２０１９ 入試対策
２次数学アーカイブ

積分法

理系

２００１－２０１８

外林康治 編著

電送数学舎

積 分 法

【問題一覧】

1　$a>0,\ t>0$ に対して定積分 $S(a,\ t)=\int_0^a\left|e^{-x}-\frac{1}{t}\right|dx$ を考える。

(1)　a を固定したとき, t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2)　$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。　［2001 東京工大］

2　$f(t)$ を連続関数, x を実数として, 関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x)=\int_0^1|f(t)-x|dt$$

(1)　$f(t)=e^t$ のとき，関数 $g(x)$ の増減を調べ，$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$e=2.71828\cdots$は自然対数の底である。

(2)　$f(t)$ は微分可能な単調増加関数で，その逆関数も微分可能とし，$a=f\left(\frac{1}{2}\right)$とおく。このとき，$g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ。　［2001 岡山大］

3　次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin nx|dx$$

［2001 京都大］

4　$-1<a<1$ とする。

(1)　積分 $\int_0^a\frac{1}{1-x^2}dx$ を求めよ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$のとき，次の等式を示せ。

$$\int_0^a\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

(3)　次の等式を示せ。

$$\log\frac{1+a}{1-a}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

［2001 北海道大］

5　関数 $f(x)=4\cos^2x-8\cos x+3$ を考える。n , k を自然数とし

$$g_n(k)=f\left(\frac{\pi}{3n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n\geqq 2$ とする。

(1)　n を固定する。$2\leqq k\leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1)\geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。また, k が $1\leqq k\leqq 3n$ の範囲を動くとき，$g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2)　(1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}$ を求めよ。

［2001 大阪大］

6 n を 2 以上の整数とし，$I(x)=\int_0^x \sin t\sin nt\,dt$ $(x \geqq 0)$ と定める。

(1) $n=2$ のとき，$I(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $I(x)$ の最大値が $\dfrac{n}{n^2-1}$ であるならば, n は偶数であることを証明せよ。

[2002 千葉大]

7 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x, y に対して，不等式 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a, b は実数で $a<b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で，$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a, b は実数で $a<b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。

[2002 九州大]

8 a は定数とし, n は 2 以上の整数とする。関数 $f(x)=ax^n\log x - ax$ $(x>0)$ の最小値が -1 のとき，定積分 $\int_1^e f(x)\,dx$ の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

[2003 千葉大]

9 n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 x_0，x_1，…，x_n と等比数列 y_0，y_1，…，y_n が，$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$，$1=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=2$ を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$ を次で定める。

$$P(n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad Q(n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$R(n)=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},\quad S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$$

このとき極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}Q(n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}R(n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}S(n)$ をそれぞれ求めよ。

[2004 東北大]

10 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx$ とおく。ただし，$0!=1$ とする。

(1) I_0 の値を求め，$n=1,\ 2,\ \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。 [2004 九州大]

11 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$，$g(x)$ を連続な偶関数，m を正の整数とするとき，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx=m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$$

を証明せよ。

(2) 正の整数 $m,\ n$ が $m\pi\leqq n<(m+1)\pi$ を満たしているとき，

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx\leqq\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx\leqq\frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

を証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ を求めよ。 [2004 東京工大]

12 多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

を満たすとする。

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^2 f_n(x)dx$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^2 f_n(x)dx$ の値を求めよ。 [2004 名古屋大]

13　e を自然対数の底とし，数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n=\int_1^e(\log x)^n dx \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1)　$n\geqq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。

$$a_n=(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1})$$

(2)　$n\geqq 1$ に対し，$a_n>a_{n+1}>0$ となることを示せ。

(3)　$n\geqq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n}<\frac{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}(e-2)$$

［2005　東京工大］

14　$f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1)　自然数 $n,\ m$ に対し，$\displaystyle\int_0^n t^m dt\leqq\sum_{k=1}^n k^m\leqq\int_0^n(t+1)^m dt$ を示せ。

(2)　$f(x)$ の次数を r とするとき，次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^n f(k)=\frac{1}{r+1}$$

(3)　すべての自然数 n に対して $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(k)=\frac{1}{2}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

［2005　北海道大］

15　$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_8^{27}g(x)dx$ を求めよ。

［2006　東京大］

16　以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<a$ を満たす実数 $x,\ a$ に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2)　(1)を利用して，次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。

［2007　東京大］

17 $a>0$ に対し $I_0(a)=\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx$， $I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。

(1) $\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式 $I_n(a)=\dfrac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(3) 自然数 n に対して，$\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。 [2007 東北大]

18 e は自然対数の底とする。$t>e$ において関数 $f(t)$，$g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}dx,\quad g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx$$

(1) $f(t)-g(t)$ を t の 1 次式で表せ。

(2) $1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\lim_{t\to\infty} g(t)=0$ を示せ。

(3) $\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 $a,\ b$ を求めよ。 [2008 筑波大]

19 次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式 $\dfrac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\leqq\dfrac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。 [2008 広島大]

20 自然数 n に対して，$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}dx$ とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n で表せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。 [2009 北海道大]

21 曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ における接線を l とし，点 $\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y=e^x$ の 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α，β (ただし $\alpha<\beta$) とする。直線 $x=\alpha$ と直線 l の交点を P'，直線 $x=\beta$ と直線 l の交点を Q' とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 $\mathrm{PP'Q'Q}$ の面積 S を α，β で表せ。

(2) 直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α，β の多項式で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。

(4) $\alpha+\beta>-1$ であることを示せ。 ［2009 広島大］

22 $f(x)$ を整式で表される関数とし，$g(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt$ とおく。任意の実数 x について，$x\left(f(x)-1\right)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ が成り立つとする。

(1) $xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。

(3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。 ［2009 筑波大］

23 関数 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 ［2010 熊本大］

24 (1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

［2010 東京大］

25 自然数 n に対し，$S_n=\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}dx$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。 $\left|S_n-\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx\right| \leqq \frac{1}{n+1}$

(2) T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ。 ［2011 東京医歯大］

26 曲線 $y=\log x$ の接線はつねにこの曲線の上側にあることを利用して，次の問いに答えよ。以下, k は自然数とする。

(1) 点 $\mathrm{A}_k(k,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線と曲線 $y=\log x$ との交点を $\mathrm{A}_k{}'$ とし，$\mathrm{A}_k{}'$ におけるこの曲線の接線を l_k とする。また，$k\geqq 2$ のとき，$\mathrm{B}_k\left(k-\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{C}_k\left(k+\frac{1}{2},\ 0\right)$を通り x 軸に垂直な直線と接線 l_k との交点をそれぞれ $\mathrm{B}_k{}'$，$\mathrm{C}_k{}'$ とする。四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積を求めよ。

(2) 次の 2 つの値の大小を比較せよ。

(ア) $\log k$ と $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x\,dx$ （ただし，$k\geqq 2$）

(イ) $\frac{\log k+\log(k+1)}{2}$ と $\int_k^{k+1} \log x\,dx$ （ただし，$k\geqq 1$）

(3) $a_n=\log(n!)-\frac{1}{2}\log n$ とおくと，2 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx < a_n < \int_1^n \log x\,dx$$

(4) 2 以上の自然数 n について

$$U_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right),\ \ V_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1$$

とおくとき, 次の不等式を示せ。

$$U_n<\log(n!)<V_n$$

［2011 長崎大］

27　n を正の整数とする。数列$\{a_k\}$を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\ a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1)　a_2 および a_3 を求めよ。

(2)　一般項 a_k を求めよ。

(3)　$b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。　　[2012 東京工大]

28　微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 $x,\ y$ に対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに $f'(0)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3)　定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。　　[2013 新潟大]

29　$n,\ m$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2)　次の式 $I_{2n+1,\,2m+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3)　次の式 $\frac{n!m!}{(n+m+1)!}=\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\frac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。　　[2014 千葉大]

30 自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して，不等式 $\left|\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\leqq\frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。 [2014 新潟大]

31 r を正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を r を用いて表せ。

(4) (3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)$ を求めよ。 [2015 熊本大]

32 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2},\ f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt\quad(n\text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)dt\quad(n\text{ が 3 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3) $0\leqq x\leqq1$ のとき，次の不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。 [2015 新潟大]

33 n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ \ g(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，$p,\ q$ を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ \ h(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

［2015 東京大］

34 $a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

［2016 北海道大］

35 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

［2016 信州大］

36 a, b, c を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos bx\,dx\ ,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}8\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$

［2017 東北大］

37 連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)\,dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t)\,dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t)\,dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2) $g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3) $f(x)$ を求めよ。 ［2017 東京医歯大］

38 次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 t に対し，$1+t \leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$ の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。 $\displaystyle\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x}\,dx \leqq 2-\sqrt{2}$ ［2018 広島大］

39 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t}\,dt \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

について，以下の問いに答えよ。ただし，$0!=1$ と定める。また，関数 $y=t^0$ は，関数 $y=1$ を意味する。

(1) 部分積分を利用して，$F_2(x)$ を $F_1(x)$ を用いて表せ。同様に，$F_1(x)$ を $F_0(x)$ を用いて表せ。

(2) $F_0(x)$ を計算し，積分を含まない式として表せ。その結果を利用して，$F_1(x)$ を積分を含まない式として表せ。さらに，$F_2(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(3) $n \geqq 1$ のとき，$F_n(x)$ を $F_{n-1}(x)$ を用いて表せ。さらに，$n \geqq 0$ のとき，$F_n(x)$ を積分を含まない式として表せ。

(4) $p(x)=x^n$ とおくとき，k 次導関数 $p^{(k)}(x)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。そして，

$$\int_0^x t^n e^{-t}\,dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$p^{(0)}(x)=p(x)$ と定める。 ［2018 長崎大］

40　自然数 n に対し，定積分 $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(2)　$0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

(4)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

［2018 名古屋大］

41　自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2-x+1} - \sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f_n(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2)　$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right| \leqq \dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

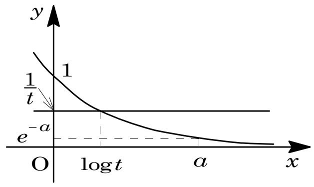
(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$ の和を求めよ。　［2018 新潟大］

積 分 法

【解答例と解説】

1 [2001 東京工大]

(1) (i) $\dfrac{1}{t} \geqq 1\ (0 < t \leqq 1)$ のとき



$$S(a,\ t) = \int_0^a -\Big(e^{-x} - \frac{1}{t}\Big)dx = \Big[\, e^{-x} + \frac{1}{t}x \,\Big]_0^a$$
$$= e^{-a} - 1 + \frac{a}{t}$$

(ii) $e^{-a} \leqq \dfrac{1}{t} < 1\ (1 < t \leqq e^a)$ のとき

$e^{-x} = \dfrac{1}{t}$ の解は，$x = \log t$ より，

$$S(a,\ t) = \int_0^{\log t} \Big(e^{-x} - \frac{1}{t}\Big)dx + \int_{\log t}^{a} -\Big(e^{-x} - \frac{1}{t}\Big)dx$$
$$= \Big[-e^{-x} - \frac{1}{t}x\Big]_0^{\log t} + \Big[e^{-x} + \frac{1}{t}x\Big]_{\log t}^{a} = -\frac{2}{t}\log t + \frac{a-2}{t} + e^{-a} + 1$$

