２０１９ 入試対策

２次数学アーカイブ

極　限

理系

２００１－２０１８

外林康治 編著

電送数学舎

極　限

【問題一覧】

1　数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が$a_1=1$，$\lim_{n\to\infty}S_n=1$，$n(n-2)a_{n+1}=S_n\ (n\geqq 1)$を満たすとき，一般項$a_n$を求めよ。

［2002 京都大］

2　関数$f(x)=4x-x^2$に対し，数列$\{a_n\}$を

$$a_1=c,\quad a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与える。ただし，cは$0<c<2$を満たす定数である。

(1)　$a_n<2$，$a_n<a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を示せ。

(2)　$2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を示せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。　［2003 東北大］

3　座標平面上で，x座標とy座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。$p,\ n$を自然数とし，領域$D_n=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x,\ x^p\leqq y\leqq n\}$を考え，その面積を$S_n$とする。$L_n$と$M_n$を，それぞれ$D_n$に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1)　グラフ$y=x^p\ \left(0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}}\right)$と交わる単位正方形の個数は$n$であることを示せ。

(2)　不等式$M_n<S_n<M_n+n$を示せ。また，面積S_nを求めよ。

(3)　極限値$\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n$を求めよ。　［2003 九州大］

4　曲線$C:y=e^x$上の異なる 2 点$\mathrm{A}(a,\ e^a)$，$\mathrm{P}(t,\ e^t)$における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを$L_a(t)$で表す。さらに，$r(a)=\lim_{t\to a}L_a(t)$と定義する。

(1)　$r(a)$を求めよ。

(2)　aが実数全体を動くとき，$r(a)$の最小値を求めよ。　［2005 筑波大］

5 $a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。 [2006 東京大]

6 x,y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=0,\ a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 $(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。 [2007 京都大]

7 n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle\mathrm{OA_1A_2}$ は $\angle\mathrm{OA_2A_1}=90^\circ$，$\mathrm{OA_1}=1$，$\mathrm{A_1A_2}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。$\mathrm{A_2}$ から $\mathrm{OA_1}$ へ垂線を下ろし，交点を $\mathrm{A_3}$ とする。$\mathrm{A_3}$ から $\mathrm{OA_2}$ へ垂線を下ろし，交点を $\mathrm{A_4}$ とする。以下同様に，$k=4,\ 5,\ \cdots$ について，A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし，交点を A_{k+1} として，順番に $\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，$\cdots$ を定める。$\overrightarrow{h_k}=\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $k=1,\ 2,\ \cdots$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

(2) $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$\displaystyle e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。 [2008 東北大]

8 実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。$a,\ b$ を正の実数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。 [2008 東京工大]

9　正の実数 r と $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ とおく。a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を漸化式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2)　$\dfrac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3)　$\theta\neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。　　[2010 北海道大]

10　a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(*)\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような a を小さい順に並べたものを a_1，a_2，a_3，$\cdots$とする。ここに[　]はガウス記号で，実数 u に対し，$[u]$は u 以下の最大の整数を表す。

(1)　$a=7,\ 8,\ 9$ の各々について(＊)の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2)　a_1，a_2 を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。　　[2010 東京工大]

11　a が正の実数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。　　[2012 京都大]

12　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n>1$ となることを示せ。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを示せ。

(4)　$0<r<1$ を満たすある実数 r に対して，不等式

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　　[2012 東北大]

13 正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。　[2013 東京工大]

14 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1 = 5$，$a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。また，数列 $\{b_n\}$ を，$b_n = \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3 + \dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。　[2015 東京工大]

15 一般項が $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。　[2016 新潟大]

16 円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。

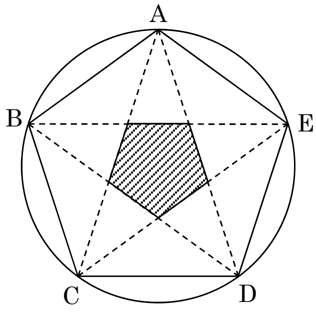
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2 = y(y - x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の 1 辺の長さを x を用いて表せ。

(4) $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{S_1} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$ を求めよ。　[2016 大阪大]



斜線部分が R_2

17 数列$\{a_n\}$を次の条件によって定める。

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_5を求めよ。

(2) a_{n+1}をa_nの式で表せ。

(3) 無限級数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$が収束することを示し，その和を求めよ。 ［2017 千葉大］

18 nを自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数xに対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式を満たすSの値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx$$

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leqq \frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。 ［2017 神戸大］

19 xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を$[\,a\,]$で表す。記号$[\ \ ]$をガウス記号という。以下の問いではNを自然数とする。

(1) n を$0 \leqq n \leqq N$を満たす整数とする。点$(n,\ 0)$と点$\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2) 直線$y = x$と，x 軸，および直線$x = N$で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を$A(N)$とおく。このとき$A(N)$を求めよ。

(3) 曲線$y = N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0 \leqq x \leqq N)$と，x 軸，および直線$x = N$で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を$B(N)$とおく。(2)の$A(N)$に対して$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{B(N)}{A(N)}$を求めよ。 ［2017 筑波大］

20 k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3) (2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

［2018 神戸大］

21 $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ とし，$c\geqq\pi$ とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1=c$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1) $f(\pi)$ を求めよ。また，$x\geqq\pi$ のとき，$0<f'(x)\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，$a_n\geqq\pi$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

［2018 筑波大］

極　　限

【解答例と解説】

1 [2002 京都大]

