2020 入試対策
2次数学アーカイブ

微分と積分

文系＋理系

1998−2019

外林康治 編著

電送数学舎

微分と積分

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 aは0でない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となるaの値を求めよ。 [1998 東京大]

2 (1) 曲線$y=x^3$と直線$y=3x+a$が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2) aが(1)の範囲を動くとき, 3 つの交点を A, B, C とし, 点$(a,\ 4a)$を D とする。3 つの線分の長さの積$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$の最大値を求めよ。 [1999 一橋大]

3 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし, 高さが$\sqrt{3}$の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C, 底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1) 直円錐の展開図を用いて, lの長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して, 線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ としてCP^2を$\sin\theta$で表せ。ただし, $0°\leqq\theta\leqq180°$とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし, A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0°<\theta\leqq 90°$の範囲で$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$の最大値を求めよ。 [1999 九州大]

4 3 次関数$y=x^3+kx$のグラフを考える。連立不等式

$$y>-x,\ \ y<-1$$

が表す領域をAとする。Aのどの点からも上の 3 次関数のグラフに接線が 3 本引けるための, kについての必要十分条件を求めよ。 [1999 京都大・文]

5 a を実数とする。x の 2 次方程式$x^2-ax=2\int_0^1|t^2-at|\,dt$は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。 [2000 京都大・文]

6 $f(x)=x^4+x^3-3x^2$とおく。曲線$y=f(x)$に点$(0,\ a)$から接線がただ一つ引けるとし, しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときのaの値を求めよ。 [2001 大阪大・理]

7 xy平面上の曲線$C:y=x^3$上の点 P における接線を, P を中心にして反時計回りに$45°$回転して得られる直線を L とする。C と L が, 相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。 [2001 京都大・理]

８ 頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1) 円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2) 円錐の体積の最小値を求めよ。 [2002 一橋大]

９ 実数 t に対して，u の 3 次方程式 $u^3-3u+2t=0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて，$x=f(t)$，$y=-2t$ （t は実数）と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め，$f(t)$ のグラフをかけ。 [2003 千葉大・理]

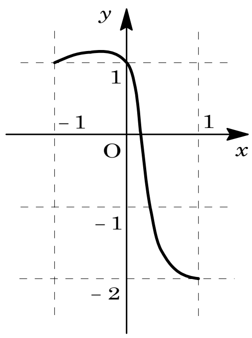
10 放物線 $C: y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする。線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。 [2003 大阪大・文]

11 区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が，

$$f(-1)=f(0)=1,\ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geqq -1$ を示せ。 [2004 京都大・文]



12 関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。 [2004 東京大・文]

13　a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\quad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して, 2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき, 少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。　[2005 一橋大]

14　$0 \leqq k \leqq 1$ を満たす実数 k に対して, xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y \geqq x^2$, $y \leqq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leqq x^2$, $y \geqq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leqq -x^2+2x$, $y \geqq kx$ で表される領域

(1)　領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と, その最小値を求めよ。

[2006 名古屋大・文]

15　(1)　関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $f(x)=a$（a は実数）が相異なる 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもつとする。$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3)　a が(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。　[2007 名古屋大・理]

16　xy 平面において, 放物線 $y=x^2$ を C とする。また, 実数 k を与えたとき, $y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき, k の満たす条件を求めよ。

(2)　k が(1)の条件を満たすとき, C と l および 2 直線 $x=-2$, $x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。　[2007 大阪大・文]

17　放物線 $C: y=x^2$ 上の点 P における法線とは, 点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2)　y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。　[2008 九州大・文]

18　$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$とし，方程式$f(x)=0$について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$f(x)=0$は絶対値が２より小さい３つの相異なる実数解をもつ。

(2)　αが$f(x)=0$の解ならば，$g(\alpha)$も$f(x)=0$の解となる。

(3)　$f(x)=0$の解を小さい順にα_1，α_2，α_3とすれば,

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\ g(\alpha_2)=\alpha_1,\ g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。　[2009　神戸大・理]

19　kは定数で，$k>0$とする。曲線$C: y=kx^2\ (x\geqq 0)$と２つの直線$l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$との交点のx座標をそれぞれα，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha-\beta$の値を求めよ。

(2)　$\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$および$\alpha^3-\beta^3$をkを用いて表せ。

(3)　曲線Cと２直線l, mとで囲まれた部分の面積を最小にするkの値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。　[2010　広島大・文]