(iii) $\dfrac{1}{t} < e^{-a}\ (t > e^a)$ のとき

$$S(a,\ t) = \int_0^a \Big(e^{-x} - \frac{1}{t}\Big)dx = -e^{-a} + 1 - \frac{a}{t}$$

すると，$0 < t \leqq 1$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = -\dfrac{a}{t^2} < 0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に減少し，$t > e^a$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = \dfrac{a}{t^2} > 0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に増加する。

また，$1 < t \leqq e^a$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = \dfrac{2}{t^2}\log t - \dfrac{2}{t^2} - \dfrac{a-2}{t^2} = \dfrac{2\log t - a}{t^2}$ となる。このとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = 0$ の解は，$t = e^{\frac{a}{2}}$ であり，$S(a,\ t)$ の増減は右表のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	e^a
$\dfrac{dS(a,\ t)}{dt}$		$-$	0	$+$	
$S(a,\ t)$		↘		↗	

さらに，$S(a,\ t)$ は $t = 1,\ t = e^a$ において連続なので，$t = e^{\frac{a}{2}}$ で最小値をとり，

$$m(a) = S\Big(a,\ e^{\frac{a}{2}}\Big) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1$$

(2) (1)より，$\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a\to 0}\frac{-2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1}{a^2} = \lim_{a\to 0}\Big(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\Big)^2$

ここで，$-\dfrac{a}{2} = b$ とおくと，$a \to 0$ のとき $b \to 0$ となり，

$$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2} = \frac{1}{4}\lim_{b\to 0}\Big(\frac{e^b - 1}{b}\Big)^2 = \frac{1}{4}$$

［解 説］

積分計算についての理解を問う問題です。(2)の極限は e の定義を適用するものです。

$\boxed{2}$　　[2001 岡山大]

(1)　$f(t)=e^t$ のとき，$g(x)=\int_0^1\left|e^t-x\right|dt$ となる。

(i)　$x<1$ のとき　$g(x)=\int_0^1(e^t-x)\,dt=\left[e^t-xt\right]_0^1=-x+e-1$

このとき，関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii)　$1\leqq x\leqq e$ のとき

$$g(x)=\int_0^{\log x}-(e^t-x)\,dt+\int_{\log x}^1(e^t-x)\,dt=-\left[e^t-xt\right]_0^{\log x}+\left[e^t-xt\right]_{\log x}^1$$

$$=-(x-1)+x\log x+(e-x)-x(1-\log x)=2x\log x-3x+e+1$$

$g'(x)=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}-3=2\log x-1$ となり，関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

極小値は，$g(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1=(\sqrt{e}-1)^2$ である。

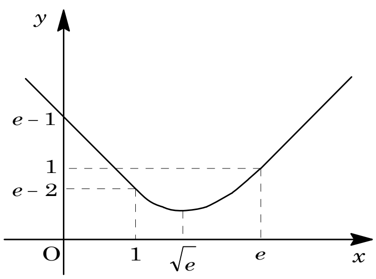
x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$e-2$	$\searrow$		$\nearrow$	1

(iii)　$x>e$ のとき

$$g(x)=\int_0^1-(e^t-x)\,dt=x-e+1$$

このとき，関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図。



(2)　条件より $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，また $b=f(0)$，$c=f(1)$ とおく。すると，$f(t)$ は単調増加関数なので，$b<a<c$ となる。

さらに，$F'(t)=f(t)$ とおくと，

(i)　$x<b$ のとき　$g(x)=\int_0^1\{f(t)-x\}\,dt=\left[F(t)-xt\right]_0^1=F(1)-F(0)-x$

このとき，関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii)　$b\leqq x\leqq c$ のとき

$f(u)=x$，すなわち $u=f^{-1}(x)$ とおくと，

$$g(x)=\int_0^u-\{f(t)-x\}\,dt+\int_u^1\{f(t)-x\}\,dt=-\left[F(t)-xt\right]_0^u+\left[F(t)-xt\right]_u^1$$

$$=-2F(u)+2xu-x+F(0)+F(1)$$

$$g'(x)=-2F'(u)\frac{du}{dx}+2u+2x\frac{du}{dx}-1=-2f(u)\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1$$

$$=-2f(f^{-1}(x))\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1=-2x\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1$$

$$=2u-1=2f^{-1}(x)-1$$

条件より $a = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ なので，$f^{-1}(a) = \dfrac{1}{2}$ である。

さて，$f(t)$ が単調増加関数なので，$f^{-1}(x)$ も単調増加関数となり，$g'(x) = 0$ すなわち $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}$ の解は $x = a$ となる。

さらに $g'(x)$ の符号は，$x = a$ の前後で負から正に変わる。

すると，関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	b	$\cdots$	a	$\cdots$	c
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(iii) $x > c$ のとき　$g(x) = \int_0^1 -\{f(t) - x\}dt = -F(1) + F(0) + x$

このとき，関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$g(x)$ はすべての x に対して連続なので，$x = a$ で最小値をとる。

［解 説］

(2)は(1)を一般化したもので，同じように論理を展開することができます。しかし，逆関数の扱い方など，かなり難易度はアップします。

3 ［2001 京都大］

$nx = t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = n$ より，

$$I_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|dx = \int_0^{n^2\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\frac{1}{n}dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}\sin t\,dt\right|$$

ここで，$\left(e^{-\frac{t}{n}}\sin t\right)' = -\dfrac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\sin t + e^{-\frac{t}{n}}\cos t \cdots\cdots\cdots①$

$$\left(e^{-\frac{t}{n}}\cos t\right)' = -\frac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\cos t - e^{-\frac{t}{n}}\sin t \cdots\cdots\cdots②$$

①＋②×n より，$\left(e^{-\frac{t}{n}}\sin t + ne^{-\frac{t}{n}}\cos t\right)' = -\dfrac{n^2+1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\sin t$

$$e^{-\frac{t}{n}}\sin t = -\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{t}{n}}(\sin t + n\cos t)\right\}'$$

すると，$\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}\sin t\,dt = -\frac{n}{n^2+1}\left[e^{-\frac{t}{n}}(\sin t + n\cos t)\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$

$$= -\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k}{n}\pi}n\cos k\pi - e^{-\frac{k-1}{n}\pi}n\cos(k-1)\pi\right\}$$

$$= -\frac{n^2}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k}{n}\pi}(-1)^k - e^{-\frac{k-1}{n}\pi}(-1)^{k-1}\right\} = -\frac{n^2}{n^2+1}(-1)^k(1+e^{\frac{\pi}{n}})e^{-\frac{k}{n}\pi}$$

よって，$\displaystyle I_n = \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k}{n}\pi} = \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}(1-e^{-\frac{\pi}{n}\cdot n^2})}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$

$$= \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})(1-e^{-n\pi})\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|dx = \lim_{n\to\infty}I_n = \frac{1}{\pi}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

［解 説］

積分と数列の和に関する超頻出問題です。正確な計算力がすべてです。

$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2001 北海道大］

(1)　$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^a\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[-\log|1-x|+\log|1+x|\Big]_0^a$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^a = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$　$(-1<a<1$ より$)$

(2)　$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \int_0^a \frac{1-1+x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx - \int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}dx$

ここで, (1)より，$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$

また，$\displaystyle\int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}dx = \int_0^a (1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n})\,dx$

$\displaystyle= \left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^a$

$\displaystyle= a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\cdots+\frac{a^{2n+1}}{2n+1}$

よって，$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$

(3)　(i)　$0\leqq a<1$ のとき　$0\leqq x\leqq a$ において，$\displaystyle 0\leqq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\leqq \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$

$\displaystyle 0\leqq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \leqq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}dx = \frac{1}{1-a^2}\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^a = \frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$

よって, $n\to\infty$のとき，$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

(ii)　$-1<a<0$ のとき　$a\leqq x\leqq 0$ において，$\displaystyle 0\leqq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\leqq \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$

$\displaystyle 0\leqq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \leqq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}dx = \frac{1}{1-a^2}\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_a^0 = -\frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$

よって, $n\to\infty$のとき，$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = -\int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

(i)(ii)より，$-1<a<1$ のとき, $n\to\infty$とすると，$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

すると, (2)より，$\displaystyle\log\frac{1+a}{1-a} - 2\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$ なので,

$$\log\frac{1+a}{1-a} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

［解　説］

無限級数の値を積分を用いて求めるという頻出題です。パズルのような誘導がついているおもしろい問題です。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［2001 大阪大］

(1)　$g_n(k-1) \geqq g_n(k)$ より，$g_n(k)-g_n(k-1) \leqq 0$ なので，$f\left(\dfrac{k\pi}{3n}\right) \leqq 0$ ………①

さて，$f(x) = 4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = (2\cos x - 3)(2\cos x - 1)$

$f(x) \leqq 0$ とすると，$\cos x \geqq \dfrac{1}{2}$ なので，①より $\cos\dfrac{k\pi}{3n}x \geqq \dfrac{1}{2}$ ………②

$2 \leqq k \leqq 3n$ から，$\dfrac{2\pi}{3n} \leqq \dfrac{k\pi}{3n} \leqq \pi$ となり，②を満たすのは，$\dfrac{2\pi}{3n} \leqq \dfrac{k\pi}{3n} \leqq \dfrac{1}{3}\pi$

よって, $2 \leqq k \leqq n$ となり，求める k は，$k = 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n$

すると，$g_n(k-1) > g_n(k)$ となるのは $2 \leqq k \leqq n-1$，また $g_n(k-1) = g_n(k)$ となるのは $k = n$，さらに $g_n(k-1) < g_n(k)$ となるのは $n+1 \leqq k \leqq 3n$ なので,

$$g_n(1) > g_n(2) > \cdots > g_n(n-1) = g_n(n) < g_n(n+1) < \cdots < g_n(3n)$$

よって，$g_n(k)$ が最小となる k は，$n-1$ または n である。

(2)　(1)より，$G_n = g_n(n) = f\left(\dfrac{\pi}{3n}\right) + f\left(\dfrac{2\pi}{3n}\right) + \cdots\cdots + f\left(\dfrac{n\pi}{3n}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{\pi}{3n}k\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\pi}{3n}k\right) = \frac{3}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{\pi}{3n}k\right) = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

$$= \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2 x - 8\cos x + 3)\,dx = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\cos 2x - 8\cos x + 5)\,dx$$

$$= \frac{3}{\pi}\Big[\sin 2x - 8\sin x + 5x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} + \frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{21\sqrt{3}}{2\pi} + 5$$

［解　説］

(1)は階差数列を用いた最大・最小問題, (2)は区分求積法による極限計算となっています。一見, 畑違いの分野が 1 つの問題にうまく収まっています。

$\boxed{6}$ ［2002 千葉大］

(1) $n=2$ のとき，$I(x)=\int_0^x \sin t\sin 2t\,dt=\int_0^x -\frac{1}{2}(\cos 3t-\cos t)\,dt$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\Big]_0^x=-\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x$$

$$I'(x)=-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos x)=\sin 2x\sin x$$

$I(x)$ は周期 2π の周期関数なので，$0\leqq x\leqq 2\pi$ で考えても一般性は失われない。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$I'(x)$	0	＋	0	－	0	－	0	＋	0
$I(x)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0

