２０２０ 入試対策

２次数学アーカイブ

図形と式

文系＋理系

１９９８−２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

図形と式

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1　座標平面において，2 点 P，Q をそれぞれ直線 $x=-1$，$x=2$ 上の点とし，直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき，2 点 P，Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。　［1998 千葉大］

2　次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点 $(a,\ b)$ の集合を式で表し，図示せよ。

$$x-y<0,\quad x+y<2,\quad ax+by<1$$

［1998 北海道大・理］

3　c を $c>\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。［1999 東京大・文］

4　曲線 $y=x^2$ の点 $(a,\ a^2)$ での接線を l とする。l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。　［1999 東北大・理］

5　次の問いに答えよ。

(1)　点 $(1,\ 0)$ を通って傾きが -4 の直線と，関数 $y=x^2-4x$ のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2)　2 つの関数 $y=x^2-4x$，$y=k(x-a)$ のグラフが，どんな k の値に対しても $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

［2000 神戸大・文］

6　xy 平面内の領域 $-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$ において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。　［2000 東京大・文］

7　放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P，Q が存在するような a の範囲を求めよ。　［2001 一橋大］

8　実数 t に対して，xy 平面上の直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は，t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1)　円 C の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2)　t が $t\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。　［2002 神戸大・文］

9 $a,\ b$ を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\ 3x+y \geqq b,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。 [2003 東京大・文]

10 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは$\sqrt{2}$である。このとき, a の値を求めよ。 [2004 東京大]

11 不等式 $y \leqq -(x-1)^2$ の表す領域を A_1，不等式 $y \leqq -(x+1)^2$ の表す領域を A_2 とする。A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また，不等式 $y \geqq (x-a)^2+b$ の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。

(1) $a=0$，$b=-1$ とするとき, A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(2) A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を $a,\ b$ で表せ。

(3) A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき点$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。 [2005 金沢大・文]

12 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x=t\cos\theta,\ y=1-t^2+t\sin\theta$$

で与えられるような動点$\mathrm{P}(x,\ y)$を考える。t が実数全体を動くとき，点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき, Q の x 座標を求めよ。

(2) θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき，C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3) θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。 [2005 大阪大・理]

13 座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 6)$ とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。 ［2006 名古屋大・理］

14 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である 2 つの円は，どちらも円 C に接することを示せ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。

［2007 北海道大・文］

15 座標平面上の 2 点 P，Q が，曲線 $y=x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，$\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{P}$ とする。

(1) a を $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。 ［2007 東京大・理］

16 a を正の実数とする。点 $(x,\ y)$ が，不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ の定める領域を動くとき，つねに $\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2+y \leqq 2$ となる。a の値の範囲を求めよ。 ［2008 一橋大］

17 (1) 任意の角 θ に対して，$-2 \leqq x\cos\theta+y\sin\theta \leqq y+1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2) 任意の角 α，β に対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha+y\sin\beta \leqq 1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。 ［2009 一橋大］

18 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(x,\ y)$を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) △ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2) △ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3) 3 つの角∠CAB, ∠ABC, ∠BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4) x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。［2009 広島大・理］

19 a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$が，3 条件

(i) $p>0, q>0$

(ii) ∠AOP＜∠AOQ

(iii) △OPQ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，tan∠POQ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

［2010 千葉大・理］

20 実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax-a^2+2a+2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。［2011 東北大・理］

21 以下の問いに答えよ。

(1) t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) a を $a \geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

$$ax+(2-a)y \geqq 2,\quad y \geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3) a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。［2011 神戸大・理］

$\boxed{22}$ 座標平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。　［2012 神戸大］

$\boxed{23}$ $s,\ t$ を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。$s,\ t$ が $s\geqq 0,\ t\geqq 0$ の範囲を動くとき，点$(x,\ y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。$s,\ t$ が実数全体を動くとき，点$(x,\ y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。　［2012 東北大・理］

$\boxed{24}$ $a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$，C$(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2) $b-a\geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

［2013 神戸大・文］

$\boxed{25}$ 座標平面上の 2 点 A$(0,\ 1)$　B$(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t\geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y=kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

［2013 広島大・理］

26 座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。［2014 東京大・理］

27 座標平面上の原点を O とする。点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ および点 C が，$\mathrm{OC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ を満たしながら動く。