20　３辺の長さがaとbとcの直方体を，長さがbの１辺を回転軸として$90°$回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体をVとする。

(1)　Vの体積をa, b, cを用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$のとき, Vの体積のとりうる値の範囲を求めよ。　[2010　東京大・理]

21　xyz空間で，原点Oを中心とする半径$\sqrt{6}$の球面Sと３点$(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$を通る平面αが共有点をもつことを示し，点$(x,\ y,\ z)$がその共有点全体の集合を動くとき，積xyzが取り得る値の範囲を求めよ。　[2011　京都大・理]

22　関数$f(x)=x^3+3x^2+x-1$を考える。曲線$C: y=f(x)$について，以下の問いに答えよ。

(1)　$t\geqq 0$のとき，曲線Cは傾きがtである接線を２本もつことを示せ。

(2)　(1)において，傾きがtである２本の接線と曲線Cとの接点を，それぞれ$\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$とする（ただし$p<q$)。このとき，点Pと点Qは点$\mathrm{A}(-1,\ 0)$に関して対称の位置にあることを示せ。

(3)　$t\geqq 0$のとき, ２点P, Qの距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときのP, Qのx座標p, qもそれぞれ求めよ。　[2012　九州大・文]

23 a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。 [2012 一橋大]

24 a を正の定数とし, xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。
(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし, t は 0 でないとする。
(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。
(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。 [2012 名古屋大・理]

25 c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。
(1) $f(x)$ を求めよ。
(2) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。
(3) (2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。 [2013 神戸大・理]

26 原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。
(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を, p と q の式で表せ。
(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。
(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。 [2013 一橋大]

27 関数 $f(x)$ を $f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n \leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。
(1) $f(x) \geqq x$ であることを示せ。
(2) $f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。
(3) $0 \leqq x \leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。
(4) $0 \leqq a < 1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ を求めよ。 [2014 岡山大・文]

28 $a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1) $M(a)$ を求めよ。

(2) 実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3) a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。 ［2015 東北大・文］

29 実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を a, b を用いて表せ。

(2) $b\geqq 0$ のとき，M を a, b を用いて表せ。

(3) a, b が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。 ［2015 東京医歯大］

30 座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，$a,\ b$ は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。 ［2016 九州大・文］

31 a, b, c を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。 ［2017 筑波大・理］

32 $a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t\geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2) (1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

［2017 広島大・理］

33 a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

［2017 名古屋大・文］

34 a を正の数とし，t は $0\leqq t<a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3) s は $0\leqq s\leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t)\cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

［2018 千葉大］

35 実数 $a,\ b,\ c$ に対し，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x)=f'(x)g(x)-6x$ を満たしているとする。

(1) b と c を a で表せ。

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

［2018 北海道大・文］

微分と積分

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 東京大］

$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ より，

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

$f'(0)=-4<0$ から，$f'(x)=0$ は 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{a-\dfrac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4}}{3},\quad \beta=\frac{a-\dfrac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^2+4}}{3}$$

極大値と極小値の差を $g(a)$ とすると，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned}g(a)&=f(\alpha)-f(\beta)\\&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\&=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=9\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3\\&=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3\\&=\frac{3}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}\right\}^3\\&=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$g(a)$ は $a-\dfrac{1}{a}=0$，すなわち $a=\pm1$ のとき最小になる。

［解 説］

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題で，特殊な解法があります。ただし本問では，$f'(x)=0$ の解が $x=\dfrac{2}{3}a,\ -\dfrac{2}{3a}$ となりますので，a の正負で場合分けをして，直接 $g(a)$ を求めても，計算量がやや増える程度ですみます。

２　　　　[1999 一橋大]

(1)　$y = x^3 \cdots\cdots\cdots$①，$y = 3x + a \cdots\cdots\cdots$②

①②より，$x^3 - 3x = a \cdots\cdots\cdots$③

①と②が異なる 3 点で交わる条件は，曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = a$ が異なる 3 点で交わる条件と同値である。

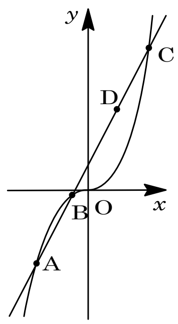
ここで，$f(x) = x^3 - 3x$ とおくと，

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右表より，求める条件は $-2 < a < 2$

(2)　③の解を $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma$（$\alpha < \beta < \gamma$）として，$\mathrm{A}(\alpha,\ 3\alpha + a)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 3\beta + a)$，$\mathrm{C}(\gamma,\ 3\gamma + a)$ とおく。