したがって，右表より，最大値は $I\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ となる。

(2) $I(x)=\int_0^x \sin t\sin nt\,dt=\int_0^x -\frac{1}{2}\{\cos(n+1)t-\cos(n-1)t\}dt$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)t-\frac{1}{n-1}\sin(n-1)t\Big]_0^x$$

$$=-\frac{1}{2(n+1)}\sin(n+1)x+\frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x$$

$-1\leqq\sin(n+1)x\leqq 1$，$-1\leqq\sin(n-1)x\leqq 1$ より，

$$I(x)\leqq\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{n-1+n+1}{2(n+1)(n-1)}=\frac{n}{n^2-1}\cdots\cdots\cdots①$$

これより，$I(x)$ の最大値が $\frac{n}{n^2-1}$ であるのは，①の等号が成立するときなので，

$\sin(n+1)x=-1\cdots\cdots②$，$\sin(n-1)x=1\cdots\cdots③$

②より, m を 0 以上の整数として，$(n+1)x=2m\pi+\frac{3}{2}\pi\cdots\cdots\cdots④$

③より, l を 0 以上の整数として，$(n-1)x=2l\pi+\frac{1}{2}\pi\cdots\cdots\cdots⑤$

④＋⑤より，$2nx=2m\pi+2l\pi+2\pi$，$nx=(m+l+1)\pi\cdots\cdots\cdots⑥$

④－⑤より，$2x=2m\pi-2l\pi+\pi$，$x=\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\pi\cdots\cdots\cdots⑦$

⑥⑦より，$n\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\pi=(m+l+1)\pi$，$\frac{1}{2}n=(m+l+1)-n(m-l)$

以上より, l, m, n は整数なので, n は偶数となる。

［解 説］

(2)でも，(1)と同じように微分して増減表と考えました。ところが，それを実行するのは複雑そうに思えましたので，見方を変えたところ，あっさり結論が導けました。おもしろい問題です。

7 ［2002 九州大］

(1) $x>0,\ y>0$ に対して，$t=\dfrac{x}{y}>0$ とおくと，

$$x\log x-x\log y-x+y\geqq 0 \iff \frac{x}{y}\log\frac{x}{y}-\frac{x}{y}+1\geqq 0 \iff t\log t-t+1\geqq 0$$

ここで，$h(t)=t\log t-t+1$ とおくと，

$$h'(t)=\log t+t\cdot\frac{1}{t}-1=\log t$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$		↘	0	↗

右表より，$t>0$ のとき，$h(t)\geqq 0$ となる。

よって，$x\log x-x\log y-x+y\geqq 0$ ………①

(2) 区間$[a,\ b]$において，$f(x)>0$，$g(x)>0$なので，①より，

$$f(x)\log f(x)-f(x)\log g(x)-f(x)+g(x)\geqq 0$$

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\log g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ ……②なので，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq\int_a^b f(x)\log g(x)\,dx \quad\text{………③}$$

(3) $M=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)M=\int_a^b M\,dx$ ………④

これより，$g(x)=M$ とおくと，②をみたすので，③より，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq\int_a^b f(x)\log M\,dx=\log M\int_a^b f(x)\,dx$$

④の関係から，$\displaystyle\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq(b-a)M\log M$ となり，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq M\log M$$

［解 説］

(1)から(2)へはスムーズに流れ，(2)から(3)へはちょっと引っかかるという，うまい誘導がついています。

8 ［2003 千葉大］

$f(x)=ax^n\log x-ax=a(x^n\log x-x)$ に対して,

$$f'(x)=a(nx^{n-1}\log x+x^{n-1}-1)=a\{x^{n-1}(n\log x+1)-1\}$$

ここで, $g(x)=x^{n-1}(n\log x+1)-1$ とおくと, $f'(x)=ag(x)$ となり,

$$g'(x)=(n-1)x^{n-2}(n\log x+1)+nx^{n-2}=x^{n-2}\{n(n-1)\log x+2n-1\}$$

$x>0$ において, $g'(x)=0$ の解は, $n\geqq 2$ より,

$$\log x=-\frac{2n-1}{n(n-1)},\quad x=e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$$

この値を $x=\alpha$ とおくと, $g(x)$ の増減は右表のようになり, $\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=-1$, $g(1)=0$ に注意すると, $0<x<1$ のとき $g(x)<0$, $x>1$ のとき $g(x)>0$ である。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘		↗

(i) $a>0$ のとき

$f(x)$ の増減は, 右表のようになり, 最小値は $f(1)=-a$ となる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-a$	↗

条件から, $-a=-1$, $a=1$ となり, $a>0$ も満たす。

(ii) $a=0$ のとき

$f(x)=0$ より, 最小値が -1 にはならない。

(iii) $a<0$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ より, 最小値は存在しない。

(i)(ii)(iii)より, $f(x)=x^n\log x-x$ である。

このとき, $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e(x^n\log x-x)\,dx$

$$=\frac{1}{n+1}\Big[x^{n+1}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\,dx-\frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_1^e$$

$$=\frac{1}{n+1}e^{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big[x^{n+1}\Big]_1^e-\frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$=\frac{n}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

［解 説］

$g(1)=0$ は式の形から見つけます。ただ, $g(x)$ の増減について, チェックが少々面倒です。なお, $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^n\log x=0$ は証明なしで用いています。

$\boxed{9}$ ［2004 東北大］

等差数列 x_0，x_1，…，x_n の公差は $\dfrac{1}{n}$，等比数列 y_0，y_1，…，y_n の公比は $2^{\frac{1}{n}}$ より，

$$x_k = 1 + \frac{k}{n},\quad y_k = 2^{\frac{k}{n}}$$

すると，$P(n) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ より，

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \int_0^1 (1+x)\,dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$R(n) = \dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$ より，

$$\lim_{n\to\infty} R(n) = \int_0^1 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}$$

また，$Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ より，

$$\log Q(n) = \frac{1}{n}\log(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\log Q(n) = \int_0^1 \log(1+x)\,dx = \left[(1+x)\log(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 dx$$

$$= 2\log 2 - 1 = \log\frac{4}{e}$$

ここで，$f(x) = \log x$ は $x>0$ において連続であることより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n) = \frac{4}{e}$

同様にして，$S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}$ より，

$$\log S(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log 2^{\frac{k}{n}} = \frac{\log 2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{\log 2}{2n}(n+1)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log S(n) = \frac{\log 2}{2} = \log\sqrt{2}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S(n) = \sqrt{2}$

［解 説］

単純な構図の問題ですが，4 つの極限とも，きれいな数値として求まります。いろいろな解法がありますが，最初に考えたものを記しました。

10　　[2004 九州大]

(1)　$I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0e^x dx=\int_0^2 e^x dx=\left[e^x\right]_0^2=e^2-1$

また，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx=\dfrac{(-1)^n}{n!}\left\{\left[x^n e^x\right]_0^2-\int_0^2 nx^{n-1}e^x dx\right\}$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}2^n e^2-\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1}e^x dx=\frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!}+I_{n-1}$$

すると，$I_1=\dfrac{-2e^2}{1!}+(e^2-1)=-e^2-1$，$I_2=\dfrac{4e^2}{2!}+(-e^2-1)=e^2-1$ より，

$$I_3=\frac{-8e^2}{3!}+(e^2-1)=-\frac{1}{3}e^2-1$$

(2)　$0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ より，

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^2 dx=\frac{e^2}{n!}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^2=\frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!}$$

ここで, $n\geqq 2$ のとき,

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{2^{n-1}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+1)}\leqq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$n=1$ のときも $\dfrac{2^2}{2!}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ となり, $(*)$は成立している。

よって，$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3)　(1)から，$I_n-I_{n-1}=\dfrac{(-1)^n 2^n e^2}{n!}$ より，$\dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}=\dfrac{1}{e^2}(I_n-I_{n-1})$　$(n\geqq 1)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k-1})=\frac{1}{e^2}(I_n-I_0)=\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}=1+\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)=\frac{1}{e^2}(I_n+1)$

さて, (2)より，$|I_n|=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$n\to\infty$ のとき，$|I_n|\to 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}$$

［解　説］

(3)が本題ですが，それを解くのに無理が生じないように，(1)と(2)が設けられています。配慮の深い問題です。

11　　[2004 東京工大]

(1)　まず，積分区間$0 \leqq x \leqq m\pi$をm等分して，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$t = x-(k-1)\pi$とおくと，

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi} f\big(\sin(t+(k-1)\pi)\big)g\big(\cos(t+(k-1)\pi)\big)dt$$

さて，$\sin(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\sin t$，$\cos(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\cos t$と表すことができ，さらに$f(x)$，$g(x)$は偶関数より，

$$f\big(\sin(t+(k-1)\pi)\big) = f\big((-1)^{k-1}\sin t\big) = f(\sin t)$$
$$g\big(\cos(t+(k-1)\pi)\big) = g\big((-1)^{k-1}\cos t\big) = g(\cos t)$$

よって，$\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$\displaystyle\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx$

(2)　$\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$として，$nx = t$とおくと，

$$I_n = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}\cdot\frac{dt}{n} = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

ここで，$m\pi \leqq n < (m+1)\pi$において，$\dfrac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} \geqq 0$なので，

$$I_n \geqq \frac{1}{n}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \geqq \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ③$$
$$I_n \leqq \frac{1}{n}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ④$$

さて，$f(x) = |x|$，$g(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$とおくと，$f(x)$，$g(x)$は連続な偶関数なので, (1)の結論から,

$$\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑤$$

同様にして，$\displaystyle\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = (m+1)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑥$

③～⑥より，$\displaystyle\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$

(3)　まず，$\cos x = u$とおくと，

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx = \int_1^{-1}\frac{1}{(1+u^2)^2}(-du) = 2\int_0^1\frac{1}{(1+u^2)^2}du$$

さらに，$u = \tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$2\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

そこで, (2)の結論から,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$n\to\infty$のとき $m\to\infty$となるので, はさみうちの原理を用いると,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \lim_{m\to\infty} I_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

［解 説］

(3)の極限値が到達点となりますが, このために与えられた誘導の意味を考えながら, (1)と(2)の証明を進めます。決して易しくはありませんが, 演習する価値の大きな一題です。

12 [2004 名古屋大]

(1) $n \geqq 0$ のとき，$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 0,\ 1$ のとき

$f_0(2\cos\theta) = 2 = 2\cos(0\cdot\theta)$，$f_1(2\cos\theta) = 2\cos(1\cdot\theta)$ より成立する。

(ii) $n = k,\ k+1$ のとき

$f_k(2\cos\theta) = 2\cos k\theta$，$f_{k+1}(2\cos\theta) = 2\cos(k+1)\theta$ と仮定すると，

$$\begin{aligned} f_{k+2}(2\cos\theta) &= 2\cos\theta f_{k+1}(2\cos\theta) - f_k(2\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\cdot 2\cos(k+1)\theta - 2\cos k\theta \\ &= 2\{\cos(k+2)\theta + \cos k\theta\} - 2\cos k\theta = 2\cos(k+2)\theta \end{aligned}$$

よって，$n = k+2$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

(2) $|x| \leqq 2$ より，$x = 2\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと，$f_n(x) = 0$ から，

$$2\cos n\theta = 0,\ n\theta = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