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。［2015 一橋大］

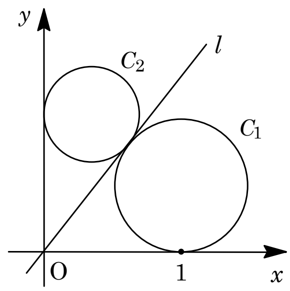
28 l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。［2015 東京大・文］



29 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある。［2015 東京大・文］

30 座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。［2016 東京大・文］

31 $a,\ b$ を実数とする。$y=\left|x^2-4\right|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

［2017 東北大・理］

32 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$ を満たす実数 $x,\ y$ を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

［2018 広島大・理］

33 xy 平面における 2 つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 $a,\ b$ が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 $a,\ b$ が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。

［2018 東北大・理］

34 θ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-\left|x\right|\leqq y\leqq\sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。

［2018 信州大・医］

35 放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

［2018 東京大・文］

36 座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{APB}$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 ［2019 熊本大・医］

37 O を原点とする座標平面を考える。不等式 $|x|+|y|\leqq 1$ が表す領域を D とする。また，点 P，Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く範囲を E とする。

(1) D，E をそれぞれ図示せよ。

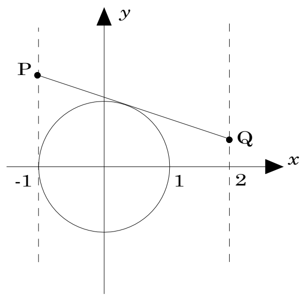
(2) a，b を実数とし，不等式 $|x-a|+|y-b|\leqq 1$ が表す領域を F とする。点 S，T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を満たす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。 ［2019 東京大・文］

図形と式

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 千葉大]



$P(-1,\ a)$，$Q(2,\ b)$とする。

$\overrightarrow{PQ}=(3,\ b-a)$から，直線 PQ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a-b,\ 3)$とおくことができる。

直線 PQ の方程式は,

$$(a-b)(x+1)+3(y-a)=0$$

$$(a-b)x+3y-2a-b=0$$

直線 PQ が円$x^2+y^2=1$に接するので,

$\dfrac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2+9}}=1$から，$|-2a-b|=\sqrt{(a-b)^2+9}$

両辺 2 乗して，$(2a+b)^2=(a-b)^2+9$，$(2a+b+a-b)(2a+b-a+b)=9$

$$a(a+2b)=3$$

$a,\ b$は整数より, aは 3 の約数となり，$a=\pm1,\ \pm3$

$a=1$のとき$a+2b=3$から，$b=1$となる。よって，$P(-1,\ 1)$，$Q(2,\ 1)$

$a=-1$のとき$a+2b=-3$から，$b=-1$となる。よって，$P(-1,\ -1)$，$Q(2,\ -1)$

$a=3$のとき$a+2b=1$から，$b=-1$となる。よって，$P(-1,\ 3)$，$Q(2,\ -1)$

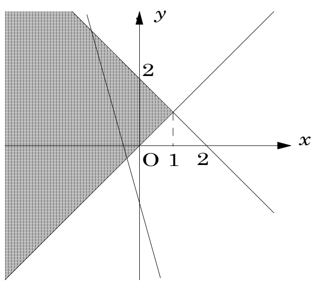
$a=-3$のとき$a+2b=-1$から，$b=1$となる。よって，$P(-1,\ -3)$，$Q(2,\ 1)$

［解 説］

円と直線が接する条件を整理すると，約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単に P, Q の座標が求まってしまいます。

2　　[1998 北海道大・理]

$$\begin{cases} x-y<0 \cdots\cdots\cdots ① \\ x+y<2 \cdots\cdots\cdots ② \\ ax+by<1 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$



①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③に$(x,\ y)=(0,\ 0)$を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，直線$ax+by=1 \cdots\cdots ④$を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線$x-y=0$と④との交点は，

$$(a+b)x=1,\ \ x=\frac{1}{a+b}\quad (a\neq -b)$$

また，直線$x+y=2$と④との交点は，

$$ax+b(2-x)=1,\ \ x=\frac{1-2b}{a-b}\quad (a\neq b)$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{a+b}<0 \cdots\cdots ⑤ \text{かつ} \frac{1-2b}{a-b}<1 \cdots\cdots ⑥$$