条件より，$n(n-2)a_{n+1}=S_n\ (n\geqq 1)$………①

$(n-1)(n-3)a_n=S_{n-1}\ (n\geqq 2)$………②

①－②より，$n(n-2)a_{n+1}-(n-1)(n-3)a_n=a_n$，$n(n-2)a_{n+1}=(n-2)^2a_n$

$n\geqq 3$ で，$na_{n+1}=(n-2)a_n$

$n(n-1)a_{n+1}=(n-1)(n-2)a_n$

よって，$(n-1)(n-2)a_n=(3-1)(3-2)a_3=2a_3$

$$a_n=\frac{2a_3}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$$

ここで，①に $n=1$ を代入すると，$1\cdot(-1)a_2=S_1$，$-a_2=a_1$ より，$a_2=-a_1=-1$

さて, $n\geqq 3$ で，$S_n=a_1+a_2+\sum_{k=3}^{n}a_k=1-1+\sum_{k=3}^{n}\frac{2a_3}{(k-1)(k-2)}$

$$=2a_3\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)=2a_3\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$$

条件より，$\lim_{n\to\infty}S_n=1$ なので，$2a_3=1$，$a_3=\frac{1}{2}$

以上より，$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_n=\frac{1}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$

［解 説］

①に $n=2$ を代入して a_3 の値を求めようとしましたが，$0\cdot a_3=0$ となり，何も得られませんでした。そこで，$\lim_{n\to\infty}S_n=1$ の利用となったわけです。

$\boxed{2}$ ［2003 東北大］

(1) $0<a_n<2$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき $a_1=c$ （$0<c<2$）より成立する。

(ii) $n=k$ のとき $0<a_k<2$ が成立すると仮定する。

ここで，$f(a_k)=4a_k-{a_k}^2=-(a_k-2)^2+4$ で，$0<a_k<2$ より，$0<f(a_k)<4$ すなわち $0<\sqrt{f(a_k)}<2$ となる。よって，$0<a_{k+1}<2$ が成立する。

(i)(ii)より，$0<a_n<2$ が成立する。

また，$a_{n+1}-a_n=\sqrt{4a_n-{a_n}^2}-a_n=\dfrac{4a_n-{a_n}^2-{a_n}^2}{\sqrt{4a_n-{a_n}^2}+a_n}=\dfrac{2a_n(2-a_n)}{\sqrt{4a_n-{a_n}^2}+a_n}>0$

よって，$a_n<a_{n+1}$ が成立する。

(2) まず，$2-a_{n+1}=2-\sqrt{4a_n-{a_n}^2}=\dfrac{4-(4a_n-{a_n}^2)}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}=\dfrac{2-a_n}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}(2-a_n)$

ここで，$c=a_1\leqq a_n$ より $0<2-a_n\leqq 2-c$，また $2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}>2$ なので，

$$0<\frac{2-a_n}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}<\frac{2-c}{2}$$

よって，$2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ となる。

(3) (2)より，$0<2-a_n\leqq(2-a_1)\left(\dfrac{2-c}{2}\right)^{n-1}$ （等号は $n=1$ のとき成立）

$0<\dfrac{2-c}{2}<1$ より，$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{2-c}{2}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$2-a_n\to 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

［解 説］

毎年，出題を見かける有名問題です。誘導も詳しいので，解の道筋は明快です。

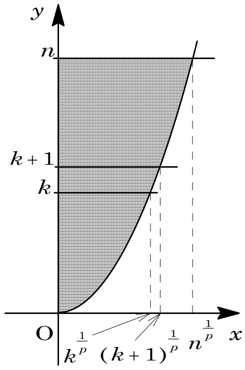
３　　［2003 九州大］

(1)　まず，二項定理より，$0 \leqq k \leqq n-1$，p を自然数として，

$$\left(k^{\frac{1}{p}}+1\right)^p \geqq k+1,\ \ k^{\frac{1}{p}}+1 \geqq (k+1)^{\frac{1}{p}}$$

$$(k+1)^{\frac{1}{p}}-k^{\frac{1}{p}} \leqq 1$$

なお，等号は $p=1$ または $k=0$ のときに成立する。



これより，$k \leqq y \leqq k+1$ において，$y=x^p$ のグラフと交わる単位正方形は，ただ 1 つとなる。したがって，$0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}}$ すなわち $0 \leqq y \leqq n$ のとき，$y=x^p$ と交わる単位正方形の個数は n である。

(2)　$k \leqq y \leqq k+1$ において，$y=x^p$ のグラフと y 軸にはさまれた部分の面積を $S_{n,\,k}$，この部分にあり，$y=x^p$ と交わらない単位正方形の個数を $M_{n,\,k}$ とすると，

$$1\times M_{n,\,k} < S_{n,\,k} < 1\times(M_{n,\,k}+1),\ \ \sum_{k=0}^{n-1}M_{n,\,k} < \sum_{k=0}^{n-1}S_{n,\,k} < \sum_{k=0}^{n-1}(M_{n,\,k}+1)$$

条件より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}S_{n,\,k}=S_n$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}M_{n,\,k}=M_n$ なので，$M_n < S_n < M_n+n$ である。

また，$\displaystyle S_n = n^{\frac{1}{p}}\cdot n-\int_0^{n^{\frac{1}{p}}}x^p dx = n^{\frac{1}{p}+1}-\frac{1}{p+1}\Big[x^{p+1}\Big]_0^{n^{\frac{1}{p}}} = n^{\frac{1}{p}+1}-\frac{1}{p+1}n^{\frac{1}{p}+1}$

$$=\left(1-\frac{1}{p+1}\right)n^{\frac{p+1}{p}}=\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}$$