よって，$\theta = \frac{1}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ から，$x = 2\cos\frac{1}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$

x が最大になるのは，$k = 0$ のときで，最大値 x_n は $x_n = 2\cos\frac{\pi}{2n}$ となる。

このとき，$I_n = \int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx = \int_{2\cos\frac{\pi}{2n}}^{2} f_n(x)\,dx$ に対して，$x = 2\cos\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{2n}}^{0} f_n(2\cos\theta)(-2\sin\theta)\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \cos n\theta\sin\theta\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\}\,d\theta \\ &= 2\left[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2n}} \\ &= -\frac{2}{n+1}\cos\frac{n+1}{2n}\pi + \frac{2}{n-1}\cos\frac{n-1}{2n}\pi + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1} \\ &= -\frac{2}{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) + \frac{2}{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{2}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n} + \frac{2}{n-1}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \\ &= \frac{4n}{(n+1)(n-1)}\sin\frac{\pi}{2n} - \frac{4}{(n+1)(n-1)} \end{aligned}$$

(3) (2)より，$n^2 I_n = \dfrac{4n^3}{(n+1)(n-1)}\sin\dfrac{\pi}{2n} - \dfrac{4n^2}{(n+1)(n-1)}$

$$= \frac{2\pi}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$n\to\infty$のとき，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\to 1$，$\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}}\to 1$より，

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} n^2 I_n = 2\pi - 4$$

［解 説］

(2)において，θ の範囲を $0 \leqq \theta \leqq \pi$ としても，一般性は失われません。ちょっとしたことですが，この後の論理がスムーズに進められます。

13 [2005 東京工大]

(1) $n \geqq 2$ のとき，条件より，

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n\, dx = \Big[\, x(\log x)^n \,\Big]_1^e - \int_1^e x \cdot n(\log x)^{n-1} x^{-1}\, dx$$

$$= e - n\int_1^e (\log x)^{n-1} dx = e - na_{n-1} \quad (n \geqq 2) \cdots\cdots\cdots ①$$

$n \geqq 3$ のとき，①より，$a_{n-1} = e-(n-1)a_{n-2} \cdots\cdots\cdots ②$

①－②から，$a_n - a_{n-1} = -na_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ となり，

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}) \quad (n \geqq 3)$$

(2) $1 \leqq x \leqq e$ において，$(\log x)^{n+1} \geqq 0$（等号は $x=1$ のときのみ成立）より，

$$a_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx > 0$$

また, (1)より，$a_{n+2} = (n+1)(a_n - a_{n+1}) > 0$ から，$a_n > a_{n+1}$

よって，$a_n > a_{n+1} > 0$

(3) (2)より，$a_{2n-1} > a_{2n} > 0 \cdots\cdots\cdots ③$

また(1)より，$a_{2n} = (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n-1}) \quad (n \geqq 2) \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$a_{2n} < (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n})$ となり，

$$2na_{2n} < (2n-1)a_{2n-2},\quad a_{2n} < \frac{2n-1}{2n}a_{2n-2} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$a_n > 0$ より，⑤から，$a_{2n} < \dfrac{2n-1}{2n} \cdot \dfrac{2n-3}{2n-2} \cdot \cdots \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4} a_2$

ここで，$a_2 = \displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx = e - 2\int_1^e \log x\, dx = e - 2\Big[\, x\log x - x \,\Big]_1^e$

$$= e - 2\{e-(e-1)\} = e-2$$

以上より，$a_{2n} < \dfrac{3\cdot 5 \cdots\cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots\cdot (2n)}(e-2)$

［解 説］

(3)の結論の不等式から，どのような漸化式を導けばよいのか推測できます。そのための誘導が, (1)と(2)です。

14 [2005 北海道大]

(1) 実数 t に対して $t \leqq k \leqq t+1$ となる自然数 k をとると，$t^m \leqq k^m \leqq (t+1)^m$ から，

$$\int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq \int_{k-1}^{k} k^m dt \leqq \int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt,\ \int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq k^m \leqq \int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt$$

k を 1 から n まで変化させて和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt$$

よって，$\displaystyle\int_0^n t^m dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m dt$

(2) (1)より，$\dfrac{n^{m+1}}{m+1} \leqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \dfrac{(n+1)^{m+1}-1}{m+1} < \dfrac{(n+1)^{m+1}}{m+1}$ ………①

ここで，$f(x)$ を r 次の整式とすると，$f(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} k^r + a_{r-1}\sum_{k=1}^{n} k^{r-1} + \cdots + a_1\sum_{k=1}^{n} k + a_0 n$$

①より，$\dfrac{n^{r+1}}{r+1} + a_{r-1}\dfrac{n^r}{r} + \cdots + a_1\dfrac{n^2}{2} + a_0 n \leqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$

$$\frac{1}{r+1} + a_{r-1}\frac{1}{rn} + \cdots + a_1\frac{1}{2n^{r-1}} + a_0\frac{1}{n^r} \leqq \frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

①より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) < \dfrac{(n+1)^{r+1}}{r+1} + a_{r-1}\dfrac{(n+1)^r}{r} + \cdots + a_1\dfrac{(n+1)^2}{2} + a_0 n$

$$\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) < \frac{1}{r+1}\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{r+1} + \frac{a_{r-1}}{rn}\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{r} + \cdots + \frac{a_1}{2n^{r-1}}\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^{2} + \frac{a_0}{n^r}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{r+1}$ ………②

(3) 条件より，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n)$ ……③なので，$\displaystyle\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{f(n)}{n^r}$

$n\to\infty$ とすると，$f(n)$ の r 次の係数は 1 なので，②より，$\dfrac{1}{r+1} = \dfrac{1}{2}\times 1$

すると，$r=1$ から $f(x) = x + a$ とおくことができ，③より，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k+a) = \frac{1}{2}(n+a),\ \frac{1}{2}(n+1) + a = \frac{1}{2}(n+a)$$

よって，$a = -1$ となるので，$f(x) = x - 1$

［解 説］

(3)では，(2)の結論の利用方法がポイントです。この誘導を明確に示す記述力が問われています。

$\boxed{15}$　　[2006 東京大]

(1)　$x>0$ のとき，$f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{12(3e^{3x}-3e^x)(e^{2x}-1)-12(e^{3x}-3e^x)(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{12(e^{5x}+3e^x)}{(e^{2x}-1)^2}$$

すると，$f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}=-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^x-3e^{-x})}{1-e^{-2x}}=\infty$$

以上より，$x>0$ において，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる x がただ１つ存在する。

(2)　まず，$x=f(t)$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ となる。

また，$f(t)=8$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^t)}{e^{2t}-1}=8$ となり，

$$3e^{3t}-2e^{2t}-9e^t+2=0,\ (e^t-2)(3e^{2t}+4e^t-1)=0$$

ここで，$t>0$ より $e^t>1$ となり，$e^t=2$，$t=\log 2$ である。

同様に，$f(t)=27$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^t)}{e^{2t}-1}=27$ となり，

$$4e^{3t}-9e^{2t}-12e^t+9=0,\ (e^t-3)(4e^{2t}+3e^t-3)=0$$

$e^t>1$ から，$e^t=3$，$t=\log 3$ である。

よって，
$$\begin{aligned}\int_8^{27}g(x)\,dx&=\int_{\log 2}^{\log 3}g(f(t))f'(t)\,dt=\int_{\log 2}^{\log 3}tf'(t)\,dt\\&=\Big[\,tf(t)\,\Big]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3}f(t)\,dt\\&=\log 3\cdot f(\log 3)-\log 2\cdot f(\log 2)-\int_{\log 2}^{\log 3}f(t)\,dt\\&=27\log 3-8\log 2-12\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^t(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}\,dt\end{aligned}$$

さて，$u=e^t$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=e^t$ であり，$t=\log 2$ のとき $u=2$，$t=\log 3$ のとき $u=3$ となることより，

$$\begin{aligned}\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{e^t(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}\,dt&=\int_2^3\frac{u^2-3}{u^2-1}\,du=\int_2^3\Big(1-\frac{2}{u^2-1}\Big)du\\&=\int_2^3\Big(1-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\Big)du=\Big[\,u+\log\Big|\frac{u+1}{u-1}\Big|\,\Big]_2^3\\&=1+\log 2-\log 3\end{aligned}$$

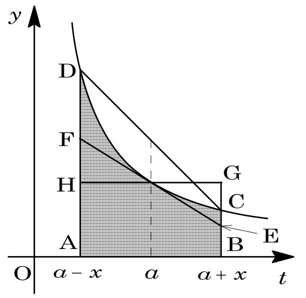
以上より，$\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx = 27\log 3 - 8\log 2 - 12(1+\log 2 - \log 3)$

$$= -12 - 20\log 2 + 39\log 3$$

［解 説］

逆関数の定積分を題材とした重要問題です。過去にも，たとえば 1998 年に東北大で類題が出ています。

$\boxed{16}$ ［2007 東京大］



(1) $y=\dfrac{1}{t}$ に対して，$y'=-\dfrac{1}{t^2}$，$y''=\dfrac{2}{t^3}$ となり，$t>0$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ は下に凸で単調に減少する。

このため，曲線上の点における接線は曲線の下側にあり，曲線上の 2 点を結ぶ線分は曲線の上側にある。

ここで，$0<x<a$ より，$0<a-x<a<a+x$ において，右図から，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt>(\text{台形 FABE})=(\text{長方形 HABG})$$

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt>\frac{1}{a}\cdot 2x=\frac{2x}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<(\text{台形 ABCD})$ より，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot 2x=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\displaystyle\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots③$

(2) まず，$\displaystyle\log 2=\int_1^2\frac{1}{t}\,dt=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt+\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}\,dt\cdots\cdots\cdots④$

③において，$a=\dfrac{5}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\displaystyle\frac{2}{5}<\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{12}\cdots\cdots\cdots⑤$

また，$a=\dfrac{7}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\displaystyle\frac{2}{7}<\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}\,dt<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{24}\cdots\cdots\cdots⑥$

④⑤⑥より，

$$\frac{24}{35}=\frac{2}{5}+\frac{2}{7}<\log 2<\frac{5}{12}+\frac{7}{24}=\frac{17}{24}$$

さらに，$\dfrac{24}{35}>0.685>0.68$，$\dfrac{17}{24}<0.709<0.71$ に注意すると，

$$0.68<\log 2<0.71$$

［解 説］

(2)では，まず $\dfrac{a+x}{a-x}=2$ すなわち $a=3x$ として計算しましたが，$\dfrac{2}{3}<\log 2<\dfrac{3}{4}$ しか示せず，「やはり」という感じがしました。そこで，考え直したのが上の解です。

$\boxed{17}$ ［2007 東北大］

(1) $I_0(a)=\int_0^a\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\Big[(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a=\frac{2}{3}\{(1+a)^{\frac{3}{2}}-1\}$ より，

$$\lim_{a\to\infty}a^{-\frac{3}{2}}I_0(a)=\frac{2}{3}\lim_{a\to\infty}\Big\{\Big(\frac{1+a}{a}\Big)^{\frac{3}{2}}-\Big(\frac{1}{a}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big\}=\frac{2}{3}$$

(2) $I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}\Big[x^n(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\{I_{n-1}(a)+I_n(a)\}$$