このとき，③を $x^3 - 3x - a = 0$ と変形すると，

$$x^3 - 3x - a = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \cdots\cdots\cdots④$$

このとき，$\mathrm{DA} = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (3\alpha + a - 4a)^2}$

$= \sqrt{10(\alpha - a)^2} = \sqrt{10}\,|\alpha - a|$

同様にして，$\mathrm{DB} = \sqrt{10}\,|\beta - a|$，$\mathrm{DC} = \sqrt{10}\,|\gamma - a|$

$$\begin{aligned}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC} &= 10\sqrt{10}\,|\alpha - a||\beta - a||\gamma - a| \\ &= 10\sqrt{10}\,|(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)| \\ &= 10\sqrt{10}\,|a^3 - 3a - a| \quad (④より) \\ &= 10\sqrt{10}\,|a^3 - 4a|\end{aligned}$$

ここで，$g(a) = a^3 - 4a$ とおくと，$g'(a) = 3a^2 - 4 = (\sqrt{3}a + 2)(\sqrt{3}a - 2)$

a	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

右表より，$|g(a)|$ は $a = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ をとる。

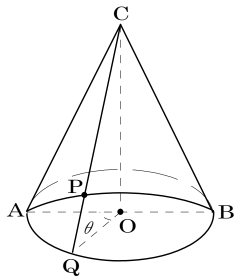
よって，$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値は $10\sqrt{10}\cdot\frac{16}{9}\sqrt{3} = \frac{160}{9}\sqrt{30}$ となる。

[解　説]

微分法の応用に関する問題です。本問のポイントは，強いて言えば，(2)で④式に注目することです。

$\boxed{3}$ ［1999 九州大］

(1) 母線 AC の長さは $\sqrt{1+3}=2$ となるので，側面の展開図の中心角を φ とすると，

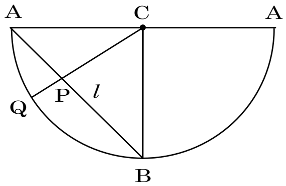


$$2\pi\cdot 1 = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{\varphi}{360^\circ}\ \text{より，}\ \varphi = 180^\circ$$

線分 AB は底面の直径なので，$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

よって，l の長さは展開図で $\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$ となる。

(2) 弧 AQ の長さは，底面では $2\pi\cdot 1\cdot\dfrac{\theta}{360^\circ}$ であるが，側面の展開図では $2\pi\cdot 2\cdot\dfrac{\angle\mathrm{ACQ}}{360^\circ}$ と表せるので，$\angle\mathrm{ACQ}=\dfrac{\theta}{2}$

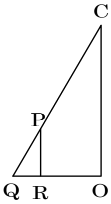


$\triangle$APC に正弦定理を適用すると，$\angle\mathrm{CAP}=45^\circ$ から，

$$\frac{\mathrm{CP}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin\left(135^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

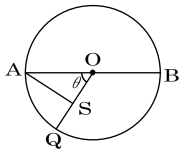
$$\mathrm{CP}=\frac{2\sin 45^\circ}{\sin\left(135^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

よって，$\mathrm{CP}^2=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{1+2\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{4}{1+\sin\theta}$



(3) $\triangle$COQ について考えると，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CQ}}$ から，

$$\mathrm{OR}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}}\ \text{より，}\ \mathrm{OR}^2=\frac{1}{1+\sin\theta}$$



次に底面について，$\mathrm{OS}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$ より $\mathrm{OS}^2=\cos^2\theta$

よって，$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}=\cos^2\theta(1+\sin\theta)=(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ より $0<t\leqq 1$

このとき，$f(t)=(1-t^2)(1+t)$ とおくと，

$$f'(t)=-2t(1+t)+(1-t^2)$$
$$=-(3t-1)(t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	

$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{32}{27}$ をとる。すなわち $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値は $\dfrac{32}{27}$ である。