(3)　$y=k$ 上の格子点の個数は $M_{n,\,k}+1$，$y=n$ 上の格子点の個数は $\left[n^{\frac{1}{p}}\right]+1$ より，

$$L_n=\sum_{k=0}^{n-1}(M_{n,\,k}+1)+\left[n^{\frac{1}{p}}\right]+1=M_n+n+\left[n^{\frac{1}{p}}\right]+1$$

(2)より，$S_n-n<M_n<S_n$ なので，$S_n+\left[n^{\frac{1}{p}}\right]+1<L_n<S_n+\left[n^{\frac{1}{p}}\right]+n+1$

さらに，$n^{\frac{1}{p}}-1<\left[n^{\frac{1}{p}}\right]\leqq n^{\frac{1}{p}}$ より，$S_n+n^{\frac{1}{p}}<L_n<S_n+n^{\frac{1}{p}}+n+1$

$$\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}+n^{\frac{1}{p}}<L_n<\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}+n^{\frac{1}{p}}+n+1$$

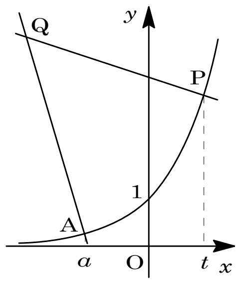
$$\frac{p}{p+1}+n^{-1}<n^{-\frac{p+1}{p}}L_n<\frac{p}{p+1}+n^{-1}+n^{-\frac{1}{p}}+n^{-\frac{p+1}{p}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n=\frac{p}{p+1}$ である。

［解　説］

S_n，M_n，L_n の 3 者がうまく連関するように誘導がつけられています。

4 ［2005 筑波大］



(1) $C : y = e^x$ より，$y' = e^x$

$\mathrm{A}(a,\ e^a)$ における法線の方程式は,

$$y - e^a = -\frac{1}{e^a}(x-a) \cdots\cdots\cdots ①$$

$\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における法線の方程式は,

$$y - e^t = -\frac{1}{e^t}(x-t) \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$y - e^a + e^a - e^t = -\dfrac{1}{e^t}(x - a + a - t)$

①を代入すると，$-\dfrac{1}{e^a}(x-a) + \dfrac{1}{e^t}(x-a) = e^t - e^a + \dfrac{1}{e^t}(t-a)$

$$x - a = -e^a e^t - e^a\,\frac{t-a}{e^t - e^a}$$

さて，条件より，$L_a(t) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-e^a)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + \dfrac{1}{e^{2a}}(x-a)^2}$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2a}}}\,|x-a|$$

ここで，$\displaystyle\lim_{t\to a}|x-a| = \lim_{t\to a}\left(e^a e^t + e^a\,\frac{t-a}{e^t - e^a}\right) = (e^a)^2 + e^a \cdot \frac{1}{e^a} = e^{2a} + 1$ から，

$$r(a) = \lim_{t\to a} L_a(t) = \sqrt{1 + \frac{1}{e^{2a}}}\,(e^{2a}+1) = \frac{\sqrt{(e^{2a}+1)^3}}{e^a}$$

(2) $e^{2a} = s > 0$，$f(s) = \dfrac{(s+1)^3}{s}$ とおくと, (1)より，$r(a) = \sqrt{f(s)}$ となる。

$$f'(s) = \frac{3(s+1)^2 s - (s+1)^3}{s^2}$$

$$= \frac{(s+1)^2(2s-1)}{s^2}$$

s	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗

右表より，$f(s)$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとるので，

$r(a)$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{27}{4}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

［解 説］

計算量が多いので，少し工夫をしています。なお，$\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{t-a}{e^t - e^a}$ は，微分係数の定義を利用して，極限値を求めています。

$\boxed{5}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2006 東京大]

(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$より，帰納的に$a_n>0$である。

さて，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(1+a_n)^2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+2+a_n\cdots\cdots(*)$から，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+2+\frac{1}{b_n}$$

以下，数学的帰納法を用いて，$n>1$のとき$b_n>2n$となることを示す。

(i)　$n=2$のとき

$b_2=b_1+2+\dfrac{1}{b_1}=2+2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}>2\times2$となり，$n=2$のとき成立する。

(ii)　$n=k$のとき

$b_k>2k$と仮定すると，$b_{k+1}=b_k+2+\dfrac{1}{b_k}>b_k+2>2(k+1)$

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$n>1$のとき$b_n>2n$である。

(2)　(1)より，$n\geqq2$において$b_n=\dfrac{1}{a_n}>2n$より，$a_n<\dfrac{1}{2n}$となるので，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^n\frac{1}{x}\,dx$$

よって，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\dfrac{1}{2}\left(1+\left[\,\log x\,\right]_1^n\right)=\dfrac{1}{2}(1+\log n)$となり，

$$0<\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$

(3)　$(*)$より，$a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}-2$なので，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}-2\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}-2n=\frac{1}{a_{n+1}}-2n-2$$

よって，$\displaystyle\frac{1}{a_{n+1}}=\sum_{k=1}^{n}a_k+2n+2$より，$\displaystyle\frac{1}{na_{n+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\frac{2}{n}$

すると，(2)より，$n\to\infty$のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\frac{2}{n}\to2$となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\frac{1}{2}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot na_{n+1}=\frac{1}{2}$

