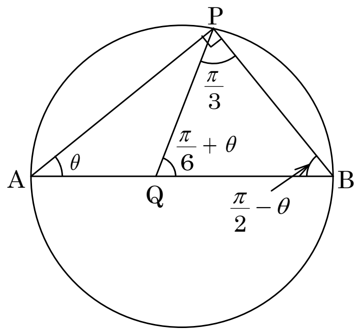
［解 説］

微分法の不等式への応用問題です。なお，(2)の式変形については，結論の不等式を $(1-10^{-4})^{1+10^2}<1-10^{-2}<(1-10^{-4})^{10^2}$ とみて方針を立てました。

13 ［2012 東北大］

(1) $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BP}=x$ に対し，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とおくと，

$$\sin\theta=x\,,\ \ \cos\theta=\sqrt{1-x^2}$$



さて，$\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ から，$\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\angle\mathrm{PQB}=\frac{\pi}{6}+\theta\,,\ \ \angle\mathrm{PBQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$\mathrm{PQ}=y$ から，$\triangle\mathrm{PQB}$ に正弦定理を適用して，

$$\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

よって，$y=\dfrac{x\cos\theta}{\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta}=\dfrac{2x\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}$

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において, (1)より，$y=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}$

さて，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ とおくと，$y=\dfrac{2}{f(\theta)}$ となり，

$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

ここで，$\sqrt{3}\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$ となる α をとると，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すなわち，$\theta=\alpha$ で, y は最大となる。

このとき，$\sqrt{3}x^3=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$ から，$3x^6=(1-x^2)^3$ となり，

$$\sqrt[3]{3}x^2=1-x^2\,,\ \ (1+\sqrt[3]{3})x^2=1$$

したがって, y が最大となる x は，$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$ である。

［解 説］

正弦定理の応用です。ただ, (2)は計算の工夫が必要です。特に，$f(\theta)$ を設定する部分が重要で, 何回か微分に詰まって考えつきます。

14　　[2013 東京工大]

$x>0$ において，$f(x)=e^x-x^e$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=e(e^{x-1}-x^{e-1})$$

ここで，$g_1(x)=e^{x-1}$，$g_2(x)=x^{e-1}$ とし，$F(x)=\log g_1(x)-\log g_2(x)$ とおくと，

$$F(x)=x-1-(e-1)\log x$$

$$F'(x)=1-\frac{e-1}{x}=\frac{x-(e-1)}{x}$$

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		↘		↗

すると，$F(x)$ の値の増減は右表のようになり，$F(1)=F(e)=0$ に注意すると，$1<e-1<e$ から，$0<x<1$ または $e<x$ のとき $F(x)>0$，$1<x<e$ のとき $F(x)<0$ となる。

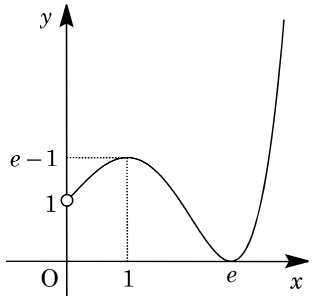
さらに，$f'(x)$ の符号と $F(x)$ の符号は一致することより，$f(x)$ の値の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$e-1$	↘	0	↗

$$\lim_{x\to+0}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(e^x-x^e)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x^e}{e^x}\right)=\infty$$

これより，$x>0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，直線 $y=k$ との共有点の個数を調べると，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数は，



$k<0$ のとき 0 個

$k=0$，$k>e-1$ のとき 1 個

$0<k\leqq1$，$k=e-1$ のとき 2 個

$1<k<e-1$ のとき 3 個

［解　説］

微分の応用問題ですが，スムーズな処理を行うために，上の解答例では，対数をとりました。なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^e}{e^x}=0$ は，証明なしで利用しています。

15 ［2013 東京大］

$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$，$g(x)=\sin x+ax$ を連立すると，$\dfrac{\cos x}{x}=\sin x+ax$ より，

$$\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}=a\,,\ \ \frac{\cos x-x\sin x}{x^2}=a$$

さて，$h(x)=\dfrac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ とおくと，$x>0$ において，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが共有点をちょうど 3 つもつ条件は，$y=h(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をちょうど 3 つもつ条件に等しい。

$$h'(x)=\frac{(-\sin x-\sin x-x\cos x)x^2-(\cos x-x\sin x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x^2\cos x-2\cos x}{x^3}=-\frac{x^2+2}{x^3}\cos x$$

ここで, n を 0 以上の整数とすると，$h'(x)=0$ の解は，$x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$h\Big(n\pi+\frac{\pi}{2}\Big)=-\frac{(-1)^n}{n\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}$$