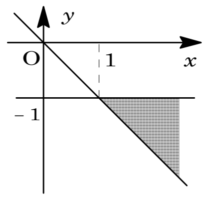
［解 説］

断面図や展開図を書かないと，位置関係がとらえきれない問題です。

4 ［1999 京都大・文］

領域$y>-x$，$y<-1$内の点を$(u,\ v)$とすると，$-u<v<-1$………①

ここで，$y=x^3+kx$上の接点を$(t,\ t^3+kt)$とおく。



$y'=3x^2+k$より，接線の方程式は，

$$y=(3t^2+k)(x-t)+(t^3+kt)=(3t^2+k)x-2t^3$$

点$(u,\ v)$を通ることより，$v=(3t^2+k)u-2t^3$

$$v=-2t^3+3ut^2+ku\ \cdots\cdots\cdots②$$

3 次関数のグラフに重複接線は引けないので，接線が 3 本引ける条件は，②が異なる 3 個の実数解をもつことに等しい。

②の右辺を$f(t)=-2t^3+3ut^2+ku$とおくと，

$$f'(t)=-6t^2+6ut=-6t(t-u)$$

$u>1$で，$f(0)=ku$，$f(u)=u^3+ku$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	u	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって求める条件は，$ku<v<u^3+ku$………③

すると，題意は①が成立する$(u,\ v)$に対して，つねに②が成立する条件となる。

すなわち，$u>1$において，$ku\leqq -u$……④かつ$-1\leqq u^3+ku$……⑤

④より，$u>1$なので$k\leqq -1$………⑥

⑤から，$g(u)=u^3+ku$とおくと，⑥から

$$g'(u)=3u^2+k=(\sqrt{3}u+\sqrt{-k})(\sqrt{3}u-\sqrt{-k})$$

(i) $\sqrt{-\dfrac{k}{3}}\geqq 1\ (k\leqq -3)$のとき

$u>1$において，$g(u)$の増減は右表のようになるが，$g(1)=1+k\leqq -2$より⑤を満たさない。

u	1	$\cdots$	$\sqrt{-\dfrac{k}{3}}$	$\cdots$
$g'(u)$		$-$	0	$+$
$g(u)$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii) $\sqrt{-\dfrac{k}{3}}<1\ (-3<k\leqq -1)$のとき

$u>1$において$g'(u)>0$となり，$g(u)$は単調増加するので，⑤を満たす条件は$g(1)=1+k\geqq -1$より，$k\geqq -2$となる。

(i)(ii)より，$-2\leqq k\leqq -1$

［解 説］

3 次曲線の接線の本数についての頻出問題ですが，それだけではなく，集合と論理という分野の一ひねりが加わっています。

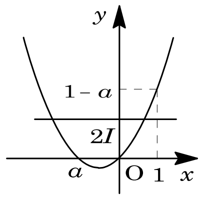
5 [2000 京都大・文]

$I=\int_0^1|t^2-at|\,dt$ とおくと, $x^2-ax=2I$ の解の個数は, $y=x^2-ax$ と $y=2I$ のグラフの共有点の個数と一致する。

(i) $a<0$ のとき

$$I=\int_0^1(t^2-at)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$$

$$2I-(1-a)=\frac{2}{3}-a-1+a=-\frac{1}{3}<0$$



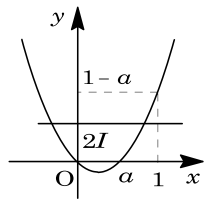
よって, $0<2I<1-a$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii) $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$I=\int_0^a-(t^2-at)\,dt+\int_a^1(t^2-at)\,dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_a^1$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$$

$$2I-(1-a)=\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}-1+a=\frac{1}{3}(2a^3-1)$$



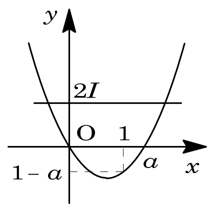
(ii-i) $2I\leqq 1-a$ $\left(0\leqq a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ のとき

$0<2I\leqq 1-a$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii-ii) $2I>1-a$ $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a\leqq 1\right)$ のとき

$0<1-a<2I$ となるので, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解はない。

(iii) $1<a$ のとき



$0<2I$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解はない。

(i)(ii)(iii)より, 求める解の個数は, $a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき 1 個, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a$ のとき 0 個である。

［解 説］

当然ですが, $I>0$ です。これが場合分けを少なくし, 議論をスッキリさせるポイントです。

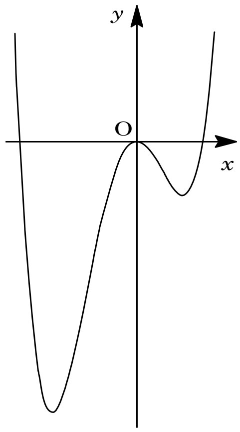
6 ［2001 大阪大・理］

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より，$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$