［解　説］

適切な誘導のついている数列と微積分の総合問題で，演習すべき１題です。

6 ［2007 京都大］

k を 0 でない定数として，漸化式 $a_{n+1} = xa_n + y^{n+1}$ ……①を満たす 1 つの数列を $a_n = ky^n$ とすると，

$$ky^{n+1} = kxy^n + y^{n+1} \cdots\cdots\cdots②$$

②より, $x>0$, $y>0$, $x \neq y$ なので，$ky = kx + y$，$k = \dfrac{y}{y-x}$

①－②より，$a_{n+1} - ky^{n+1} = x(a_n - ky^n)$

$a_1 = 0$ から，$a_n - ky^n = (a_1 - ky^1)x^{n-1} = -kyx^{n-1}$

$$a_n = ky(y^{n-1} - x^{n-1}) = \frac{y^2}{y-x}(y^{n-1} - x^{n-1}) \cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$y>x$ のとき

$0<\dfrac{x}{y}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n = 0$ となり，③より，

$$a_n = \frac{y^2}{y-x}y^{n-1}\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$$

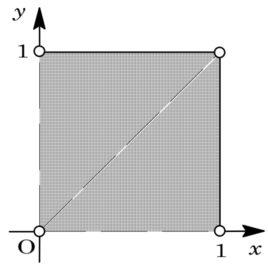
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束する条件は, $0<y\leqq 1$ である。

(ii)　$x>y$ のとき

$0<\dfrac{y}{x}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^n = 0$ となり，③より，

$$a_n = \frac{y^2}{y-x}x^{n-1}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} - 1\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束する条件は，$0<x\leqq 1$ である。



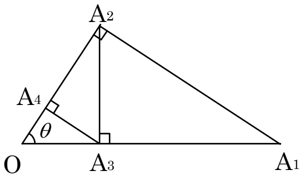
(i)(ii)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束するような点 $(x,\ y)$ を図示すると，右図の網点部のようになる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。

［解 説］

漸化式の解法問題です。一般項が求まれば，収束する条件を丁寧に図示するだけです。なお，上記の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

7 ［2008 東北大］

(1) $\angle \mathrm{A_1OA_2}=\theta$ とおくと，$\sin\theta=\dfrac{\mathrm{A_1A_2}}{\mathrm{OA_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ より，



$\cos\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$ となり，

$$\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}=\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{n}}\,\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$$

よって，$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)^{k-1}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}$ のなす角は，$180°-\theta$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}&=\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k}\cos(180°-\theta)\\&=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)=-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}\end{aligned}$$

(2) (1)より，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}=\dfrac{-\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

さて，$e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1$

［解 説］

数列の極限についての基本問題です。相似な図形と等比数列が融合した構図となっています。

8 [2008 東京工大]

k を整数とするとき，$f(x)$ の定義より，$f(x+k)=f(x)+k$ となり，

$$f(ax-7)=f(ax)-7,\quad f(bx+3)=f(bx)+3$$

すると，$\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}=\dfrac{1}{f(ax)-7}-\dfrac{1}{f(bx)+3}$

$$=\frac{f(bx)-f(ax)+10}{(f(ax)-7)(f(bx)+3)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

同様に，$f(x)$ の定義より，$x\leqq f(x)<x+1$ となり，

$$ax\leqq f(ax)<ax+1,\quad bx\leqq f(bx)<bx+1$$

すると, $x>0$ において,

$$a\leqq\frac{f(ax)}{x}<a+\frac{1}{x},\quad b\leqq\frac{f(bx)}{x}<b+\frac{1}{x}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax)}{x}=a$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(bx)}{x}=b$

ここで，$g(x)=x^c\left(\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}\right)$とおくと，

(i) $a\neq b$ のとき

$(*)$より，$g(x)=x^{c-1}\cdot\dfrac{\dfrac{f(bx)}{x}-\dfrac{f(ax)}{x}+\dfrac{10}{x}}{\left(\dfrac{f(ax)}{x}-\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{f(bx)}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}$

すると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$は，$c-1>0$ のとき発散，$c-1\leqq 0$ のとき収束する。

よって，収束する c の最大値は$c=1$ で，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{b-a}{ab}$ である。

(ii) $a=b$ のとき

$(*)$より，$g(x)=x^{c-2}\cdot\dfrac{10}{\left(\dfrac{f(ax)}{x}-\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{f(ax)}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}$

すると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$は，$c-2>0$ のとき発散，$c-2\leqq 0$ のとき収束する。

よって，収束する c の最大値は$c=2$ で，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{10}{a^2}$ である。

［解 説］

題意を言い換えた不等式$x\leqq f(x)<x+1$ のみで評価すると，$a=b$ のときがアバウトになりすぎます。そこで，収束する形を作るという基本に戻ったのが上の解です。もっとも，さらに基本なのは「x が大きくなると $f(x)$ は x と同じようなもの」という感覚ですが。

9 [2010 北海道大]

(1) 条件より, $r>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ であり，

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

すると，帰納的に，$a_n>0$，$b_n>0$ である。

さて，$a_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{r\cos\theta+r}{2}=r\cdot\dfrac{\cos\theta+1}{2}=r\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$$b_1=\sqrt{a_1b_0}=\sqrt{r\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot r}=r\cos\frac{\theta}{2}$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{r\cos^2\dfrac{\theta}{2}+r\cos\dfrac{\theta}{2}}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\dfrac{\theta}{2}+1}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}$$

よって，$\dfrac{a_1}{b_1}=\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\dfrac{a_2}{b_2}=\cos\dfrac{\theta}{4}$

(2) 0 以上の整数 n に対して，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ であることを，数学的帰納法で証明する。

(i) $n=0$ のとき　$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ より，$\dfrac{a_0}{b_0}=\cos\dfrac{\theta}{2^0}$ となり成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$\dfrac{a_k}{b_k}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ すなわち $a_k=b_k\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ が成り立つと仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{b_k\cos\dfrac{\theta}{2^k}+b_k}{2}=b_k\cdot\frac{\cos\dfrac{\theta}{2^k}+1}{2}=b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

$$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}=\sqrt{b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}\cdot b_k}=b_k\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