すると，$\frac{3+2n}{3}I_n(a)=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}nI_{n-1}(a)$ より，

$$I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$$

(3) $a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^{-\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$

$$=\frac{2}{3+2n}\Big(\frac{1+a}{a}\Big)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}\cdot\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$0\leqq x\leqq a$ において，$f(x)=x^n\sqrt{1+x}$ は単調に増加することより，

$$0\leqq x^n\sqrt{1+x}\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

これより，$0\leqq\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx\leqq\int_0^a a^n\sqrt{1+a}\,dx=a^{n+1}\sqrt{1+a}$ となり，

$$0\leqq I_{n-1}(a)\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

すると，$0\leqq\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\leqq\sqrt{\frac{1+a}{a^3}}=\sqrt{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^2}}$ となり, $a\to\infty$ のとき $\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\to 0$

よって, (*)から，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\frac{2}{3+2n}$

［解 説］

(3)は(2)の漸化式を誘導として考えるのが筋でしょうが，この式を変形する方法は思いつきません。そこで，直接的に $I_n(a)$ を評価し，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)$ を考えましたが，うまくいきません。ただ，$\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$ であれば極限値が求まるという発見は，その直後でした。

$\boxed{18}$ [2008 筑波大]

(1) $f(t)-g(t)=\int_1^e \dfrac{t^2-x^2}{t-x}\log x\,dx=\int_1^e (t+x)\log x\,dx=t\int_1^e \log x\,dx+\int_1^e x\log x\,dx$

$$=t\Big[x\log x-x\Big]_1^e+\Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=t\{e-(e-1)\}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=t+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

(2) $1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき，$0<\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ より，

$$0<\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx\leqq\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-e}dx=\frac{1}{t-e}\int_1^e x^2\log x\,dx$$

ここで，$\int_1^e x^2\log x\,dx=k>0$ とおくと，$0<g(t)\leqq\dfrac{k}{t-e}$ となる。

すると, $t\to\infty$ のとき $\dfrac{k}{t-e}\to 0$ なので，$\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=0$ である。

(3) (1)より，$f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}=g(t)+t+\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{bt^2}{t-a}$

$$=g(t)+t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-\left(bt+ab+\frac{a^2b}{t-a}\right)$$

$$=g(t)+(1-b)t+\frac{1}{4}(e^2+1)-ab-\frac{a^2b}{t-a}$$

$t\to\infty$ のとき，$g(t)\to 0$，$\dfrac{a^2b}{t-a}\to 0$ より，$\lim\limits_{t\to\infty}\left(f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}\right)$が有限な値となるために必要な条件は,

$$1-b=0,\ b=1$$

このとき，$\lim\limits_{t\to\infty}\left(f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\left\{g(t)+\dfrac{1}{4}(e^2+1)-a-\dfrac{a^2}{t-a}\right\}=0$ より，

$$\frac{1}{4}(e^2+1)-a=0,\ a=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

［解 説］

(2)の k の値を計算すると，$\dfrac{1}{9}(2e^3+1)$ となりますが，この値は，ここでは必要ありません。

$\boxed{19}$ ［2008 広島大］

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x)=\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n+1}$ とおく。

$$f'(x)=\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1}=\frac{1-x}{(n+1)(n+x)} \geqq 0$$

よって，$f(x) \geqq f(0)=0$

また, $0 \leqq x \leqq 1$ において，$g(x)=\frac{x}{n}-\log\left(1+\frac{x}{n}\right)$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}=\frac{x}{n(n+x)} \geqq 0$$

よって，$g(x) \geqq g(0)=0$

以上より, $0 \leqq x \leqq 1$ において，$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$

(2) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\int_0^1 x^5 dx=\frac{1}{6}$$

(3) $a_n=\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$ のとき,

$$\log a_n=\log\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)+\log\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)$$

ここで，$x=\left(\frac{k}{n}\right)^5$ とおくと, $0 \leqq x \leqq 1$ となり, (1)より,

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^5 \leqq \log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right) \leqq \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5,\quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 \leqq \log a_n \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(2)より，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{1}{6}$$

すると，対数関数は定義域で連続であることより，$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{\frac{1}{6}}$ となる。

［解 説］

基本的で，しかも頻出するタイプの融合問題です。しかも，(3)への誘導が，無理のない形になっており，演習する価値のある１題です。

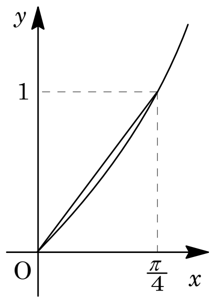
20 [2009 北海道大]

(1) $a_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

(2) $a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$

$=\Big[\dfrac{1}{2n+1}\tan^{2n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-a_n=\dfrac{1}{2n+1}-a_n$ ………①



(3) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，曲線 $y=\tan x$ は下に凸なので，

$0\leqq\tan x\leqq\dfrac{4}{\pi}x$，$0\leqq\tan^{2n}x\leqq\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n}x^{2n}$ ………②

②を 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで積分すると，$0\leqq a_n\leqq\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^{2n}dx$

$0\leqq a_n\leqq\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n}\Big[\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n+1}=\dfrac{\pi}{4(2n+1)}$

すると, $n\to\infty$のとき $\dfrac{\pi}{4(2n+1)}\to 0$ より，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(4) ①の両辺に$(-1)^{n+2}$をかけると,

$(-1)^{n+2}a_{n+1}=-(-1)^{n+2}a_n+\dfrac{(-1)^{n+2}}{2n+1}=(-1)^{n+1}a_n+\dfrac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$

$n\geqq 2$ において，$(-1)^{n+1}a_n=(-1)^2a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k+2}}{2k+1}=1-\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

$(-1)^{n+1}a_n=1-\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}-\dfrac{(-1)^2}{1}=-\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

以上より, (3)から，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n+1}a_n+\dfrac{\pi}{4}\right\}=\dfrac{\pi}{4}$

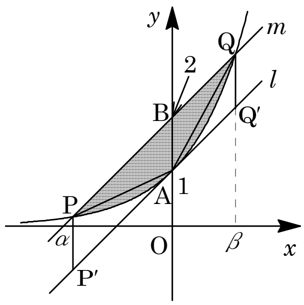
［解 説］

細かい詰めがやや面倒ですが，(4)の設問にある有名な級数の値を求める問題です。なお, (2)と(3)の設問は並列で，両者の結果が(4)に繋がるという解法をとっています。

$\boxed{21}$ ［2009 広島大］

(1) 平行四辺形 $\mathrm{PP'Q'Q}$ の面積 S は,

$$S = 1\times(\beta-\alpha) = \beta-\alpha$$



(2) $y = e^x$ ……①より，$y' = e^x$ となり，$\mathrm{A}(0,\ 1)$ における接線 l の方程式は，$y = x+1$ となる。

また，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通り l に平行な直線 m は,

$$y = x+2\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$e^x = x+2$

この方程式の 2 つの解が $x=\alpha$，β より,

$$e^\alpha = \alpha+2\ \cdots\cdots\cdots③,\quad e^\beta = \beta+2\ \cdots\cdots\cdots④$$

さて，直線 m と曲線 $y = e^x$ によって囲まれる図形の面積 T は,

$$T = \int_\alpha^\beta (x+2-e^x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x-e^x\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(e^\beta-e^\alpha)$$

③④より，$e^\beta - e^\alpha = (\beta+2)-(\alpha+2) = \beta-\alpha$ となり,

$$T = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)$$

(3) $T<S$ より，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2) < \beta-\alpha$ となり，$\beta-\alpha>0$ から,

$$\alpha+\beta+2<2,\quad \frac{\alpha+\beta}{2}<0$$

これより，線分 PQ の中点 $\mathrm{R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{e^\alpha+e^\beta}{2}\right)$ は，第 2 象限にある。

(4) $y = e^x$ に対し，$y'' = e^x > 0$ から，曲線は下に凸になるので,

$$T > \triangle\mathrm{APQ} = \frac{1}{2}S$$

よって，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2) > \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ から,

$$\alpha+\beta+2>1,\quad \alpha+\beta>-1$$

［解 説］

面積を比較して不等式を証明する問題です。ぜひ演習しておいてほしい一題です。

22 [2009 筑波大]

(1) 条件より，$x\left(f(x)-1\right)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ ………①

①の両辺を x で微分すると，

$$f(x)-1+xf'(x)=2e^{-x}g(x),\quad e^x\left(f(x)-1+xf'(x)\right)=2g(x)\ \text{………②}$$

②の両辺を x で微分すると，条件から $g'(x)=e^xf(x)$ なので，

$$e^x\left(f(x)-1+xf'(x)\right)+e^x\left(f'(x)+f'(x)+xf''(x)\right)=2e^xf(x)$$

よって，$f(x)-1+xf'(x)+2f'(x)+xf''(x)=2f(x)$ より，

$$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1\ \text{………③}$$

(2) $f(x)$ を n 次の整式とし，x^n の係数を $a(\neq 0)$ とおく。ただし, $n\geqq 2$ とする。

すると，$f'(x)$ は $n-1$ 次，$f''(x)$ は $n-2$ 次の整式となる。

そこで, ③の両辺の x^n の係数を比較すると,

$$na-a=0$$

よって，$n=1$ から不適となり，これより $f(x)$ は定数または 1 次式である。

(3) まず，$g(x)=0$ であり， ②の両辺に $x=0$ を代入すると,

$$f(0)-1=0,\quad f(0)=1$$

(2)の結論を合わせると，$f(x)=px+1$ とおくことができ，③より,

$$p(x+2)-(px+1)=1$$

よって，$p=1$ から，$f(x)=x+1$ となり,

$$g(x)=\int_0^x e^t(t+1)\,dt=\left[e^t(t+1)\right]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=e^x(x+1)-1-\left[e^t\right]_0^x$$

$$=e^x(x+1)-1-e^x+1=xe^x$$

［解 説］

積分方程式の問題です。(2)の設問のような，ていねいな誘導のため，見かけよりは解きやすくなっています。

23 [2010 熊本大]

(1) $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$に対して，

$$f'(x)=-\log_4\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)-\log_4(1+\tan x)$$

ここで，$1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{2}{1+\tan x}$ より，

$$f'(x)=-\log_4\frac{2}{1+\tan x}-\log_4(1+\tan x)=-\log_4\frac{2(1+\tan x)}{1+\tan x}=-\log_4 2$$

$$=-\log_4 4^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

(2) (1)より, C を定数として，$f(x)=-\frac{1}{2}x+C$

さて，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}}\log_4(1+\tan t)\,dt=0$ より，$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{8}+C=0$ となり $C=\frac{\pi}{16}$ から，

$$f(0)=C=\frac{\pi}{16}$$

(3) $a_1=f(0)=\frac{\pi}{16}$，$a_{n+1}=f(a_n)=-\frac{1}{2}a_n+\frac{\pi}{16}$ より，

$$a_{n+1}-\frac{\pi}{24}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{\pi}{24}\right)$$

これより，$a_n-\frac{\pi}{24}=\left(\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{24}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$a_n=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{48}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