接点を$(t,\ t^4+t^3-3t^2)$とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^4+t^3-3t^2)=(4t^3+3t^2-6t)(x-t)$$

$$y=(4t^3+3t^2-6t)x-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots①$$



①が点$(0,\ a)$を通るので，

$$a=-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g(t)=-3t^4-2t^3+3t^2$ とおくと，

$$g'(t)=-12t^3-6t^2+6t$$
$$=-6t(2t-1)(t+1)$$

点$(0,\ a)$を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は，②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

すると，右表において$2>\dfrac{5}{16}$なので，$a=2$ のときである。

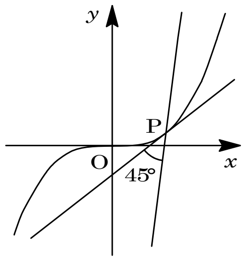
t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	2	↘	0	↗	$\frac{5}{16}$	↘

［解　説］

問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは，4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。

7 [2001 京都大・理]

$C: y=x^3$ より $y'=3x^2$ となるので，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における接線の傾きは $3t^2$ となる。この接線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta=3t^2$ である。



また，この接線を P のまわりに $45°$ 回転して得られる直線 L と，x 軸の正の向きとのなす角を φ とすると，

$$\tan\varphi=\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan 45°}{1-\tan\theta\tan 45°}=\frac{3t^2+1}{1-3t^2}$$

よって，$t\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，直線 $L: y-t^3=\dfrac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)$

なお，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，直線 L は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，条件を満たさない。

すると，C と L の共有点は，$x^3=\dfrac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)+t^3$ より，

$$x^3-t^3-\frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)=0,\ (x-t)\left(x^2+tx+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right)=0$$

よって，$x=t$ または $x^2+tx+t^2+\dfrac{3t^2+1}{3t^2-1}=0$ ………①

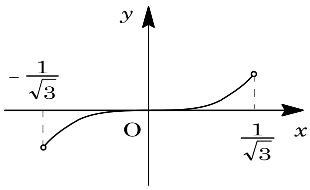
求める条件は，①が $x\neq t$ の異なる 2 実数解をもつことより，

$$t^2+t^2+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\neq 0\ \cdots\cdots②,\ D=t^2-4\left(t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right)>0\ \cdots\cdots③$$

②は $\dfrac{9t^4+1}{3t^2-1}\neq 0$ となるので，つねに成立する。

③より，$\dfrac{9t^4+9t^2+4}{3t^2-1}<0$，$3t^2-1<0$

よって，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，点 P の範囲を図示すると右図のようになる。

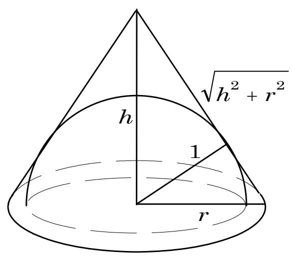


［解 説］

方針に迷いが生ずることはなく，どんどん計算を進めていくことができます。

$\boxed{8}$ ［2002 一橋大］

(1) 円錐の底面の半径を r, 高さを h とすると, 母線の長さは $\sqrt{h^2+r^2}$ となる。



このとき, 右図の断面に注目して,

$$1 : r = h : \sqrt{h^2+r^2}\,,\ \ \sqrt{h^2+r^2} = rh$$

$$h^2+r^2 = r^2h^2\,,\ \ r^2 = \frac{h^2}{h^2-1}$$

ここで, 円錐の表面積を S とすると,

$$S = \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi r^2 + \pi r^2 h = \pi(1+h)r^2$$

$$= \pi(1+h)\cdot\frac{h^2}{h^2-1} = \pi\cdot\frac{h^2}{h-1} = \pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^2}}$$

ここで, $\dfrac{1}{h} = t$ とおくと, $h>1$ より $0<t<1$ となり, さらに $f(t) = t-t^2$ とすると, $S = \dfrac{\pi}{f(t)}$ である。

$f(t) = -\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{1}{4}$ より, $S \geqq 4\pi$ となり, S の最小値は 4π である。

(2) 円錐の体積を V とすると,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^3}{h^2-1} = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{h^3}}$$

(1)と同様にして, $g(t) = t-t^3$ とおくと, $V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\pi}{g(t)}$

$$g'(t) = 1-3t^2$$

右表より, $g(t) \leqq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ となる。これより, $V \geqq \dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ となり, V の最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