すると，$h(x)$ の増減は下表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	∞	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\pi}$	$\searrow$	$-\frac{2}{5\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{7\pi}$	$\searrow$

これから，$h(x)$ は n が偶数のとき負の極小値をもち, その値は n の値の増加に伴って増加する。また, n が奇数のとき正の極大値をもち, その値は n の値の増加に伴って減少する。

以上より, 共有点をちょうど 3 つもつ条件は,

$$a=-\frac{2}{5\pi},\ \ \frac{2}{7\pi}<a<\frac{2}{3\pi}$$

［解 説］

定数分離によって, 共有点の個数を調べるという頻出のタイプです。なお，解答例では $y=h(x)$ のグラフは記していませんが, 下書きでは, しっかりと書いています。

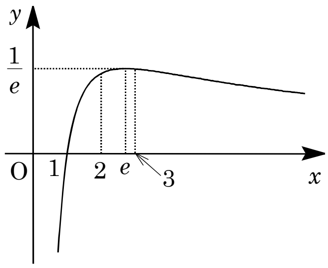
16 ［2014 熊本大］

(1) まず，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，グラフの概形は右下図である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0



これより，正の実数 a, b, c について，

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}\leqq\frac{1}{e}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}=\frac{3}{e}$$

$$\log 4-\frac{3}{e}=\frac{2e\log 2-3}{e}>\frac{2\times 2.7\times 0.6-3}{e}>0$$

よって，$\dfrac{3}{e}<\log 4$ から，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$

(2) $a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$ $(a\leqq b\leqq c\,,\ d\geqq 3)$に対して，$\log a^{bc}b^{ca}c^{ab}=\log d^{abc}$ から，

$$bc\log a+ca\log b+ab\log c=abc\log d\,,\ \frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log d$$

すると，(1)より $\log d<\log 4$ となり，d は 3 以上の整数より，$d=3$ である。

$$\frac{\log a}{a}+\frac{\log b}{b}+\frac{\log c}{c}=\log 3\quad(a\leqq b\leqq c)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，(*)を満たす 1 組の整数解として，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ がある。

ここで，$f(3)-f(2)=\dfrac{\log 3}{3}-\dfrac{\log 2}{2}=\dfrac{\log 9-\log 8}{6}>0$ なので，

$$0=f(1)<f(2)<f(3)>f(4)>f(5)>\cdots\cdots$$

すると，$\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}\leqq f(3)+f(3)+f(3)=3\cdot\dfrac{\log 3}{3}=\log 3$ となり，等号が成立する，すなわち(*)を満たす整数解は，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ のみである。

［解 説］

(2)において，1 組の整数解はすぐに目視でわかりますので，それ以外には存在しないという形式で記しています。$f(x)$ のグラフが役に立ったわけです。

17 [2014 九州大]

n を 2 以上の自然数として，n 次関数 $f_n(x)$ に対して，

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)=n!(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{n}\right)$$

すると，$f_n(1)=f_n\left(\frac{1}{2}\right)=\cdots=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=0$ となり，平均値の定理より，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c が各区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$，…，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$ において，少なくとも 1 つずつ存在する。

また，$f_n{}'(x)$ は $n-1$ 次関数より，方程式 $f_n{}'(x)=0$ の実数解は，高々 $n-1$ 個である。

よって，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c は，各区間 $\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1}$，…，$\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}<x<1$ において, 1 つずつ存在することになる。

この c を $c=c_1$，c_2，…，c_{n-1} $\left(\frac{1}{n}<c_{n-1}<\frac{1}{n-1}，\cdots，\frac{1}{3}<c_2<\frac{1}{2}，\frac{1}{2}<c_1<1\right)$ とおくと，$f_n{}'(x)$ の $n-1$ 次の係数は $n\cdot n!$ から，

$$f_n{}'(x)=n\cdot n!(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

これより，$f_n{}'(x)$ の符号は $x=c_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の前後で変化する。

以上より，$f_n(x)$ は，区間 $\frac{1}{k+1}<x<\frac{1}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ でただ 1 つの極値をとる。

［解 説］

グラフを対応させると，感覚的にはわかりますが，証明となると書きにくく，隔靴掻痒の感があります。

18 ［2015 北海道大］

(1) $C_1: y=(x-1)e^x$ ……①，$C_2: y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ ……②に対して，