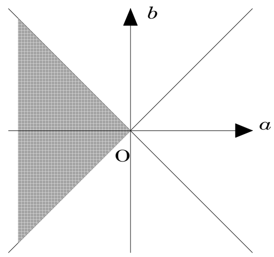
⑤より，$a+b<0,\ \ b<-a \cdots\cdots\cdots ⑦$

⑥より，$(1-2b)(a-b)<(a-b)^2$，

$(a-b)(a-b-1+2b)>0$，$(a-b)(a+b-1)>0$

⑦から$a+b-1<0$なので，$a-b<0$，$b>a \cdots\cdots\cdots ⑦$

⑥⑦より，$a<b<-a$



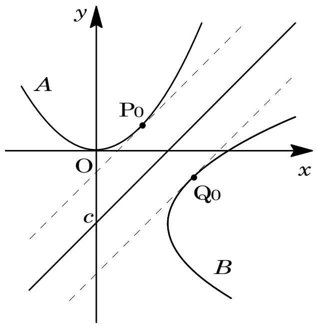
点$(a,\ b)$の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

［解 説］

③の領域については，直線④を境界とし，原点を含むか否かで決定しました。また，直線④と直線$y=x$および$y=-x+2$との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。

３ ［1999 東京大・文］

放物線 A と, A と線対称な放物線 B に, 対称軸 $y=x-c$ に平行な直線を引き, 放物線 A との接点を P_0, 放物線 B との接点を Q_0 としたとき, 線分 P_0Q_0 は対称軸と直交する。



すると, 線分 PQ の長さの最小値は線分 P_0Q_0 の長さとなる。

ここで, 放物線 $A : y=x^2$ ……①と対称軸に平行な直線 $y=x+k$ ……②が接するとき, ①②より,

$$x^2-x-k=0 \cdots\cdots\cdots③$$

判別式 $D=1+4k=0$ より, $k=-\dfrac{1}{4}$

このとき, 接点は③から $x=\dfrac{1}{2}$, ①から $y=\dfrac{1}{4}$

よって, $P_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

点 P_0 と点 Q_0 は対称軸 $y=x-c$ に関して対称なので, 線分 PQ の長さの最小値 P_0Q_0 は点 $P_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と対称軸 $x-y-c=0$ との距離の 2 倍となるので,

$$P_0Q_0=2\cdot\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-c\right|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-c\right|=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$$

［解 説］

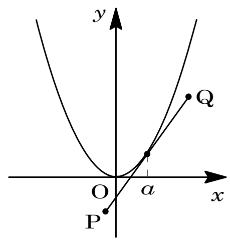
本問は, 直観に依存した解にしました。

4　　［1999 東北大・理］

$y=x^2$ より，$y'=2x$

点 $(a,\ a^2)$ での接線は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

よって，線分 PQ は，$y=2ax-a^2\ (a-1\leqq x\leqq a+1)$ ………①



a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は，明らかに y 軸対称となる。

さて，①において $x=t\ (t\geqq 0)$ 上での通過領域を考えると，

$$y=2at-a^2=-(a-t)^2+t^2\ (t-1\leqq a\leqq t+1)\ \text{………②}$$

そこで，②式を $y=f(a)$ とおき，a が $-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲を動くとき，y の値のとりうる範囲を求める。

ここで，$y=f(a)$ のグラフの軸が $a=t$ なので，t の値で場合分けをする。

(i)　$t>2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は存在しない。

(ii)　$1<t\leqq 2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲には，$y=f(a)$ の軸は存在しないので，$f(a)$ は単調増加となる。

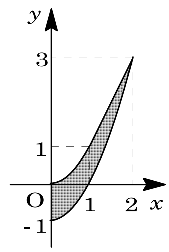
$f(t-1)\leqq y\leqq f(1)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq 2t-1$

(iii)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲に $y=f(a)$ の軸は存在し，しかも $t-1<\dfrac{(t-1)+1}{2}\leqq t\leqq 1$ なので，

$f(t-1)\leqq y\leqq f(t)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq t^2$

(i)(ii)(iii)より，$x\geqq 0$ で線分 PQ の通過領域を図示すると，右図のようになる。



求める面積を S とおくと，

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\left\{x^2-(x^2-1)\right\}dx+\int_1^2\left\{2x-1-(x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx=\frac{5}{3}$$