［解 説］

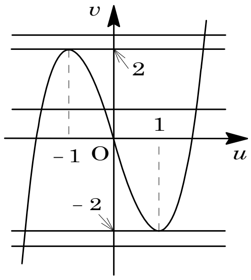
S の最小値は相加平均と相乗平均の関係を用いて求められましたが, V の最小値についてはうまくいきません。そこで, 考え直して作ったのが上の解です。

9 ［2003 千葉大・理］

(1) $u^3-3u+2t=0$……①より，$u^3-3u=-2t$ と変形すると，条件より，uv 平面上で $v=u^3-3u$ ……②と $v=-2t$ ……③の共有点のうち，u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

②より，$v'=3u^2-3=3(u+1)(u-1)$

すると，②のグラフは右図のようになり，③との共有点の様子から，次のように場合分けをする。

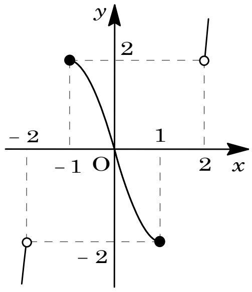


(i) $-2t<-2$，$2<-2t$ のとき ②と③は 1 つの共有点しかもたないので，その共有点が $(f(t),\ -2t)$ である。

(ii) $-2t=\pm2$ のとき ②と③は 2 つの共有点をもつが，u 座標の絶対値が小さいのは接点の方で，$(f(t),\ -2t)=(\mp1,\ \pm2)$ (複号同順)となる。

(iii) $-2<-2t<2$ のとき ②と③は 3 つの共有点をもつが，u 座標の絶対値が小さいのは $-1<u<1$ の範囲にある共有点であり，その点が $(f(t),\ -2t)$ である。

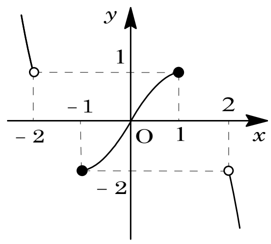
以上より，$(x,\ y)=(f(t),\ -2t)$ と表される曲線は，$y=x^3-3x$ $(x<-2,\ -1\leqq x\leqq1,\ 2<x)$ であり，図示すると右図のようになる。



(2) (1)と同様にして，①より $-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u=t$ と変形すると，$v=-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u$ ……④と $v=t$ の共有点のうち，u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

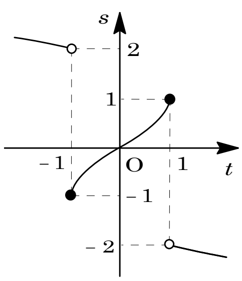
④より，$v'=-\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(u+1)(u-1)$

すると，$t=\pm1$ で $f(t)$ は不連続で，$(x,\ y)=(f(t),\ t)$ は，$y=-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x$ $(x<-2,\ -1\leqq x\leqq1,\ 2<x)$ ……⑤で表される曲線を描き，図示すると右上図のようになる。



これより，点 $(t,\ f(t))$ の描く曲線は，⑤の曲線を直線 $y=x$ に関して対称移動したものであり，これを $s=f(t)$ とおくと，$t=-\dfrac{3}{2}s^3+\dfrac{3}{2}s$ $(s<-2,\ -1\leqq s\leqq1,\ 2<s)$ である。

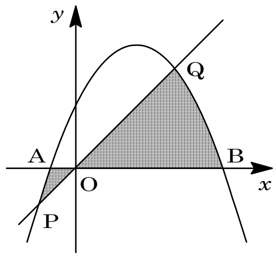
よって，このグラフは右図のようになる。



［解 説］

おもしろい問題ですが，(1)の誘導は少し使いにくいものです。

10 [2003 大阪大・文]



$C: y=-x^2+2x+1$ ……①，直線 $y=mx$ ……②に対して，

①と x 軸との交点 A, B の x 座標 a, b は，$-x^2+2x+1=0$ より，$x=1\pm\sqrt{2}$ なので，$a=1-\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$ となる。

①と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，

$$S_1=\int_a^b(-x^2+2x+1)\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3$$

また，①と②の交点 P, Q の x 座標 α, β は，$-x^2+2x+1=mx$ より，$x=\dfrac{-(m-2)\pm\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$ なので，

$$\alpha=\frac{-(m-2)-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2},\ \ \beta=\frac{-(m-2)+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$

①と②で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，

$$S_2=\int_\alpha^\beta(-x^2+2x+1-mx)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+4}\right)^3$$

条件から，線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と，線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいことより，$S_1=S_2$ となる。