①より，$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ となり，点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線 l は，

$$y-(t-1)e^t=te^t(x-t),\quad y=te^tx-(t^2-t+1)e^t \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，②③を連立すると，$\dfrac{1}{2e}x^2+a=te^tx-(t^2-t+1)e^t$

$$\frac{1}{2e}x^2-te^tx+a+(t^2-t+1)e^t=0$$

C_2 と l が接することより，$D=t^2e^{2t}-4\cdot\dfrac{1}{2e}\{a+(t^2-t+1)e^t\}=0$ となり，

$$t^2e^{2t+1}-2a-2(t^2-t+1)e^t=0,\quad a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t \cdots\cdots\cdots ④$$

(2) $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと，④より，$a=f(t)$ となり，

$$\begin{aligned} f'(t)&=te^{2t+1}+t^2e^{2t+1}-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t\\ &=(t+t^2)e^{2t+1}-(t^2+t)e^t\\ &=t(t+1)e^t(e^{t+1}-1)\end{aligned}$$

ここで，$f'(t)=0$ の解は $t=-1,\ 0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$t=0$ のとき $f(t)$ すなわち a は，極小値 $f(0)=-1$ をとる。

［解 説］

微分法の基本問題です。(1)の結論がややこしい形をしており，微分するには心が重かったのですが，杞憂に終わりました。

19 [2015 京都大]

(1) $y=e^x+1$ に対して，$y'=e^x$ となり，点 $(t,\ e^t+1)$ における接線の方程式は,

$$y-(e^t+1)=e^t(x-t),\ y=e^tx-(t-1)e^t+1\cdots\cdots\cdots①$$

①が $(a,\ 0)$ を通ることより，$e^ta-(t-1)e^t+1=0$ となり,

$$e^ta=(t-1)e^t-1,\ a=-e^{-t}+t-1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(t)=-e^{-t}+t-1$ とおくと，$f'(t)=e^{-t}+1>0$ となり,

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+t-1)=\infty,\ \lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}(-e^{-t}+t-1)=-\infty$$

よって，$f(t)$ は単調増加し，任意の実数値をとり得る。

すなわち，方程式②は任意の a に対してただ 1 つの実数解をもつことより，点 $(a,\ 0)$ を通る接線①は，ただ 1 つ存在する。

(2) 条件を②に適用すると，$a_n=-e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}-1$ となり,

$$a_{n+1}-a_n=e^{-a_{n+1}}+1>1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$a_1=1$ から，$a_n>1+(n-1)\cdot 1=n\quad(n\geqq 2)$

よって，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となるので，③より,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(e^{-a_{n+1}}+1)=1$$

［解 説］

頻出の接線の本数の問題です。(2)では，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ であることを示すのがポイントです。③の不等号に気づくかどうかだけですが。

20 [2015 東京工大]

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t^2(\cos t,\ \sin t)$

$$\frac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$$

これより，$\vec{v}=t(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$ となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=t^3(2\cos^2 t-t\cos t\sin t+2\sin^2 t+t\sin t\cos t)=2t^3$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=t^2,\ |\vec{v}|=t\sqrt{(2\cos t-t\sin t)^2+(2\sin t+t\cos t)^2}=t\sqrt{t^2+4}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

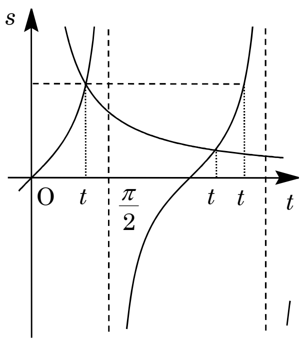
$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\frac{2t^3}{t^3\sqrt{t^2+4}}=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$$

よって，$t\to\infty$ のとき $\cos\theta(t)\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$ である。

(2) $t>0$ において，$\vec{v}$ が y 軸に平行なるのは，$\dfrac{dx}{dt}=0$ から $2\cos t-t\sin t=0$

すなわち，$2\cos t=t\sin t$ から，$\cos t\neq 0$ となり，

$$\tan t=\frac{2}{t}\cdots\cdots\cdots(*)$$



さて，(＊)の解は，$s=\tan t$ と $s=\dfrac{2}{t}$ の交点の t 座標として表せる。そして，正で最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とすると右図のようになる。

ここで，$t_3=t_1+\pi$ とおくと，$t_2<t_3$ となるので，

$$t_2-t_1<t_3-t_1=\pi$$

［解 説］

速度ベクトルが題材の基本的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，いちばん感覚的に理解できるもので記載しました。

21 ［2015 名古屋大］

(1) $f(x)=x^{-2}2^x=\dfrac{2^x}{x^2}$ に対して,

$$f'(x)=\frac{2^x\log 2\cdot x^2-2^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2^x(x\log 2-2)}{x^3}=\frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2-2}{x}$$