［解 説］

底が 4 の対数というのは，見た目と異なり配慮の結果でした。なお，(2)は誘導なしですが，この設問の出来が最も重要です。

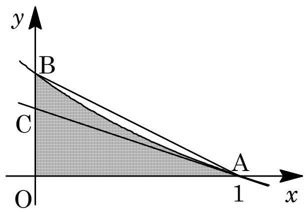
24 [2010 東京大]

(1) 自然数 k に対して，$f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}=-1+\dfrac{k+1}{k+x}$ とおくと, $0\leqq x\leqq 1$ において,

$$f'(x)=-\frac{k+1}{(k+x)^2}<0,\ \ f''(x)=\frac{2(k+1)}{(k+x)^3}>0$$

これより，$f(x)$ は単調に減少し，曲線 $y=f(x)$ は下に凸となる。

ここで，$y=f(x)$ と x 軸，y 軸との交点を，それぞれ $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$ とおく。



また，点 A における接線は,

$$y=-\frac{k+1}{(k+1)^2}(x-1)=-\frac{1}{k+1}(x-1)$$

この接線と y 軸の交点を C とすると，$\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$ となる。

そこで，面積を比較して，$\triangle\mathrm{OAC}<\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx<\triangle\mathrm{OAB}$ より,

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) まず，$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx=\Big[-x+(k+1)\log(k+x)\Big]_0^1$

$$=-1+(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}=-1+(k+1)\log\frac{k+1}{k}$$

すると，①より，$\dfrac{1}{2(k+1)}<-1+(k+1)\log\dfrac{k+1}{k}<\dfrac{1}{2k}$ となり,

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}<\dfrac{1}{2(k+1)^2}$ より,

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②において，$k=n$ から $k=m-1$ までの和をとると,

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$

$$=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$$

また，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\Big(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\Big)=-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=n}^{m-1}\{\log(k+1)-\log k\}$

$$=-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}+\log m-\log n=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

よって，③より，$\displaystyle\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$

［解　説］

凸関数のグラフの性質を用いて，(1)の不等式の証明をしています。$f(x)$ のグラフを描くと，三角形との関係が見えてきます。(2)も，一癖ある設問です。

25 ［2011 東京医歯大］

(1) $I_n=\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|$ とおくと，

$$I_n=\left|\int_0^1\frac{1-(-x)^n-1}{1+x}dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\right|=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$ となるので，

$$I_n\leqq\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

(2) $S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx=\int_0^1\left\{1-x+x^2-x^3+\cdots+(-x)^{n-1}\right\}dx$

$$=\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

また，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ より，

$$T_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+2\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}$$

よって，$T_n-2S_n=-1-(-1)^{n-1}\frac{1}{n+1}=-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$

(3) (1)より，$n\to\infty$ のとき，$I_n\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\log(1+x)\right]_0^1=\log 2$$

(2)より，$T_n=2S_n-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}$ なので，

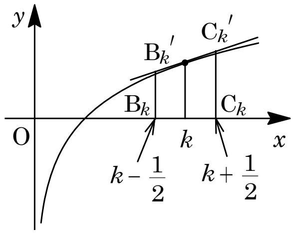
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2S_n-1+(-1)^n\frac{1}{n+1}\right\}=2\log 2-1$$

［解 説］

定積分と級数について，過去に類題がかなり出ている有名問題です。要演習の 1 題です。

26 ［2011 長崎大］

(1) $y=\log x$ に対して $y'=\dfrac{1}{x}$ となり，点 $\mathrm{A}_k{}'(k,\ \log k)$ における接線 l_k の方程式は,



$$y-\log k=\frac{1}{k}(x-k),\quad y=\frac{1}{k}x-1+\log k$$

$x=k\pm\dfrac{1}{2}$ のとき，複号同順で

$$y=\frac{1}{k}\Big(k\pm\frac{1}{2}\Big)-1+\log k=\pm\frac{1}{2k}+\log k$$

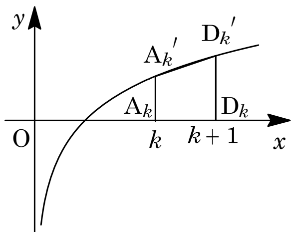
よって，$\mathrm{B}_k{}'\Big(k-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2k}+\log k\Big)$，$\mathrm{C}_k{}'\Big(k+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2k}+\log k\Big)$となる。

以上より，四角形 $\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{C}_k{}'\mathrm{B}_k{}'$ の面積 S_k は,

$$S_k=\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2k}+\log k+\frac{1}{2k}+\log k\Big)\times 1=\log k$$

(2) $k\geqq 2$ のとき，$S_k>\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ なので, (1)より，$\log k>\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ ………①

$k\geqq 1$ のとき，$\mathrm{D}_k(k+1,\ 0)$，$\mathrm{D}_k{}'(k+1,\ \log(k+1))$ とおくと，四角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{D}_k\mathrm{D}_k{}'\mathrm{A}_k{}'$ の面積は,



$$\frac{1}{2}\big\{\log k+\log(k+1)\big\}\times 1=\frac{\log k+\log(k+1)}{2}$$

さて，曲線 $y=\log x$ は上に凸であるので,

$$\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\int_k^{k+1}\log x\,dx \text{ ………②}$$

(3) $n\geqq 2$ のとき，まず，①より，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\log k>\sum_{k=2}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\log x\,dx$ となり,

$$\log 2+\log 3+\cdots+\log n=\log(n!)>\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx$$

両辺から $\dfrac{1}{2}\log n$ を引いて,

$$a_n=\log(n!)-\frac{1}{2}\log n>\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n$$

ここで，$y=\log x$ は増加関数なので，$\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx>\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log n\,dx=\frac{1}{2}\log n$

よって，$\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\log n>0$ から，$a_n>\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx$ ………③

また，②より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\log k+\log(k+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\log x\,dx$ となり,

$$\frac{\log 1+\log 2}{2}+\cdots+\frac{\log(n-1)+\log n}{2}=\sum_{k=2}^{n}\log k-\frac{1}{2}\log n<\int_1^n \log x\,dx$$

よって，$a_n=\log(n!)-\dfrac{1}{2}\log n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\log k-\frac{1}{2}\log n<\int_1^n \log x\,dx$ ………④

③④より，$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx<a_n<\int_1^n \log x\,dx$ ………⑤

(4) ⑤より，$\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n<\log(n!)<\int_1^n \log x\,dx+\frac{1}{2}\log n$ となり，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{n}\log x\,dx+\frac{1}{2}\log n&=\left[\,x\log x-x\,\right]_{\frac{3}{2}}^{n}+\frac{1}{2}\log n\\&=n\log n-\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}-n+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\log n\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)=U_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^n \log x\,dx+\frac{1}{2}\log n&=\left[\,x\log x-x\,\right]_1^n+\frac{1}{2}\log n=n\log n-n+1+\frac{1}{2}\log n\\&=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+1=V_n\end{aligned}$$

以上より，$U_n<\log(n!)<V_n$ が成立する。

［解 説］

凸関数の性質を利用した不等式の証明問題です。誘導が非常に丁寧です。

27 [2012 東京工大]

(1) 条件より，$a_1=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$a_{k+1}=-\dfrac{1}{k+n+1}+\dfrac{n}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i$ なので，

$$a_2=-\frac{1}{1+n+1}+\frac{n}{1}\cdot a_1=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_3=-\frac{1}{2+n+1}+\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_2)=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

(2) (1)より，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ ……①と予測できるので，以下，数学的帰納法を用いて，①を証明する。

(i) $k=1$ のとき ①は明らかに成立している。

(ii) $k\leqq l$ のとき ①が成立していると仮定すると，

$$a_{l+1}=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}a_i=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}(a_1+a_2+\cdots+a_l)$$

$$=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+l-1}-\frac{1}{n+l}\right)$$

$$=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+l}\right)=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{1}{n+l}=\frac{1}{(n+l)(n+l+1)}$$

(i)(ii)より，すべての自然数 k で，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ である。

(3) (2)より，$\dfrac{1}{(n+k)^2}<a_k<\dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ となり，$\dfrac{1}{n+k}<\sqrt{a_k}<\dfrac{1}{n+k-1}$ から，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1},\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<b_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\log(1+x)\right]_0^1=\log 2$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log 2$$

よって，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ である。

［解 説］

(2)は，いわゆる強化型の数学的帰納法です。(3)は，不等式で評価をして，区分求積法につなぐものです。どちらも，一癖ある典型題です。

$\boxed{28}$ [2013 新潟大]

(1) 条件より，$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$ ………①

①に $y=0$ を代入すると，$f(x)f(0)-f(x)=0$ となり，

$$f(x)\{f(0)-1\}=0$$

ここで，$f(0)\neq 1$ とすると，任意の x に対して $f(x)=0$ となり①は成立しない。

よって，$f(0)=1$ である。

(2) 関数 $f(x)$ は微分可能なので，①の両辺を y で微分すると，

$$f(x)f'(y)-f'(x+y)\cdot 1=\sin x\cos y \text{ ………②}$$

②に $y=0$ を代入すると，$f(x)f'(0)-f'(x)=\sin x$

$f'(0)=0$ から，$f'(x)=-\sin x$

(3) (2)から，C を定数として，$f(x)=\cos x+C$ となり，(1)より，

$$f(0)=1+C=1,\ C=0$$

よって，$f(x)=\cos x$ であり，$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ とおくと，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\log(2+\sqrt{3})$$

［解 説］

関数方程式の頻出タイプの問題です。(2)は微分係数や導関数の定義を利用しても構いませんが，問題文に「$f(x)$ は微分可能」と書かれていますので，直接，①の両辺を微分しています。

29 　　［2014 千葉大］

(1) $n \geqq 2$ のとき，部分積分を用いて，

$$I_{n,\,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\sin^m\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{m+1}\Big[\cos^{n-1}\theta\sin^{m+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\sin\theta\sin^{m+1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\sin^{m+2}\theta\,d\theta=\frac{n-1}{m+1}I_{n-2,\,m+2}$$

(2) $x=\cos^2\theta$ とおくと，$dx=-2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\sin^{2m+1}\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\sin^{2m}\theta\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^0 x^n(1-x)^m\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

(3) (1)より，$I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{2n}{2m+2}I_{2n-1,\,2m+3}$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\frac{2n}{2m+2}\cdot\frac{2n-2}{2m+4}\cdot\frac{2n-4}{2m+6}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{2m+2n}I_{1,\,2m+2n+1}$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^{2m+2n+1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{m!n!}{(m+n)!}\Big[\frac{1}{2m+2n+2}\sin^{2m+2n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{m!n!}{2(m+n+1)!}$$

また，二項展開を用いると，(2)より，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\{{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_1x+\cdots+(-1)^m{}_m\mathrm{C}_mx^m\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\{{}_m\mathrm{C}_0x^n-{}_m\mathrm{C}_1x^{n+1}+\cdots+(-1)^m{}_m\mathrm{C}_mx^{n+m}\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}x^{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}x^{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^m{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}x^{n+m+1}\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^m{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}\Big\}$$

以上より，$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$

［解 説］

定積分の計算についての有名問題で，要演習の１題です。

$\boxed{30}$ ［2014 新潟大］

(1) $a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とするとき，

$$\left|\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|=\left|\int_0^1\frac{-(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$0\leqq x\leqq 1$ において，$\dfrac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}\leqq x^{2(n+1)}$ より，

$$\int_0^1\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx\leqq\int_0^1 x^{2(n+1)}dx=\frac{1}{2n+3}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\left|\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\leqq\dfrac{1}{2n+3}\cdots\cdots\cdots③$