よって，$S=\dfrac{10}{3}$

［解 説］

x を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし，本問では２点 P，Q だけの軌跡を求めて，直観的に考えることも可能です。

5 ［2000 神戸大・文］

(1) 点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線は，$y=-4(x-1)$………①

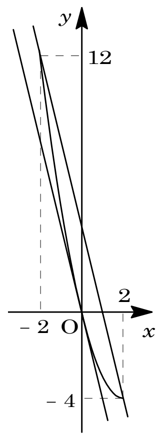
①と$y=x^2-4x$……②の共有点は,

$$-4(x-1)=x^2-4x,\ x^2-4=0,\ x=\pm2$$

$x=2$のとき，①より$y=-4$なので，共有点$(2,\ -4)$

$x=-2$のとき，①より$y=12$なので，共有点$(-2,\ 12)$

(2) ②より，$y=(x-2)^2-4$となり，$-2\leqq x\leqq 2$の範囲でグラフを書くと，右図の曲線のようになる。



また，$y=k(x-a)$は点$(a,\ 0)$を通って傾きがkの直線を表し，$k=-4$，$a=1$のとき，(1)より②と$(2,\ -4)$，$(-2,\ 12)$で交わる。

よって，$a=1$のときは，右図より，どんなkの値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも1つの共有点をもつ。

また，②より$y'=2x-4$なので，$x=0$で$y'=-4$から原点における②の接線は$y=-4x$となる。そして，$a=0$のときは，どんなkの値に対しても原点が共有点となる。

さて，$a<0$, $1<a$のときは，$k=-4$とすると$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で共有点をもたない。

さらに，$0<a<1$のとき，$k\leqq -4$では$a<x<2$で，$k\geqq -4$では$-2<x<a$で少なくとも1つの共有点をもつ。

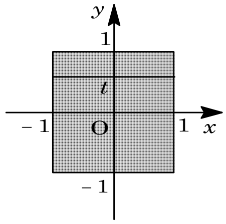
以上より，どんなkの値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも1つの共有点をもつ条件は, $0\leqq a\leqq 1$である。

［解 説］

(2)は最初, yを消去して方程式の解の配置で考えました。しかし，かなり複雑なので，方針を変更してグラフを書くと，(1)が大きなヒントとなっていることがわかりました。

$\boxed{6}$ ［2000 東京大・文］

$P=1-ax-by-axy$ とおき，まず y の値を固定し，$y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ において, P の最小値を求める。



$$P=1-ax-bt-axt=-a(1+t)x+1-bt$$

$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，$1+t\geqq 0$ となるので,

(i) $-a\geqq 0$ $(a\leqq 0)$ のとき，$x=-1$ で P は最小となる。

このとき，$P=a(1+t)+1-bt=(a-b)t+a+1$

(i-i) $a-b\geqq 0$ $(b\leqq a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=-(a-b)+a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i-ii) $a-b<0$ $(b>a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=(a-b)+a+1=2a-b+1$ をとるので，条件より，$2a-b+1>0$

(ii) $-a<0$ $(a>0)$ のとき，$x=1$ で P は最小となる。

このとき，$P=-a(1+t)+1-bt=-(a+b)t-a+1$

(ii-i) $a+b\geqq 0$ $(b\geqq -a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=-(a+b)-a+1=-2a-b+1$ をとるので，条件より，$-2a-b+1>0$

(ii-ii) $a+b<0$ $(b<-a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=(a+b)-a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i)(ii)をまとめると,

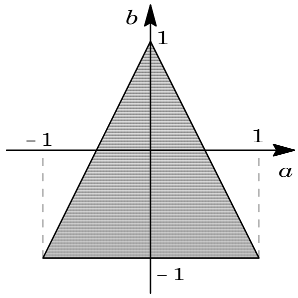
$a\leqq 0$ かつ $b\leqq a$ のとき，$b>-1$

$a\leqq 0$ かつ $b>a$ のとき，$b<2a+1$

$a>0$ かつ $b\geqq -a$ のとき，$b<-2a+1$

$a>0$ かつ $b<-a$ のとき，$b>-1$

この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲は右図の網点部になる。ただし，境界は含まない。

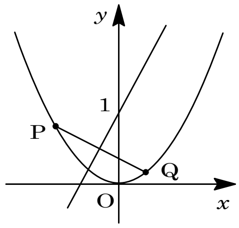


［解 説］

今年もまた出ましたという感のある 1 文字固定の最大・最小問題です。しかし，対象が 1 次関数のため，そんなに複雑ではありません。

$\boxed{7}$ ［2001 一橋大］

$p \neq q$ として，$P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ と直線 $y = ax+1$ が直交することより，



$$\frac{p^2-q^2}{p-q}\cdot a = -1,\ \ p+q = -\frac{1}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