これより, $f'(x)>0$ となる条件は, $\dfrac{x\log 2-2}{x}>0$ すなわち $x(x\log 2-2)>0$ から, $x<0$, $\dfrac{2}{\log 2}<x$ である。

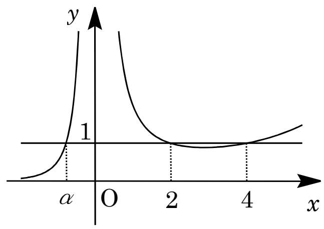
(2) $x=0$ は方程式 $2^x=x^2$ を満たさないので, この方程式は, $x^{-2}2^x=1$ すなわち $f(x)=1$ と同値である。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

さて, $f(x)$ の増減は右表のようになり,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to 0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

さらに, $f(2)=f(4)=1$ に注意して, $y=f(x)$ と $y=1$ のグラフをかくと右図のようになる。



したがって, $f(x)=1$ すなわち $2^x=x^2$ は, 相異なる 3 個の実数解 $x=\alpha$, 2, 4 をもつ。

(3) まず, 方程式 $2^x=x^2$ の解 $x=2$, 4 は有理数なので, もう 1 つの負の解 $x=\alpha$ について有理数かどうかを調べる。

そこで, α が有理数と仮定し, $\alpha=-\dfrac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数)とおくと,

$$2^{-\frac{n}{m}}=\left(-\frac{n}{m}\right)^2,\ 2^{-n}=\left(\frac{n^2}{m^2}\right)^m,\ \frac{1}{2^n}=\frac{n^{2m}}{m^{2m}}$$

m, n は互いに素より, $n^{2m}=1$ ……①, $m^{2m}=2^n$ ……②

①より $n=1$ となり, ②に代入すると $m^{2m}=2$ であるが, この式を満たす自然数 m は存在しない。これより, α は有理数でない。

以上より, 方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものは $x=2$, 4 である。

［解 説］

微分の応用に関する問題です。(2)は(1)を誘導とした解法ですが, これを無視して直接的に $y=2^x$ と $y=x^2$ のグラフを描くことによって示しても構いません。実際, $x=2$, 4 という解はこちらの方法で見つけていますので。

22 [2016 大阪大]

(1) c は正の定数，$x+y=c\ (x>0,\ y>0)$ のとき，$P=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ とおくと，

$$P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$c=x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ となり，

$$\frac{1}{xy}\geqq\frac{4}{c^2}\quad(\text{等号は}x=y=\frac{c}{2}\text{のとき成立})$$

よって，$P\geqq 1+\dfrac{4(c+1)}{c^2}=\dfrac{(c+2)^2}{c^2}=\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ となり，P は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき最小値 $\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ をとる。

(2) $x+y+z=1\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ のとき，$Q=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ とおく。

ここで，$x+y=1-z$ から $0<z<1$ となり，$1-\dfrac{4}{3z}=\dfrac{3z-4}{3z}<0$

すると, (1)の結果から,

$$Q=P\left(1-\frac{4}{3z}\right)\leqq\left(\frac{1-z+2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)=\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{3z-4}{3z}$$

なお, 等号は $x=y=\dfrac{1-z}{2}$ のとき成立する。

ここで，$f(z)=\left(\dfrac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}=\left(\dfrac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}$ とおくと，

$$f'(z)=2\cdot\frac{z-3}{z-1}\cdot\frac{2}{(z-1)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z}+\left(\frac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}$$

$$=\frac{4(z-3)}{3z(z-1)^2}\left(\frac{3z-4}{z-1}+\frac{z-3}{z}\right)=\frac{4(z-3)(4z^2-8z+3)}{3z^2(z-1)^3}$$

$$=\frac{4(z-3)(2z-1)(2z-3)}{3z^2(z-1)^3}$$

z	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		↗	$-\dfrac{125}{3}$	↘	

これより，$f(z)$ の増減は右表のようになり，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

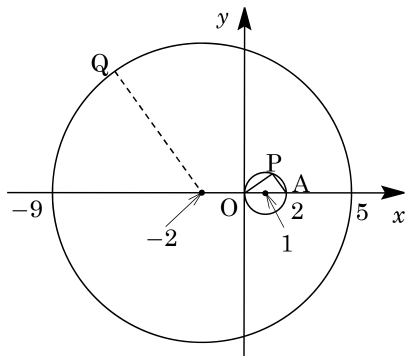
したがって，Q は $x=y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

［解 説］

条件付きの最大・最小問題です。(2)では，(1)の結果の利用するため，いったん z を固定して考えています。なお，$f'(z)$ を商の微分法を利用してまとめていくと，相当な計算量になります。