よって，$\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\cos\dfrac{\theta}{2^{k+1}}$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, $n\geqq 0$ において，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ である。

(3) (2)より，$b_{n+1}=b_n\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ なので, $n\geqq 1$ で,

$$\begin{aligned}b_n&=b_0\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\end{aligned}$$

すると，
$$\begin{aligned}b_n\sin\frac{\theta}{2^n}&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2^n}r\sin\theta\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\frac{1}{2^n}r\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{r\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{r\sin\theta}{\theta}$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{r\sin\theta}{\theta}$

［解　説］

漸化式と極限についての問題です。解法の流れを読み取ることは難しくありません。ただ，(3)で，数列$\{b_n\}$の一般項を，2 倍角の公式を用いてまとめる部分は，経験がものをいいます。

10 [2010 東京工大]

(1) x を正の実数として，$x=\left[\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)\right]$……(＊)が解をもつ条件は,

$$x\leqq\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)<x+1\ \ (x\text{は正の整数})\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$2x^2\leqq x^2+a$ から，$x\leqq\sqrt{a}$

また，$x^2+a<2x^2+2x$ から $x^2+2x-a>0$ となり，$x>\sqrt{a+1}-1$ より，①は,

$$\sqrt{a+1}-1<x\leqq\sqrt{a}\ \ (x\text{は正の整数})\ \cdots\cdots\cdots②$$

$a=7$ のとき，②から $\sqrt{8}-1<x\leqq\sqrt{7}$ となり，解は $x=2$

$a=8$ のとき，②から $3-1<x\leqq\sqrt{8}$ となり，解なし

$a=9$ のとき，②から $\sqrt{10}-1<x\leqq 3$ となり，解は $x=3$

(2) $a=1$ のとき，②から $\sqrt{2}-1<x\leqq 1$ となり，解は $x=1$

$a=2$ のとき，②から $\sqrt{3}-1<x\leqq\sqrt{2}$ となり，解は $x=1$

$a=3$ のとき，②から $2-1<x\leqq\sqrt{3}$ となり，解なし

$a=4$ のとき，②から $\sqrt{5}-1<x\leqq 2$ となり，解は $x=2$

$a=5$ のとき，②から $\sqrt{6}-1<x\leqq\sqrt{5}$ となり，解は $x=2$

$a=6$ のとき，②から $\sqrt{7}-1<x\leqq\sqrt{6}$ となり，解は $x=2$

そこで, (1)の結果と合わせると, (＊)が解をもたないのは，$a=3,\ 8,\ \cdots$ となり,

$$a_1=3,\ a_2=8$$

(3) まず, n を正の整数として,

(i) $n^2\leqq a<(n+1)^2-1$ ($n\leqq\sqrt{a}$ かつ $\sqrt{a+1}-1<n$) のとき

②の整数解は，$x=n$ である。

(ii) $a=(n+1)^2-1$ のとき

②に代入すると，$n<x\leqq\sqrt{(n+1)^2-1}$ ………③

ここで，$\sqrt{(n+1)^2-1}-n=\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}<\dfrac{2n}{n+n}=1$ から，③は整数解をもたない。

(i)(ii)より，$a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$ となり,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

［解 説］

ガウス記号を題材としたおもしろい問題です。初めに考えた通りを記述しましたので, (2)は冗長な解答例となっています。

$\boxed{11}$ ［2012 京都大］

(i)　$0<a\leqq 1$ のとき

$1<1+a^n\leqq 2$ より，$1<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$$

(ii)　$a>1$ のとき

$a^n<1+a^n<2a^n$ より，$a<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

［解　説］

見かけよりは難です。極限を大雑把にとらえ不等式で評価しました。

12 ［2012 東北大］

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=2$ のとき　$a_1 = 1$ なので，$a_2 = \sqrt{\dfrac{3a_1+4}{2a_1+3}} = \sqrt{\dfrac{7}{5}} > 1$

(ii) $n=k$ のとき　$a_k > 1$ と仮定すると，

$$a_{k+1} - 1 = \sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{a_k+1}{2a_k+3}} - 1 > 0$$

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき，$a_n > 1$ である。

(2) $\alpha^2 = \dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ より，$2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$ となり，$(\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-4) = 0$

$\alpha > 0$ より，$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

(3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき　$\alpha - a_1 = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} - 1 = \dfrac{\sqrt{33}-5}{4} > 0$ より，$a_1 < \alpha$ が成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$a_k < \alpha$ と仮定する。

$$\alpha - a_{k+1} = \sqrt{\frac{3\alpha+4}{2\alpha+3}} - \sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}} = \frac{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} - \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}}$$

$$= \frac{(3\alpha+4)(2a_k+3) - (2\alpha+3)(3a_k+4)}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

$$= \frac{\alpha - a_k}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

よって，$\alpha - a_{k+1} > 0$ から，$a_{k+1} < \alpha$ である。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ である。

(4) (1)と(3)の結果より，$1 \leqq a_n < \alpha$ となり，

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_n+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_n+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_n+4)}\right\}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}\left(\sqrt{35}+\sqrt{35}\right)} = \frac{1}{10\sqrt{35}}$$

すると，$r = \dfrac{1}{10\sqrt{35}}$ とすることができ，このとき，$\alpha - a_{n+1} \leqq r(\alpha - a_n)$ なので，

$$0 < \alpha - a_n \leqq (\alpha - a_1)r^{n-1} = (\alpha - 1)r^{n-1}$$

よって，$0 < r < 1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha - a_n) = 0$，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