また，PQ の中点$\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$が，直線 $y = ax+1$ 上にあることより，

$$\frac{p^2+q^2}{2} = a\cdot\frac{p+q}{2}+1,\ \ p^2+q^2 = a(p+q)+2\cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入すると，$p^2+q^2 = 1\cdots\cdots\cdots③$

①③を満たす異なる p，q が存在する条件は，直線①と円③が 2 つの共有点を持つ条件に等しいので，

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}} < 1,\ \ 1 < \sqrt{2}\,|a|$$

よって，$a < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a$

［解 説］

線対称移動を題材にした問題です。後半の a の範囲を求めるところは，図をイメージしています。

$\boxed{8}$ ［2002 神戸大・文］

(1) $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$……①より，$(1-t^2)x-2ty-1-t^2=0$……①′

円 C の中心を$(a,\ b)$，半径を r とすると，①′が接することより，

$$\frac{|(1-t^2)a-2tb-1-t^2|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r,\quad \frac{|(-a-1)t^2-2bt+a-1|}{\sqrt{1+2t^2+t^4}}=r$$

$$(-a-1)t^2-2bt+a-1=\pm r(1+t^2)\cdots\cdots\cdots②$$

②がどんな t に対しても成立する条件は，

$$-a-1=\pm r,\ -2b=0,\ a-1=\pm r$$

これより，$-a-1=a-1$ から $a=0$，また $b=0$ となり，$r>0$ から $r=1$ である。

よって，円 C の方程式は，$x^2+y^2=1$ である。

すると，①を $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x+\dfrac{-2t}{1+t^2}y=1$ と変形すると，接点の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$ となる。

(2) 接点を$(x,\ y)$とおくと，(1)より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$……③，$y=\dfrac{-2t}{1+t^2}$……④

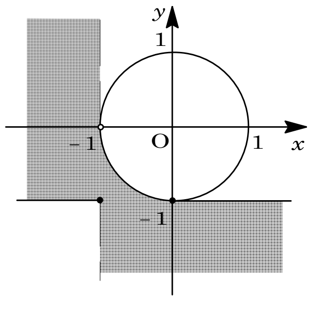
③より，$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ となり，$t\geqq 1$ で $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leqq 1$ より，$-1<x\leqq 0$ となる。

④より，$y=\dfrac{-2}{\frac{1}{t}+t}$ となり，$t\geqq 1$ で $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

（等号は $t=1$ のとき）より，$-1\leqq y<0$ である。

よって，接点は円 C 上の $-1<x\leqq 0$，$-1\leqq y<0$ の部分にある。

以上より，直線①の通過領域は右図の網点部となる。なお，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解 説］

直線の通過領域を求める有名問題です。(1)の誘導があるために，(2)はずいぶん解きやすくなっています。

9 [2003 東京大・文]

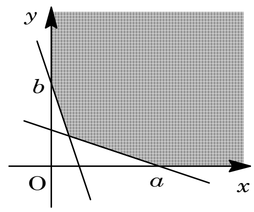
領域D : $x+3y\geqq a$，$3x+y\geqq b$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ に対して，境界$x+3y=a$……①，$3x+y=b$……②とおく。

すると，①と両軸との交点は$(a,\ 0)$と$\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$，②と両軸との交点は$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$と$(0,\ b)$である。

(i) $a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ a\geqq \dfrac{b}{3},\ b\geqq \dfrac{a}{3}\ \left(\dfrac{a}{3}\leqq b\leqq 3a\right)$のとき

①と②の交点は，$x+3(b-3x)=a$，$x=\dfrac{-a+3b}{8}$

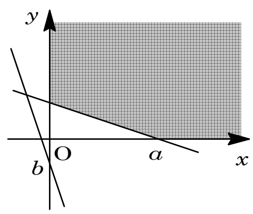
$$y=b-3\cdot\frac{-a+3b}{8}=\frac{3a-b}{8}$$