23 ［2016 名古屋大］

(1) A(2, 0) とおくと，線分 OA が円 C の直径となるので，$\angle \mathrm{APO}=\dfrac{\pi}{2}$ となる。



条件から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として $\angle \mathrm{AOP}=\theta$ より，

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}\cos\theta=2\cos\theta$$

また，P$(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\mathrm{OP}\cos\theta,\ \ y=\mathrm{OP}\sin\theta$$

よって，P$(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)$ である。

(2) 中心 $(-2,\ 0)$ で半径 7 の円 D 上の点 Q を，Q$(-2+7\cos\varphi,\ 7\sin\varphi)$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$ とおくと，△OPQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left|2\cos^2\theta\cdot 7\sin\varphi-2\sin\theta\cos\theta(-2+7\cos\varphi)\right|$$
$$=\left|7\cos^2\theta\sin\varphi-7\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+2\sin\theta\cos\theta\right|$$
$$=\cos\theta\left|7(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)+2\sin\theta\right|=\cos\theta\left|7\sin(\varphi-\theta)+2\sin\theta\right|$$

ここで，θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，$\sin\theta>0$ で $-\theta\leqq\varphi-\theta<2\pi-\theta$ より，$\varphi-\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき S は最大になる。

このとき，$\cos\varphi=-\sin\theta$，$\sin\varphi=\cos\theta$ より，Q$(-2-7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$ である。

(3) (2)より，S の最大値は，$S=\cos\theta\left|7+2\sin\theta\right|=\cos\theta(7+2\sin\theta)$

そこで，この φ と θ の関係を保ったまま，x 軸に関する対称性から点 P の y 座標が正，すなわち θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で動かすと，

$$S'=-\sin\theta(7+2\sin\theta)+\cos\theta\cdot 2\cos\theta=-7\sin\theta-2\sin^2\theta+2(1-\sin^2\theta)$$
$$=-4\sin^2\theta-7\sin\theta+2$$
$$=-(4\sin\theta-1)(\sin\theta+2)$$

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，S は増減が右表のようになり，$\theta=\alpha$ で最大となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

そして，点 P が O, A に一致する場合も考え合わせて，S の最大値は，

$$\cos\alpha(7+2\sin\alpha)=\sqrt{1-\frac{1}{16}}\left(7+2\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{15}$$

［解 説］

2 変数関数の最大・最小問題ですが，まず 1 文字を固定して考えるという丁寧な誘導がついています。なお，(2)は図形的な処理も可能です。

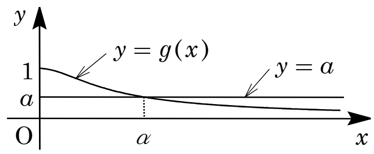
24　　[2016 金沢大]

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ に対して，$f(-x)=f(x)$ から $y=f(x)$ のグラフは y 軸対称となる。そこで，以下，$x\geqq 0$ で考える。

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-2ax=2x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\right)$$

ここで，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し，

$$1=g(0)\geqq g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$



(i)　$0<a<1$ のとき

$g(\alpha)=a$ となる α が $\alpha>0$ でただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=a$ から $1+\alpha^2=\dfrac{1}{a^2}$ となり，$f(x)$ の最大値は，

$$f(\alpha)=2\sqrt{1+\alpha^2}-a\alpha^2=\frac{2}{a}-a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=a+\frac{1}{a}$$

(ii)　$a\geqq 1$ のとき

$x\geqq 0$ において $f'(x)\leqq 0$ となり，$f(x)$ の最大値は $f(0)=2$ である。

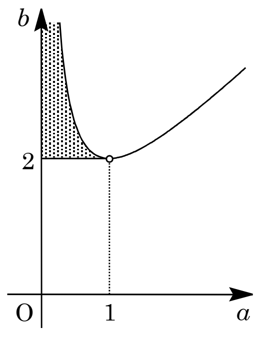
(2)　$a>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ となり，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は，$0<a<1$ のとき 4 個，$a\geqq 1$ のとき 2 個である。

$a\leqq 0$ のとき，$x\geqq 0$ において $f(x)$ は単調に増加するので，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 2 個である。

したがって，方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 4 個であり，このとき，

$$0<a<1,\ 2<b<a+\frac{1}{a}$$

そして，相加平均と相乗平均の関係から $a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$ に注意して点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解 説］