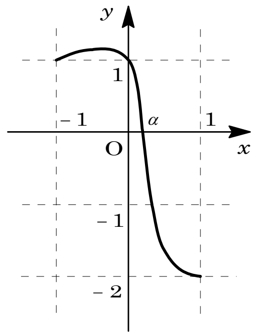
$$\sqrt{(m-2)^2+4}=2\sqrt{2},\ (m-2)^2+4=8,\ m-2=\pm2$$

$m\neq0$ より，$m=4$ である。

［解 説］

$S_1=S_2$ が発見できれば，後はいわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる基本的な頻出問題です。

$\boxed{11}$ [2004 京都大・文]



$y=f(x)$ のグラフは $-1\leqq x\leqq 1$ で連続であり，x 軸との交点を $x=\alpha$ とすると，$0<\alpha<1$ となる。

右図より，$-1<x<\alpha$ で $f(x)>0$，$-1<x<0$ で $f(x)>1$ となっているので，

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} dx = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\alpha<x<1$ で $f(x)>-2$ より，

$$\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{1} (-2)\,dx = -2(1-\alpha) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > 1-2(1-\alpha) = -1+2\alpha > -1$$

［解 説］

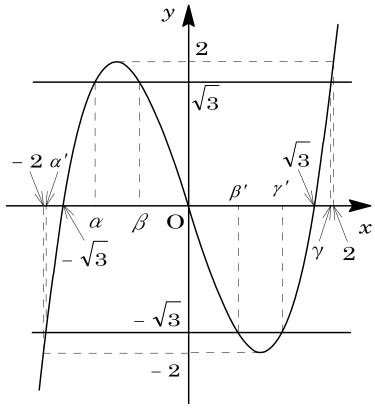
定性的な問題で，符号付きの面積を考えると，結論が見えてきます。

12 [2004 東京大・文]

(1) $f(x)=x^3-3x$ より，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数に等しいので，右表より，$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個，$a=\pm2$ のとき 2 個，$-2<a<2$ のとき 3 個である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



(2) $f(x)=a$ とおくと，$g(x)=0$ は，

$a^3-3a=0$，$a=0$，$\pm\sqrt{3}$

(i) $a=0$ のとき $f(x)=0$ より $x=0$，$\pm\sqrt{3}$

(ii) $a=\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha$，β，γ とおく。

(iii) $a=-\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=-\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha'$，β'，γ' とおく。

すると，$-2<\alpha'<-\sqrt{3}<\alpha<\beta<0<\beta'<\gamma'<\sqrt{3}<\gamma<2$ ……(＊)が成立するので，$g(x)=0$ を満たす実数 x は合計 9 個存在する。

(3) $h(x)=0$ より，$\{g(x)\}^3-3g(x)=0$ となり，$g(x)=0$，$\pm\sqrt{3}$ である。

$g(x)=0$ のとき，$a=0$，$\pm\sqrt{3}$ であり，(2)より実数 x は 9 個存在する。

$g(x)=\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=\sqrt{3}$ より $a=\alpha$，β，γ となり，それぞれの a の値に対し，(1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

同様に，$g(x)=-\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=-\sqrt{3}$ より $a=\alpha'$，β'，γ' となり，それぞれの a の値に対し，(1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

さらに，(＊)から a の値に重複は存在しないので，x の値も重複はない。

よって，$h(x)=0$ を満たす実数 x は合計 27 個存在する。

［解 説］

実数解の個数を調べる頻出問題ですが，ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。図をたくさん書いて，思考過程を述べた方が明快です。

13 ［2005 一橋大］

(1) 放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつとき，$f(x)=g(x)$ は異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3},\ \ 3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

①の判別式 $D/4=4a^2-3\left(\frac{5}{3}a^2-3\right)=-a^2+9>0$ から，$-3<a<3$ となる。

(2) $-3<a<3$ のとき，①の実数解は $x=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$ となる。これを $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とおくと，2 つの放物線によって囲まれる図形 C_a の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}-(x^2-3)\right\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{9-a^2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

(3) $y\leqq g(x)=-2(x-a)^2+\dfrac{a^2}{3}$ から，$y\leqq-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$

ここで，$h(a)=-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$ とおくと，$h(a)=-\dfrac{5}{3}\left(a-\dfrac{6}{5}x\right)^2+\dfrac{2}{5}x^2$