［解 説］

漸化式と極限についての頻出問題です。なお，誘導はていねいです。

$\boxed{13}$ [2013 東京工大]

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin 4nx\geqq\sin x$ を満たす x の範囲は，$0\leqq 4nx\leqq 2n\pi$ から，

$$2k\pi+x\leqq 4nx\leqq(2k+1)\pi-x\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

すると，$2k\pi+x\leqq 4nx$ より，$x\geqq\dfrac{2\pi}{4n-1}k$

また，$4nx\leqq(2k+1)\pi-x$ より，$x\leqq\dfrac{2\pi}{4n+1}k+\dfrac{\pi}{4n+1}$

よって，$\dfrac{2\pi}{4n-1}k\leqq x\leqq\dfrac{2\pi}{4n+1}k+\dfrac{\pi}{4n+1}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots(*)$

$(*)$の x の区間の長さを d_k，その総和を S_n とおくと，

$$d_k=\frac{2\pi}{4n+1}k+\frac{\pi}{4n+1}-\frac{2\pi}{4n-1}k$$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}d_k=\frac{2\pi}{4n+1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{\pi}{4n+1}n-\frac{2\pi}{4n-1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{n^2}{4n+1}\pi-\frac{n(n-1)}{4n-1}\pi=\frac{n(2n+1)}{(4n+1)(4n-1)}\pi$$

これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)}\pi=\frac{1}{8}\pi$ となる。

［解 説］

最初は和積公式で変形しましたが，深みにはまりそうなので，不等式を満たす x の範囲を，$x\leqq 4nx\leqq\pi-x$，$2\pi+x\leqq 4nx\leqq 2\pi+\pi-x$，$4\pi+x\leqq 4nx\leqq 4\pi+\pi-x$，$\cdots$として求め，それをまとめたのが，上の解答例です。

14 [2015 東京工大]

(1) $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}=4-\dfrac{1}{a_n-2}$ に対して，$a_1=5$ から，$a_2=4-\dfrac{1}{5-2}=\dfrac{11}{3}$

$a_3=4-\dfrac{1}{\frac{11}{3}-2}=\dfrac{17}{5}$，$a_4=4-\dfrac{1}{\frac{17}{5}-2}=\dfrac{23}{7}$

これより，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ と推測できるので，以下，数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{6-1}{2-1}=5$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき　$a_k=\dfrac{6k-1}{2k-1}$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=4-\frac{1}{a_k-2}=4-\frac{1}{\frac{6k-1}{2k-1}-2}=4-\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{6k+5}{2k+1}=\frac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}$$

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

(2) $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(6k-1)}{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\frac{1}{2k-1}\Big)$ とおくと，$s_n\leqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

さらに，$t_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ とおくと，$s_n\leqq 3t_n+2n$ となり，

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\frac{s_n}{t_n}\leqq\frac{3t_n+2n}{t_n}=3+\frac{2n}{t_n}=3+\frac{4}{n+1}$$

(3) $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\frac{1}{2k-1}\Big)>\sum_{k=1}^{n}3k=3t_n$ から，$b_n=\dfrac{s_n}{t_n}>\dfrac{3t_n}{t_n}=3$ となり，(2)から，

$3<b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$

よって，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{4}{n+1}\to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$ である。

［解 説］

丁寧な誘導のついた数列の極限の問題です。なお，(1)は普通に，推測→帰納法のパターンで記していますが，式変形により漸化式を解くことも可能です。

$\boxed{15}$ ［2016 新潟大］

(1) $n\geqq 2$ のとき，$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)n \leqq 1\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n=n^{n-1}$ となり，

$$0<\frac{n!}{n^n}\leqq\frac{n^{n-1}}{n^n}=\frac{1}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

(2) $\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle b_n=\log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\log\frac{a_{kn}}{a_n}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!}\left(\frac{1}{k^kn^{k-1}}\right)^n=\frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!}-\log k^kn^{k-1}\\
&=\frac{1}{n}\log\{(n+1)(n+2)\cdots(kn)\}-k\log k-(k-1)\log n\\
&=\frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn)\}-(k-1)\log n-k\log k\\
&=\frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn)-(k-1)n\log n\}-k\log k\\
&=\frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn)-(kn-n)\log n\}-k\log k\\
&=\frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots+\log\frac{n+(k-1)n}{n}\right\}-k\log k\\
&=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{(k-1)n}{n}\right)\right\}-k\log k
\end{aligned}$$

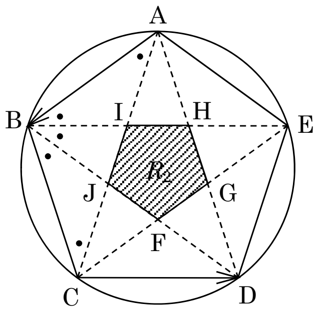
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}b_n&=\int_0^{k-1}\log(1+x)\,dx-k\log k\\
&=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^{k-1}-\int_0^{k-1}dx-k\log k\\
&=k\log k-(k-1)-k\log k=1-k
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{b_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{1-k}$ である。

［解 説］

誘導のない極限の設問 3 題で構成されています。しかも，各問の相互関係もあまり感じられません。

16　　[2016 大阪大]



(1)　5 点 A, B, C, D, E は円周を 5 等分しているので,

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}$$

これより，右図のように，対角線の交点を F, G, H, I, J とおくと，△ABC と△AIB は相似となり，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AI}=\mathrm{AC}:\mathrm{AB}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}+\angle\mathrm{DBC}$ であるので，$\angle\mathrm{CIB}=\angle\mathrm{CBI}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=y$ とすると，

$$\mathrm{AI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CB}=y-x\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x:(y-x)=y:x$ となり，$x^2=y(y-x)\cdots\cdots\cdots③$