場合分けをして増減を考えるという微分の応用の典型題です。なお，(3)の領域の境界線は有名ですので，増減表などのプロセスは省略しています。

25 ［2016 東京大］

まず，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-1=x\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $f''(x)<0$ より，$f'(x)$ は単調に減少し，

$$f'(x)>\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $f(x)$ は単調に増加し，

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right\}=\log e-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e$………①

また，$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}-1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $g''(x)>0$ より，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$g'(x)<\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2+\frac{1}{x}}{2(x+1)}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $g(x)$ は単調に減少し，

$$g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}=\log(e\cdot 1)-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>e$………②

したがって，①②より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

［解 説］

微分の不等式への応用問題です。まず，証明すべき式の各辺に対数をとって，式の同値変形をした後に，差をとって微分するという定型的な処理をしています。

26　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2016 千葉大]

(1)　$x>0$ において $f(x)=x-\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$$f(x)\geqq 1>0$$

よって，$x>0$ において，$\log x<x$ ………①

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{\log x}$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

ここで，$1<a<c<b$ となる c に対して，$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$ から，

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(c),\ \frac{1}{\log b}-\frac{1}{\log a}=-\frac{b-a}{c(\log c)^2}$$

これより，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}=\dfrac{b-a}{c(\log c)^2}$ ………②

また，$0<a(\log a)^2<c(\log c)^2$ から，$0<\dfrac{1}{c(\log c)^2}<\dfrac{1}{a(\log a)^2}$ ………③

②③より，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ ………④

(3)　$x\geqq e$ において，$F(x)=\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)}-\log(\log x)-\frac{1}{2(\log x)^2}+\frac{1}{2}$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{1}{x\log(x+1)}-\frac{1}{x\log x}+\frac{1}{x(\log x)^3}$$
$$=-\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{\log(x+1)}+\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}$$

④より $\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{\log(x+1)}<\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ となり，①から $\log x<x$ なので，

$$F'(x)>-\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x(\log x)^2}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}=-\frac{\log x-x}{x^2(\log x)^3}>0$$

すると，$x\geqq e$ において，$F(x)\geqq F(e)=0-\log 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$ となり，

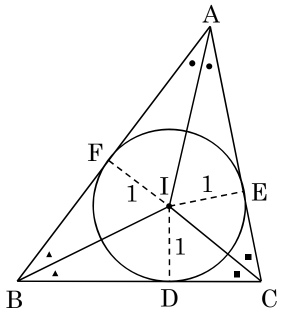
$$\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq \log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$$

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。(1)(2)の誘導で(3)の見通しは良好です。なお，(2)では，不等式の形から平均値の定理の出番です。

27 ［2017 熊本大］

(1) △ABC の半径 1 の内接円と辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とおくと，$\angle\mathrm{CAB}=2x$, $\angle\mathrm{ABC}=2y$, $\angle\mathrm{BCA}=2z$ から,



$$\mathrm{AF}=\mathrm{AE}=\frac{1}{\tan x},\ \ \mathrm{BD}=\mathrm{BF}=\frac{1}{\tan y}$$

$$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}=\frac{1}{\tan z}$$

そこで, △ABC の内心を I, その面積を S とすると,

$$S=\triangle\mathrm{ABI}+\triangle\mathrm{BCI}+\triangle\mathrm{CAI}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}\right)\cdot 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan z}+\frac{1}{\tan x}\right)\cdot 1$$
$$=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan y}+\frac{1}{\tan z}$$

(2) $z=\frac{\pi}{6}$ のとき，$x+y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ となり，(1)より，

$$S=\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\tan x}+\frac{1+\sqrt{3}\tan x}{\sqrt{3}-\tan x}+\sqrt{3}$$

ここで，$t=\tan x$ とおくと，$0<x<\frac{\pi}{3}$ から $0<t<\sqrt{3}$ となり，

$$S=\frac{1}{t}+\frac{1+\sqrt{3}t}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}-\sqrt{3}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}+\sqrt{3}=\frac{1}{t}+\frac{4}{\sqrt{3}-t}$$

$$S'=-\frac{1}{t^2}+\frac{4}{(\sqrt{3}-t)^2}=\frac{3t^2+2\sqrt{3}t-3}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}$$
$$=\frac{(3t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})}{t^2(\sqrt{3}-t)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	$3\sqrt{3}$	↗	

すると，S の増減は右表のようになり，$t=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき最小値 $3\sqrt{3}$ をとる。このとき，$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ から $x=\frac{\pi}{6}$ であり，$y=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ となる。