(2) $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=[\,x\,]_0^1-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=1-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

とおくと，$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$から，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ となり，

$$I=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=1-\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=1-\frac{\pi}{4}$$

(3) $\dfrac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}=\dfrac{x^2\{1-(-x^2)^n\}}{1-(-x^2)}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^2\cdot(-x^2)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{2k}$ から，

$$a_n=\int_0^1\{x^2-x^4+x^6+\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n}\}dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$$

(4) (3)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdots\cdots\cdots④$

また，③より，$n\to\infty$のとき，$\dfrac{1}{2n+3}\to 0$ から$\left|\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=1-\frac{\pi}{4}\cdots\cdots\cdots⑤$$

したがって，④⑤より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}=1-\frac{\pi}{4}$

［解 説］

定積分と級数についての標準的な問題です。細かな誘導のため，方針に迷うことはありません。

$\boxed{31}$ [2015 熊本大]

(1) $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ に対し，$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ で $\sin x$ の符号は不変なので，

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\sin x\,dx\right|$$

ここで，$(e^{-rx}\sin x)'=-re^{-rx}\sin x+e^{-rx}\cos x$ ………①

$(e^{-rx}\cos x)'=-re^{-rx}\cos x-e^{-rx}\sin x$ ………②

①×r＋②より，$-(r^2+1)e^{-rx}\sin x=\left\{e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\right\}'$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left|-\frac{1}{r^2+1}\Big[e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-(n+1)\pi r}\cos(n+1)\pi-e^{-n\pi r}\cos n\pi\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-n\pi r}e^{-\pi r}(-1)^{n+1}-e^{-n\pi r}(-1)^n\right|$$
$$=\frac{e^{-n\pi r}\left|(-1)^n\right|}{r^2+1}\left|-e^{-\pi r}-1\right|=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}e^{-n\pi r}$$

(2) (1)より，$a_1=\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-rx}\left|\sin x\right|dx=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}$ となり，$n\geqq2$ で，

$$a_n=a_1+\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi r}=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\left\{1+\frac{e^{-\pi r}(1-e^{-(n-1)\pi r})}{1-e^{-\pi r}}\right\}$$
$$=\frac{(1+e^{-\pi r})(1-e^{-n\pi r})}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3) $r>0$ から，$n\to\infty$ のとき $e^{-n\pi r}\to0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$

(4) $f(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$ より，$rf(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{r^2+1}\cdot\dfrac{r}{1-e^{-\pi r}}$

ここで，$g(r)=e^{-\pi r}$ とおくと，$g'(r)=-\pi e^{-\pi r}$ となり，

$$\lim_{r\to+0}\frac{1-e^{-\pi r}}{r}=-\lim_{r\to+0}\frac{g(r)-g(0)}{r}=-g'(0)=\pi$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{1}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ である。

［解 説］

定積分と数列を融合した超頻出の有名問題です。このタイプの部分積分は計算ミスを犯しやすいので，いつも①②のような式を先に立式しています。

$\boxed{32}$ ［2015 新潟大］

(1)　$f_1(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$ から，条件より，$f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x\Big(1-\frac{t^2}{2}\Big)dt=x-\frac{x^3}{6}$

$$f_3(x)=1-\int_0^x f_2(t)\,dt=1-\int_0^x\Big(t-\frac{t^3}{6}\Big)dt=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$g(x)=f_1(x)-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}=1-\dfrac{x^2}{2}-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}$ とおくと，

$$g'(x)=-x+\sin x+\frac{x^3}{3!}$$

すると，$x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq\sin x$ より $g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)\geqq g(0)=0$

また，$h(x)=\dfrac{x^4}{4!}-f_1(x)+\cos x=\dfrac{x^4}{4!}-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{x^3}{3!}+x-\sin x$$

$\sin x\leqq x$ より $h'(x)\geqq 0$ となり，$h(x)\geqq h(0)=0$

以上より，$0\leqq x\leqq 1$ において，$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ ……$(*)$が，すべての自然数 m に対して成り立つことを，数学的帰納法により証明する。

(i)　$m=1$ のとき　(2)より，成り立っている。

(ii)　$m=l$ のとき　$-\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}\leqq f_{2l-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}$ の成立を仮定すると，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l-1}(t)-\cos t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}\leqq f_{2l}(x)-\sin x\leqq\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}$ となり，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l}(t)-\sin t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq 1-f_{2l+1}(x)+\cos x-1\leqq\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$ となり，

$$-\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq f_{2l+1}(x)-\cos x\leqq\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$$

すると，$m=l+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，自然数 m に対して$(*)$は成り立っている。

(4)　$(*)$に $x=\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると，

$$-\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}\leqq f_{2m-1}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}$$

すると，$0<\dfrac{\pi}{6}<1$ から，$m\to\infty$ のとき，$f_{2m-1}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\to 0$ となるので，

$$\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解 説］

定積分と不等式，加えて極限を問うものです。記述量は多いですが，方針に迷いが生ずることはないでしょう。

33 ［2015 東京大］

(1) $g(x)=\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2}$ $(|x|\leqq 1$ のとき$)$，$g(x)=0$ $(|x|>1$ のとき$)$ より，

$$g(nx)=\frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ g(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

ここで，$g(nx)\geqq 0$ かつ $p\leqq f(x)\leqq q$ $\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$から，

(i) $|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき $\dfrac{p}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}\leqq g(nx)f(x)\leqq\dfrac{q}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}$

(ii) $|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき $g(nx)f(x)=0$

さて，$I_n=n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$ とおくと，

$$\frac{np}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq\frac{nq}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

$$np\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq nq\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

そこで，$\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx=\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}+x\right]_{0}^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$ から，$np\cdot\dfrac{1}{n}\leqq I_n\leqq nq\cdot\dfrac{1}{n}$

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) $g(nx)=\dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$，$g(nx)=0\left(|x|>\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$ より，

$$(g(nx))'=-\frac{n\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|<\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ (g(nx))'=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

また，$h(x)=-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x)$ $(|x|\leqq 1$ のとき$)$，$h(x)=0$ $(|x|>1$ のとき$)$ より，

$$h(nx)=-\frac{\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ h(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

すると，$x=\pm\dfrac{1}{n}$ のときも含めて，$h(nx)=\dfrac{1}{n}(g(nx))'$ である。

さて，$J_n=n^2\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$ とおくと，

$$J_n=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(g(nx))'\log(1+e^{x+1})dx$$

$$=n\Big[g(nx)\log(1+e^{x+1})\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

ここで，$g(1)=g(-1)=0$ から，$J_n=-n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$

さらに，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ とおくと，

$$J_n=-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)dx=-n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$$

そして，$f(x)$は単調に増加し，$\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$ となり，(＊)から，

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq -J_n\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}},\quad -\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}\leqq J_n\leqq -\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{e}{1+e}$

［解 説］

(2)では，当然のことながら，(1)の結果を利用するだろうということは推測できますが，このときボトルネックになるのは，$g'(x)=h(x)$ という $g(x)$ と $h(x)$ の関係です。ただ，それに気づけば秘かにほくそ笑むことができ，部分積分の出番という方針が立ちます。もっとも，$f(x)=\log(1+e^{x+1})$ という単純な置き換えは出題されないだろうと推測することも当然のことですが……。

34 ［2016 北海道大］

(1) $f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\Big\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\Big\}dt=\frac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$

$$=\frac{e^{-x}}{2a}(a+a)+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt=e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$$

ここで，$C=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+C\cdots\cdots$①となり，

$$C=\int_{-a}^{a}(e^{-t}+C)\sin t\,dt=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt+C\int_{-a}^{a}\sin t\,dt$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\big[\cos t\big]_{-a}^{a}=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\{\cos a-\cos(-a)\}$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$(e^{-t}\sin t)'=e^{-t}(-\sin t+\cos t)$，$(e^{-t}\cos t)'=e^{-t}(-\cos t-\sin t)$ より，

$$(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'=-2e^{-t}\sin t,\ \ e^{-t}\sin t=-\frac{1}{2}(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'$$

すると，②から，$C=-\dfrac{1}{2}\Big[e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\Big]_{-a}^{a}$ となり，

$$C=-\frac{1}{2}\{e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\}-\frac{1}{2}\{e^{-a}\cos a-e^{a}\cos(-a)\}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-a}\sin a+e^{a}\sin a)-\frac{1}{2}(e^{-a}\cos a-e^{a}\cos a)$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$$

よって，①から，$f(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\dfrac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$

(2) $g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ なので，(1)から，$g(a)=C=\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt$

$$g'(a)=e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\cdot(-1)$$

$$=(e^{-a}-e^{a})\sin a$$

a	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(a)$		↘		↗	

$0<a\leqq 2\pi$ のとき，$g(a)$ の増減は右表のようになる。そして，$g(a)$ は $a=\pi$ のとき最小となり，最小値は，

$$g(\pi)=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})\sin\pi+\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cos\pi=-\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

［解 説］

積分方程式の中で，(1)がいわゆる置換型，(2)がいわゆる微分型という設問内容になっています。ただ，計算は有名な部分積分ですが，面倒ですので工夫をしています。

$\boxed{35}$ ［2016 信州大］

(1) $I_n=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^n dx$ とおくと，$I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx$ となり，

$$I_{n+1}=\Big[\,x(1-x^2)^{n+1}\,\Big]_0^1-(n+1)\int_0^1 x(1-x^2)^n(-2x)dx$$
$$=-2(n+1)\int_0^1 -x^2(1-x^2)^n dx$$
$$=(-2n-2)\int_0^1\{(1-x^2)-1\}(1-x^2)^n dx=(-2n-2)(I_{n+1}-I_n)$$

よって，$(2n+3)I_{n+1}=(2n+2)I_n$ より，$I_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}I_n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$I_n=I_1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_0^1(1-x^2)dx=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ から，

$$I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=2^n n!\cdot\frac{2^n n!}{(2n+1)!}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$n=1$ をあてはめると，$I_1=\dfrac{4\cdot(1!)^2}{3!}=\dfrac{2}{3}$ となり成立するので，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) 二項定理より，$(1-x^2)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}$ となり，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}\Big)dx=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\int_0^1 x^{2k}dx$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

よって，$(*)$から，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

［解　説］

定積分がらみで誘導なしの証明問題ですが，(1)の右辺の形には，部分積分から漸化式という流れが暗示されています。上の解答例以外に，まず $x=\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換する方法もあり，そうすると参考書などには必ず載っている有名な定積分が対応します。また，(2)では左辺の階乗の部分が ${}_n\mathrm{C}_k$ であることがわかりますので，二項展開という方針は明快です。なお，漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

36 ［2017 東北大］

(1) $(e^{ax}\cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$ ………①

$(e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$ ………②

①②より，$(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx)' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ となり，

$$e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2}\{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\}'$$

$$I(a,\ b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}a}\left(a\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right) - a\right\}$$