さて，$-3<a<3$ のとき，x を固定して，領域 $y\leqq g(x)$，すなわち $y\leqq h(a)$ の動く平面上の部分を考える。

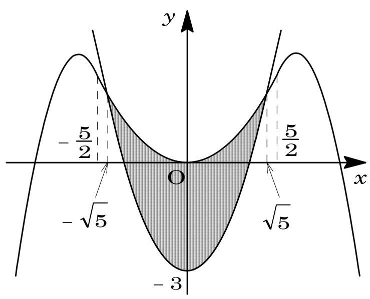
(i) $\dfrac{6}{5}x\leqq-3\ \left(x\leqq-\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(-3)=-15-12x-2x^2$

(ii) $-3<\dfrac{6}{5}x<3\ \left(-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$$y\leqq h\left(\frac{6}{5}x\right)=\frac{2}{5}x^2$$

(iii) $\dfrac{6}{5}x\geqq3\ \left(x\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき

$$y<h(3)=-15+12x-2x^2$$



(i)～(iii)の部分と，領域 $y\geqq f(x)$ を合わせると，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形が得られ，図示すると右上図の網点部となる。この面積は，

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx=-\frac{3}{5}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})\,dx$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{5})^3=4\sqrt{5}$$

［解 説］

(3)では，領域の動く部分を，x の値を固定して，y のとり得る値の範囲として求めました。そこまで，やることはなかったのですが。

14 ［2006 名古屋大・文］

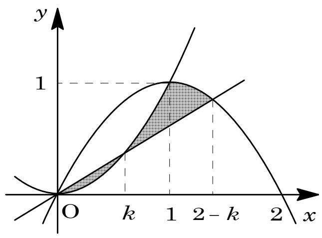
(1) $D : y \geqq x^2$，$y \leqq kx$，$E : y \leqq x^2$，$y \geqq kx$，$F : y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$ より，これらの 3 つの領域の境界線は，$y = x^2$ ……①，$y = kx$ ……②，$y = -x^2+2x$ ……③ である。

①と②の交点は，$x^2 = kx$ より，$x = 0,\ k$

①と③の交点は，$x^2 = -x^2+2x$ より，$x = 0,\ 1$

②と③の交点は，$kx = -x^2+2x$ より，

$x = 0,\ 2-k$



これより，領域 $D \cup (E \cap F)$ を図示すると，右図の網点部となり，その面積 $m(k)$ は,

$$m(k) = \int_0^{2-k}(-x^2+2x-kx)\,dx - \int_0^1(-x^2+2x-x^2)\,dx + 2\int_0^k(kx-x^2)\,dx$$

$$= -\int_0^{2-k}x(x-2+k)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx - 2\int_0^k x(x-k)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot\frac{1}{6}k^3 = \frac{1}{6}(k^3+6k^2-12k+6)$$

$$= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1$$

(2) (1)より，$m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k) = 0$ とすると，$k = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leqq k \leqq 1$ より，$m(k)$ の値の変化は右表のようになり，$k = -2+2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

k	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$m'(k)$		$-$	0	$+$	
$m(k)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$k^3+6k^2-12k+6$ を k^2+4k-4 で割ると，

$$k^3+6k^2-12k+6 = (k^2+4k-4)(k+2) - 16k + 14$$

これより，最小値 $m(-2+2\sqrt{2})$ は,

$$m(-2+2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\right\} = \frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

［解 説］

名大では 1999 年に続き，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式の適用パズルが出題されました。ただ，本年の問題は，ひねりが加わっています。

15　　［2007 名古屋大・理］

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ より，

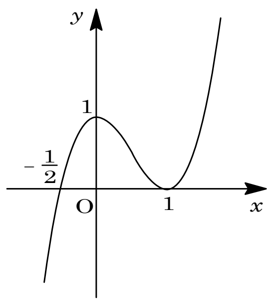
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

すると，$f(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

また，$f(x)=(2x+1)(x-1)^2$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は，$x=-\dfrac{1}{2}$，1である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　(1)より，方程式 $f(x)=a$ は，$0<a<1$ のとき 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもち，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha+\gamma=\dfrac{3}{2}-\beta$

②に代入して，$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)=-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)$

さて，$l=\gamma-\alpha$ より，

$$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2+4\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}$$

よって，$l=\sqrt{-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}}$

(3)　(2)より，$l=\sqrt{-3\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+3}$ となり，$0<\beta<1$ から，

$$\frac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}$$

［解 説］

解 α，γ と β の関係をとらえるために，解と係数の関係に着目することがポイントとなっています。見かけよりスパイスの効いている１題です。