(2)　③より，$y^2-xy-x^2=0$ となり，$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\cdots\cdots\cdots④$

また，AD // BC，$\mathrm{AD}=y$，$\mathrm{BC}=x$ なので，④から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\vec{c}$ となり，

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$

(3)　R_2 の 1 辺 IJ の長さは，$\mathrm{IJ}=\mathrm{AJ}-\mathrm{AI}=x-(y-x)=2x-y$ となるので，④から，

$$\mathrm{IJ}=2x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　相似な図形 R_{n+1} と R_n の面積比は，(3)より $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ であるので，

$$S_{n+1}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}S_n$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{1+\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{9-3\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

[解　説]

正五角形を題材とした有名問題です。三角関数をベースに考えなくてもよいように，相似に着目させる誘導がついています。

17 [2017 千葉大]

(1) $a_1=2$ で，$b_n=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ とおくと，$a_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}$ ……①となり，

$$b_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ a_2=1+\frac{1}{b_1}=1+2=3$$

$$b_2=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6},\ a_3=1+\frac{1}{b_2}=1+6=7$$

$$b_3=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{42},\ a_4=1+\frac{1}{b_3}=1+42=43$$

$$b_4=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}\right)=\frac{1}{1806},\ a_5=1+\frac{1}{b_4}=1+1806=1807$$

(2) ①より，$a_{n+1}-1=\frac{1}{b_n}$ から $a_{n+1}\neq 1$ で，しかも $a_1\neq 1$ なので，$a_n\neq 1$ である。

これより，$b_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}$ ……②となり，$n\geqq 2$ で $b_{n-1}=\frac{1}{a_n-1}$ ……③である。

すると，②－③から，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}$ となり，

$$-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1},\ \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}$$

よって，$n\geqq 2$ で，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$ ………④

$n=1$ のときは，$a_2-1=3-1=2$，$a_1(a_1-1)=2\cdot 1=2$ となり，このときも④は成立しているので，$n\geqq 1$ で，

$$a_{n+1}=a_n(a_n-1)+1 \text{ ………⑤}$$

(3) ⑤から，$a_{n+1}-a_n=a_n^{\ 2}-2a_n+1=(a_n-1)^2>0$ となり，$a_n\geqq a_1=2$ なので，

$$a_{n+1}\geqq a_n(2-1)+1=a_n+1$$

すると，$a_n\geqq 2+(n-1)=n+1$ から，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となる。

さて，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-b_n$ なので，②から，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{a_{n+1}-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=1$$

［解 説］

漸化式と極限の問題です。与えられた漸化式は扱いにくそうですが，誘導に従えばそれほどではありません。

18 [2017 神戸大]

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}=\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k=\frac{1-(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}=\frac{1-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$ より,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{-(-1)^{n+1}e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) ①の両辺を 0 から 1 まで積分すると,

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx-\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\cdots\cdots\cdots②$$

ここで, $\displaystyle\int_0^1\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり,

$$\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1=\log\frac{e+1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}\,dx&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=(-1)^0\int_0^1 e^0\,dx+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\\&=1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\Big[\frac{e^{-kx}}{-k}\Big]_0^1=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}\end{aligned}$$

②より, $\displaystyle 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-\log\frac{e+1}{2}=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ となり,

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2}-1=\log\frac{e+1}{2e}$$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ において, $1+e^{-x}\geqq 1$ より,

$$\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\int_0^1 e^{-(n+1)x}dx=\Big[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\Big]_0^1=\frac{1-e^{-(n+1)}}{n+1}\leqq\frac{1}{n+1}$$

すると, $\displaystyle\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|=\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$ から, $n\to\infty$ のとき,

$$\left|(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\right|\to 0,\ (-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\to 0$$

ここで, (2)から, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$ なので,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}=\log\frac{e+1}{2e}+\lim_{n\to\infty}(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx=\log\frac{e+1}{2e}$$

［解 説］

定積分と無限級数の融合問題です。細かく誘導がつけられているので，方針に迷うことはないでしょう。

19 ［2017 筑波大］

(1) 点$(n,\ 0)$と点$\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$を結ぶ線分上の格子点の座標を$(n,\ l)$とおくと，

$l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]$より，その個数は$\left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]+1$である。

(2) 直線$y=x$, x軸，$x=N$で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数$A(N)$は,

$$A(N)=1+\sum_{k=1}^{N}(k+1)=\sum_{k=1}^{N+1}k=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)\cdots\cdots\cdots①$$

(3) 曲線$y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)\ (0\leqq x\leqq N)$, x軸，直線$x=N$で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数$B(N)$は,

$$B(N)=1+\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]+1\right\}=N+1+\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\cdots\cdots\cdots②$$

さて，一般的に，$[a]\leqq a<[a]+1$から，$a-1<[a]\leqq a$となり，

$$N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-1<\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-N<\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

②より，$1+N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)<B(N)\leqq N+1+N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$となり，①から，

$$\frac{2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}<\frac{B(N)}{A(N)}\leqq\frac{2N+2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$$

さて，$I(N)=\dfrac{2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$，$J(N)=\dfrac{2N+2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$とおくと，

$$I(N)=\frac{2}{(N+1)(N+2)}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$J(N)=\frac{2}{N+2}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

すると，$N\to\infty$のとき，$\dfrac{\pi}{2N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$より，

$$I(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi},\quad J(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi}$$

したがって，$I(N)<\dfrac{B(N)}{A(N)}\leqq J(N)$から，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}=\frac{4}{\pi}$となる。