(2) $J(a,\ b,\ c) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b+c)x - \cos(b-c)x\}dx$

$$= -\frac{1}{2}I(a,\ b+c) + \frac{1}{2}I(a,\ b-c)$$

(3) $F(t) = 8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$ とおくと，

$$F(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx - \sin 2tx)(\sin 6tx - \sin 2tx)dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx\sin 6tx - \sin 4tx\sin 2tx - \sin 2tx\sin 6tx + \sin^2 2tx)dx$$

$$= 2J(1,\ 6t,\ 4t) - 2J(1,\ 4t,\ 2t) - 2J(1,\ 6t,\ 2t) + 2J(1,\ 2t,\ 2t)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 2t) + I(1,\ 6t) - I(1,\ 2t) + I(1,\ 8t) - I(1,\ 4t)$$

$$- I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 6t) + I(1,\ 8t) - 2I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

さて，$I(1,\ b) = \dfrac{1}{1+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}b + b\sin\dfrac{\pi}{2}b\right) - 1\right\}$ となるので，

$$|I(1,\ b)| \leqq \frac{1}{1+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right| + |-1|\right\} \leqq \frac{1}{1+b^2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2} + 1\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{1+b^2}$$

これより $\displaystyle\lim_{b\to\infty} I(1,\ b) = 0$ なので，k が自然数のとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I(1,\ kt) = 0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = I(1,\ 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

［解 説］

定積分の計算と極限の融合問題です。誘導が細かいので方針に混乱はないでしょう。

37 [2017 東京医歯大]

(1) $F'(t)=f(t)$ とおくと，$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$ となり，

$$\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du=\int_0^x\{F(u)-F(0)\}du=\int_0^x F(u)du-F(0)x$$

$$\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du=\int_x^1\{F(1)-F(u)\}du=F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du$$

すると，与えられた条件式は，

$$F(x)-F(0)=4ax^3+(1-3a)x$$
$$+\int_0^x F(u)du-F(0)x+F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺を x で微分すると，

$$F'(x)=12ax^2+(1-3a)+F(x)-F(0)-F(1)+F(x)$$
$$f(x)=12ax^2+1-3a+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①に $x=0$ を代入すると，$0=F(1)-\displaystyle\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots③$

①に $x=1$ を代入すると，$F(1)-F(0)=4a+1-3a+\displaystyle\int_0^1 F(u)du-F(0)$ より，

$$F(1)=a+1+\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots④$$

③④から，$a+1=0$ となり，$a=-1$ である。

すると，②から，$f(x)=-12x^2+4+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤に $x=0$，$x=1$ を代入すると，

$$f(0)=4+F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑥,\ \ f(1)=-8+F(1)-F(0)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$f(0)+f(1)=4-8=-4\cdots\cdots⑧$である。

(2) ⑤の両辺を x で微分すると，$f'(x)=-24x+2F'(x)=-24x+2f(x)\cdots\cdots\cdots⑨$

ここで，$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，⑨から，

$$g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}\{-24x+2f(x)\}$$
$$=-24xe^{-2x}$$

(3) (2)より，$g(x)=-24\displaystyle\int xe^{-2x}dx$ となり，C を定数として，

$$g(x)=12xe^{-2x}-12\int e^{-2x}dx=12xe^{-2x}+6e^{-2x}+C=6(2x+1)e^{-2x}+C$$

すると，$f(x)=e^{2x}g(x)$ より，$f(x)=6(2x+1)+Ce^{2x}$ となり，⑧から，

$$(6+C)+(18+Ce^2)=-4,\ \ C=-\frac{28}{1+e^2}$$

以上より，$f(x)=6(2x+1)-\dfrac{28}{1+e^2}e^{2x}$ である。

［解 説］

いわゆる微分型の積分方程式を解く問題です。問題文で与えられた関係式には驚きますが，誘導がていねいなので，方針に迷うことはないでしょう。

$\boxed{38}$ ［2018 広島大］

(1) $f(t)=e^t-1-t$ とおくと，$f'(t)=e^t-1$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，これより $f(t)\geqq 0$ であり，

$$1+t\leqq e^t \cdots\cdots\cdots①$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ とし，$u=\cos x$ とおくと $du=-\sin x\,dx$ から，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{u^2}du=1+\Big[-\frac{1}{u}\Big]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$$

(3) ①より，$1-\sin x\leqq e^{-\sin x}$ となり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\geqq\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

また，①より $1+\sin x\leqq e^{\sin x}$ となり，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ で $e^{-\sin x}\leqq\dfrac{1}{1+\sin x}$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，(2)の結果を参照すると，②③から，

$$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$$

［解 説］

定積分と不等式についての問題です。(2)の結果が(3)へのざっくばらんな誘導となっています。なお，(2)の定積分の計算は頻出です。

39 ［2018 長崎大］

(1) $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に対して，

$$F_2(x)=\int_0^x \frac{t^2}{2!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^2}{2}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x te^{-t}\,dt=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)$$

$$F_1(x)=\int_0^x \frac{t^1}{1!}e^{-t}\,dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x e^{-t}\,dt=-xe^{-x}+F_0(x)$$

(2) $F_0(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt=-\Big[e^{-t}\Big]_0^x=-(e^{-x}-1)=1-e^{-x}$

$$F_1(x)=-xe^{-x}+F_0(x)=-xe^{-x}+1-e^{-x}=1-(1+x)e^{-x}$$

$$F_2(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+F_1(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}+1-(1+x)e^{-x}=1-\Big(1+x+\frac{x^2}{2}\Big)e^{-x}$$

(3) $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}\,dt=-\Big[\frac{t^n}{n!}e^{-t}\Big]_0^x+\int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t}\,dt=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}+F_{n-1}(x)$

すると，$n\geqq 1$で，$F_n(x)=F_0(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\{F_k(x)-F_{k-1}(x)\}$ より，

$$F_n(x)=1-e^{-x}-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}=1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

この式は$n=0$のときも成立している。

(4) $p(x)=x^n$ のとき，$p'(x)=nx^{n-1}$，$p''(x)=n(n-1)x^{n-2}$ となり，

$$p'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}=\frac{n!}{(n-3)!}x^{n-3}$$

$$p^{(4)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}=\frac{n!}{(n-4)!}x^{n-4}$$

すると，帰納的に，$p^{(k)}(x)=\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ である。

さて，$n!F_n(x)=\displaystyle\int_0^x t^ne^{-t}\,dt$ より，(3)の結果を代入すると，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!\Big(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\Big)=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ となるので，

$$\int_0^x t^ne^{-t}\,dt=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}=n!-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)$$

［解 説］

定積分と関数列の融合問題です。本問も非常に細かな誘導がつけられています。なお，$p^{(k)}(x)$ について，気になるのであれば数学的帰納法です。

$\boxed{40}$ [2018 名古屋大]

(1) $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$ に対して，$I_{n+2}=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+2}}{x^2+1}dx$ より，

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n(1+x^2)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^n\,dx=\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ において $0\leqq\dfrac{x^{n+1}}{x^2+1}\leqq\dfrac{x^n}{x^2+1}$ より，$0\leqq\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\leqq\int_0^1\frac{x^n}{x^2+1}dx$

$$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$I_{n+2}\geqq 0$ となり，①から $I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots③$

②③より，$0\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n+1}\cdots\cdots\cdots④$

(3) $n\geqq 3$ のとき，②から $0\leqq I_{n+2}\leqq I_{n+1}\leqq I_n\leqq I_{n-1}\leqq I_{n-2}$ となるので，①より，

$$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+2}\leqq 2I_n\,,\ \ \frac{1}{n-1}=I_{n-2}+I_n\geqq 2I_n$$

よって，$\dfrac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{2(n-1)}$ から，$\dfrac{n}{2(n+1)}\leqq nI_n\leqq\dfrac{n}{2(n-1)}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$$

(4) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ に対して，$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}$ とおく。

①から，$I_{2n-1}+I_{2n+1}=\dfrac{1}{2n}$ となるので，$a_n=(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})$ より，

$$\begin{aligned}S_n&=(I_1+I_3)-(I_3+I_5)+(I_5+I_7)-(I_7+I_9)+\cdots+(-1)^{n-1}(I_{2n-1}+I_{2n+1})\\&=I_1+(-1)^{n-1}I_{2n+1}\end{aligned}$$

ここで，④より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}I_{2n+1}=0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=I_1=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\Big[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log 2$$

［解 説］

定積分と極限の融合問題です。問題文にも暗示されているように, (1)→(2)→(3)という流れと, (1)→(2)→(4)という流れで, 設問が構成されています。

41 [2018 新潟大]

(1) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}-(1+x)\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}$ ………①

(i) $(-x)^3\neq 1\ (x\neq -1)$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=\frac{1-(-x)^{3(n+1)}}{1-(-x)^3}=\frac{1-(-1)^{3(n+1)}\cdot x^{3(n+1)}}{1+x^3}=\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1-(-1)^{n+1}\cdot x^{3n+3}}{1-x+x^2}=(-1)^{n+1}\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(ii) $(-x)^3=1\ (x=-1)$ のとき

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}=n+1$ となり，$f_n(-1)=\dfrac{1}{1+1+1}-(1-1)(n+1)=\dfrac{1}{3}$

これは，②に $x=-1$ をあてはめた値と一致する。

(i)(ii)より，$f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ ………③

(2) ③より $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|=\left|(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\right|=\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx$ ………④

ここで，$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より，$0\leqq x\leqq 1$ において，

$$\frac{3}{4}\leqq x^2-x+1\leqq 1,\ 1\leqq\frac{1}{x^2-x+1}\leqq\frac{4}{3}$$

すると，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}dx\leqq\int_0^1\frac{4}{3}x^{3n+3}dx=\frac{4}{3}\Big[\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\Big]_0^1=\frac{4}{3(3n+4)}$ ………⑤

④⑤より，$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ ………⑥

(3) ①より，$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx-\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx$ ………⑦

ここで，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\sum_{k=0}^{n}\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)dx$ に注意して，I_k を

$I_k=\displaystyle\int_0^1(-x)^{3k}(1+x)dx$ とすると，$\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx=\sum_{k=0}^{n}I_k$ となり，

$$I_k=\int_0^1(-1)^{3k}x^{3k}(1+x)dx=(-1)^k\int_0^1(x^{3k}+x^{3k+1})dx$$

$$=(-1)^k\Big[\frac{x^{3k+1}}{3k+1}+\frac{x^{3k+2}}{3k+2}\Big]_0^1=(-1)^k\Big(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\Big)\cdots\cdots\cdots ⑧$$

また，$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ と変形し，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，

$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと，$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta$ となり，

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4}\tan^2\theta+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\tan^2\theta)d\theta = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi \cdots\cdots\cdots ⑨$$

そこで，⑦から，$\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx - \int_0^1 f_n(x)dx$

$$\sum_{k=0}^{n} I_k = \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx - \int_0^1 f_n(x)dx$$

⑧⑨を代入すると，

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi - \int_0^1 f_n(x)dx \cdots\cdots\cdots ⑩$$

さらに，⑥から，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| \leqq \frac{4}{3(3n+4)} \to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f_n(x)dx\right| = 0,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑩⑪より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}\pi$ である。

［解 説］

定積分と無限級数の融合問題です。(3)は唐突な印象を与えますが，(1)と(2)での巧みな誘導のため，与えられた①を 0 から 1 まで積分するという方針に混乱はないでしょう。記述量は多めですが，内容は基本の組合せとなっています。