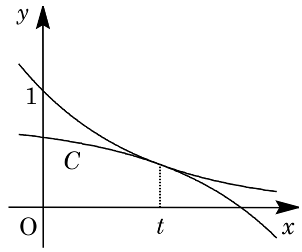
［解 説］

図形がらみの微分と増減に関する問題です。(2)では絶対不等式の利用も考えましたが, 結局はオーソドックスな微分法ということに落ち着きました。

28 ［2017 千葉大］

(1) 曲線 $y=-e^{x}$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線 C の方程式は,

$y=-e^{x-a}+b$ ………①



また, 曲線 C は曲線 $y=e^{-x}$ ……②と $x=t$ $(t\geqq 0)$ で接するので, ①より $y'=-e^{x-a}$, ②より $y'=-e^{-x}$ から,

$-e^{t-a}=-e^{-t}$ ………③

$-e^{t-a}+b=e^{-t}$ ………④

③から, $t-a=-t$ より $a=2t$ となり, この式を④に代入すると, $-e^{-t}+b=e^{-t}$ から $b=2e^{-t}$ となるので, ①に代入して,

$C: y=-e^{x-2t}+2e^{-t}$ ………⑤

(2) C と x 軸との交点は, ⑤より $-e^{x-2t}+2e^{-t}=0$ から, $e^{x-2t}=2e^{-t}$

$x-2t=\log 2e^{-t}=\log 2-t$, $x=t+\log 2$

すると, C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\int_0^{t+\log 2}(-e^{x-2t}+2e^{-t})dx=\left[-e^{x-2t}+2e^{-t}x\right]_0^{t+\log 2}$$

$$=-e^{-t+\log 2}+e^{-2t}+2(t+\log 2)e^{-t}=2(t-1+\log 2)e^{-t}+e^{-2t}$$

(3) (2)より, $S'(t)=2e^{-t}-2(t-1+\log 2)e^{-t}-2e^{-2t}=-2e^{-t}(t-2+\log 2+e^{-t})$

ここで, $f(t)=t-2+\log 2+e^{-t}$ とおくと,

$f'(t)=1-e^{-t}$

これより, $t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$
$f(t)$	$-1+\log 2$	$\nearrow$

すると, $f(0)=-1+\log 2<0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ から, $f(\alpha)=0$ となる $\alpha>0$ がただ 1 つ存在する。

この α を用いて $t\geqq 0$ における $S(t)$ の増減を調べると, 右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

これより, $S(t)$ は $t=\alpha$ のとき最大値をとる。

すなわち, $S(t)$ が最大となるような t の値はただ 1 つ存在する。

［解 説］

微積分の総合問題です。2 つの曲線の式が似ているので, 混乱しないように注意が必要です。

29 ［2017 神戸大］

(1) n を自然数とし，$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ に対して，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$f'(x)=\cos x-2nx+\frac{1}{3}x^2,\ f''(x)=-\sin x-2n+\frac{2}{3}x,\ f'''(x)=-\cos x+\frac{2}{3}$$

すると，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$ となる $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ1つ存在し，このとき $f''(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		↘		↗	

ここで，$f''(0)=-2n<0$ であり，

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-2n+\frac{\pi}{3}\leqq-1-2+\frac{\pi}{3}=\frac{1}{3}(-9+\pi)<0$$

よって，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ である。

(2) (1)より，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において $f'(x)$ は単調減少となり，

$$f'(0)=1>0,\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-n\pi+\frac{\pi^2}{12}\leqq-\pi+\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi}{12}(-12+\pi)<0$$

すると，$f'(\beta)=0$ となる $\beta\ \left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

ここで，$f(0)=0$ から $f(\beta)>0$ であり，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{n\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}\leqq1-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^3}{72}=-\frac{1}{72}\{\pi^2(18-\pi)-72\}<0$$

すると，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に $f(x)=0$ となる x がただ1つ存在する。

(3) $f(x_n)=0\ \left(0<x_n<\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$\sin x_n-nx_n{}^2+\dfrac{1}{9}x_n{}^3=0$ となり，

$$nx_n{}^2=\sin x_n+\frac{1}{9}x_n{}^3,\ x_n{}^2=\frac{\sin x_n}{n}+\frac{1}{9}\cdot\frac{x_n{}^3}{n}$$

ここで，$0<\sin x_n<1$，$0<x_n{}^3<\dfrac{\pi^3}{8}$ より，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{\sin x_n}{n}\to0$，$\dfrac{x_n{}^3}{n}\to0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n{}^2=0$ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である。

また，$nx_n=\dfrac{\sin x_n}{x_n}+\dfrac{1}{9}x_n{}^2$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=1+\frac{1}{9}\cdot0=1$$

［解 説］

微分と増減に極限が融合した典型題です。なお，スペースの関係上，$3<\pi<4$ を利用した部分については省いています。

$\boxed{30}$ [2018 名古屋大]