［解 説］

格子点の個数を題材にした数列の極限の問題ですが，それに区分求積が絡むという味付けが施されています。

20 ［2018 神戸大］

(1) kを 2 以上の整数とし，$f(x)=\frac{1}{k}\Big((k-1)x+\frac{1}{x^{k-1}}\Big)$ $(x>0)$に対して，

$$f'(x)=\frac{1}{k}\Big(k-1-\frac{k-1}{x^k}\Big)=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{x^k-1}{x^k}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

また，$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，

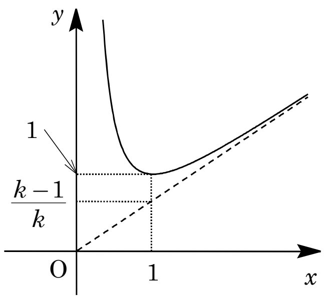
$x\to\infty$ のとき，漸近線 $y=ax+b$ の存在を仮定すると，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\Big(k-1+\frac{1}{x^k}\Big)=\frac{k-1}{k}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\Big(f(x)-\frac{k-1}{k}x\Big)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{x^{k-1}}=0$$

よって，漸近線は，$x=0$ および $y=\frac{k-1}{k}x$ となり，

$y=f(x)$のグラフの概形は右図のようになる。



(2) $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$のとき，$x_n>1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i) $n=1$のとき　$x_1>1$より成立する。

(ii) $n=l$のとき　$x_l>1$と仮定すると, (1)から $x_{l+1}=f(x_l)>1$となる。

よって，$n=l+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n>1$である。

(3) $x_{n+1}=f(x_n)$，$1=f(1)$より，$x_{n+1}-1=f(x_n)-f(1)\cdots\cdots\cdots$①

ここで，$x_n>1$のとき，平均値の定理より，ある c_n $(1<c_n<x_n)$において，

$$f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x_{n+1}-1=f'(c_n)(x_n-1)$となるので，

$$x_{n+1}-1=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{c_n^k-1}{c_n^k}(x_n-1)=\frac{k-1}{k}\Big(1-\frac{1}{c_n^k}\Big)(x_n-1)$$

さらに，$k\geqq2$ で $0<1-\frac{1}{c_n^k}<1$から，$x_{n+1}-1<\frac{k-1}{k}(x_n-1)\cdots\cdots\cdots$③

すると，$x_n-1>0$であり, ③から $n\geqq2$ において，

$$0<x_n-1<(x_1-1)\Big(\frac{k-1}{k}\Big)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

よって，$0<\frac{k-1}{k}<1$から, ④より $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-1)=0$ すなわち $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ である。

［解 説］

非常に丁寧な誘導のついた数列の極限問題です。(1)で問われている斜めの漸近線, (3)の平均値の定理の利用については, 必須技法の 1 つです。

21 [2018 筑波大]

(1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ に対して，$f(\pi)=\displaystyle\int_0^\pi \frac{4\pi}{t^2+\pi^2}dt$ となる。

$t=\pi\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dt=\dfrac{\pi}{\cos^2\theta}d\theta=\pi(1+\tan^2\theta)d\theta$ より，

$$f(\pi)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\pi}{\pi^2(\tan^2\theta+1)}\cdot\pi(1+\tan^2\theta)d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi$$

また，$f'(x)=\dfrac{4\pi}{x^2+\pi^2}$ となり，$x\geqq\pi$ のとき $x^2+\pi^2\geqq 2\pi^2$ から，

$$0<\frac{1}{x^2+\pi^2}\leqq\frac{1}{2\pi^2},\ \ 0<f'(x)\leqq\frac{1}{2\pi^2}\cdot 4\pi=\frac{2}{\pi}$$

(2) 数列$\{a_n\}$が $a_1=c\geqq\pi$，$a_{n+1}=f(a_n)$ を満たすとき，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき　$a_1=c\geqq\pi$ より成立。

(ii) $n=k$ のとき　$a_k\geqq\pi$ と仮定する。

このとき，(1)より $\pi=f(\pi)$ で，しかも $f'(x)>0$ から $f(x)$ は単調増加するので，

$$a_{k+1}-\pi=f(a_k)-f(\pi)\geqq 0$$

よって，$a_{k+1}\geqq\pi$ となり，$n=k+1$ のときも成立。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n\geqq\pi$ が成り立つ。

(3) まず，$a_n=\pi$ のときは $a_{n+1}=f(\pi)=\pi$ となり，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ は成立。

次に，$a_n>\pi$ のときは，平均値の定理より，

$$f(a_n)-f(\pi)=f'(b_n)(a_n-\pi)\ \ (\pi<b_n<a_n)$$

すると，$a_{n+1}-\pi=f(a_n)-f(\pi)$ と合わせて，

$$|a_{n+1}-\pi|=|f(a_n)-f(\pi)|=|f'(b_n)||a_n-\pi|\ \ (\pi<b_n<a_n)$$

ここで，(1)から $0<f'(b_n)\leqq\dfrac{2}{\pi}$ なので，$|f'(b_n)||a_n-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ となり，

$$|a_{n+1}-\pi|\leqq\frac{2}{\pi}|a_n-\pi|$$

以上より，すべての自然数 n に対して，$|a_{n+1}-\pi|\leqq\dfrac{2}{\pi}|a_n-\pi|$ が成り立ち，

$$|a_n-\pi|\leqq|a_1-\pi|\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}=(c-\pi)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}$$

すると，$n\to\infty$ のとき $(c-\pi)\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|a_n-\pi|=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\pi$$

［解　説］

平均値の定理を利用して，数列の極限を求める有名問題です。