(1) $a>1$ のとき，$y=a^x$ ……①と $y=\log_a x$ ……②のグラフが，共有点 $(p,\ q)$ をもつとすると，①②から，$p>0$，$q>0$ で，

$$q=a^p \text{ ………③},\quad q=\log_a p \text{ ………④}$$

④より，$p=a^q$ となり，③と合わせて，$\dfrac{q}{p}=a^{p-q}$ ………⑤

(i) $p>q$ のとき $0<\dfrac{q}{p}<1$ で $a^{p-q}>1$ より，⑤は成立しない。

(ii) $p<q$ のとき $\dfrac{q}{p}>1$ で $a^{p-q}<1$ より，⑤は成立しない。

(iii) $p=q$ のとき $\dfrac{q}{p}=1$ で $a^{p-q}=1$ より，⑤は成立する。

(i)〜(iii)より，①と②のグラフが共有点をもつとき，それは直線 $y=x$ 上にある。

(2) (1)より，①と②のグラフが共有点は，②と直線 $y=x$ の共有点なので，

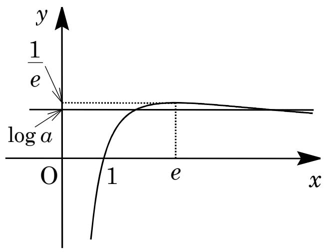
$$x=\log_a x,\quad x=\frac{\log x}{\log a},\quad \log a=\frac{\log x}{x} \text{ ………⑥}$$

さて，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f(x)=\log a$ の解が①と②のグラフが共有点の x 座標に対応し，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになる。さらに，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ から，$y=f(x)$ のグラフは右図の曲線である。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\dfrac{1}{e}$	↘



ここで，$a>1$ から $\log a>0$ に注意すると，⑥の解は 2 個以下，すなわち①と②のグラフの共有点は 2 個以下である。

(3) ①と②のグラフの共有点が 1 個であるとき，(2)より，$x=e$ となり，共有点の座標は $(e,\ e)$ である。また，このとき $\log a=\dfrac{1}{e}$ より，$a=e^{\frac{1}{e}}$ となる。

［解 説］

微分の方程式への応用問題です。(1)と(2)は，題意を考えると，グラフから明らかというわけにはいきません。また，(2)では $y=\log_a x$ と $y=x$ の組合せで処理しましたが，$y=a^x$ と $y=x$ を組合せでも構いません。対数は微分と相性良しと思い，前者を選択しただけですので。

31 [2018 大阪大]

(1) まず，$f(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\ (x>0)$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

これより，$f(x)>f(0)=0$ となり，$\log(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$ ………①

次に，$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}-\log(1+x)\ (x>0)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}\Big(\sqrt{1+x}-\frac{x}{2\sqrt{1+x}}\Big)-\frac{1}{1+x}=\frac{2+x}{2(1+x)\sqrt{1+x}}-\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{2+x-2\sqrt{1+x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{4+4x+x^2}-\sqrt{4+4x}}{2(1+x)\sqrt{1+x}}>0$$

これより，$g(x)>g(0)=0$ となり，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}>\log(1+x)$ ………②

①②から，$x>0$ で，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ ………③

(2) $y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ ……④に対して，

$$y'=-\frac{1}{(1+x)\{\log(1+x)\}^2}+\frac{1}{x^2}=-\frac{x^2-(1+x)\{\log(1+x)\}^2}{x^2(1+x)\{\log(1+x)\}^2}$$

②より，$\dfrac{x^2}{1+x}>\{\log(1+x)\}^2$ すなわち $x^2>(1+x)\{\log(1+x)\}^2$ となり，$y'<0$ から，④は $x>0$ で単調に減少する。

ここで，$x\to\infty$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to 0$ である。

また，$0<x<2$ において，$x-\dfrac{x^2}{2}=\dfrac{x(2-x)}{2}>0$ となるので，③から，

$$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}<\frac{2}{x(2-x)},\quad \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}<\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{2-(2-x)}{x(2-x)}$$

すると，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{2-(2-x)}{x(2-x)}=\dfrac{1}{2-x}\to\dfrac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}\to\frac{1}{2}$$

よって，$x\to+0$ のとき，$y=\dfrac{1}{\log(1+x)}-\dfrac{1}{x}\to\dfrac{1}{2}$ となる。

以上より，$x>0$ で，④のとり得る範囲は，$0<y<\dfrac{1}{2}$ である。

［解 説］

微分の応用と関数の極限に関する基本的な問題です。