右図より，この交点$\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{-a+3b}{8}+\frac{3a-b}{8}=\frac{a+b}{4}$$

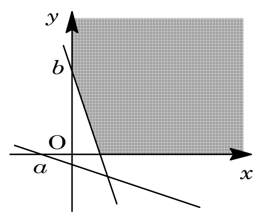
(ii) $a\geqq 0,\ a\geqq \dfrac{b}{3},\ \dfrac{a}{3}\geqq b\ \left(a\geqq 0,\ b\leqq \dfrac{a}{3}\right)$のとき



右図より，点$\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{a}{3}$$

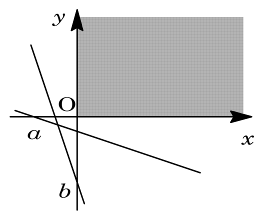
(iii) $b\geqq 0,\ \dfrac{b}{3}\geqq a,\ b\geqq \dfrac{a}{3}\ (b\geqq 0,\ b\geqq 3a)$のとき



右図より，点$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{b}{3}$$

(iv) $a\leqq 0,\ b\leqq 0$ のとき



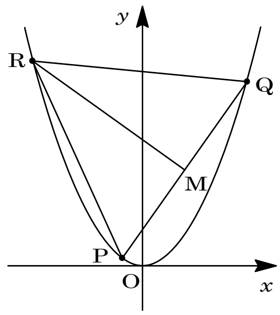
右図より，原点$(0,\ 0)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=0$$

［解 説］

場合分けの基準を確定するのに苦労します。2 つの境界線の交点の存在する位置だけでなく，それぞれの x 切片，y 切片の関係も考慮しなくてはいけません。なお，このように複雑になったときには，場合分けについて，ab 平面でチェックすると，ミスを防ぐことができます。

10 ［2004 東京大］



$p<q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2},\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，

$$\mathrm{M}\Big(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\Big)$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Big)$，$p=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Big)$なので，

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\Big(2-\frac{a^2}{3}\Big)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$\mathrm{M}\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\Big)$である。

ここで，△PQR は１辺の長さ a の正三角形より，

$$\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ},\ \mathrm{RM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\Big)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\Big)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので，

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\Big)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp2a+a^2)$$

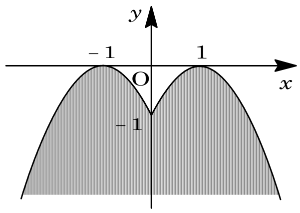
まとめると，$5a^2\mp18a=0$ となり，$a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

［解 説］

まず，回転を用いて考えましたが，計算がかなり複雑になってしまい，方向転換をした結果が上の解です。

11 [2005 金沢大・文]

(1) $A_1 : y \leqq -(x-1)^2$，$A_2 : y \leqq -(x+1)^2$ に対し，集合 $A = A_1 \cup A_2$ の表す領域は，右図の網点部となる。



さて，$B : y \geqq (x-a)^2 + b$ に対し，$a = 0$，$b = -1$ のときは，$B : y \geqq x^2 - 1$ である。

よって，$A \cap B$ の表す領域は，y 軸に関して対称となり，その面積 S は，

$$S = 2\int_0^1 \{ -(x-1)^2 - (x^2-1) \} dx = 2\int_0^1 (-2x^2 + 2x)\,dx = \frac{2}{3}$$

(2) $A_1 \cap B \neq \phi$ であるとき，放物線 $y = -(x-1)^2$ と $y = (x-a)^2 + b$ は共有点をもち，

$$-(x-1)^2 = (x-a)^2 + b,\quad 2x^2 - (2a+2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a+1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 + 2a - 1,\quad b \leqq -\frac{1}{2}(a-1)^2 \cdots\cdots\cdots①$$

(3) $A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ より，$A \cap B \neq \phi$ であることは，$A_1 \cap B \neq \phi$ または $A_2 \cap B \neq \phi$ であることと同値である。

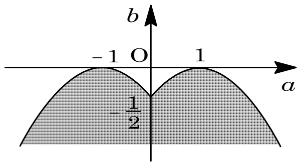
ここで，$A_2 \cap B \neq \phi$ という条件は，(2)と同様にして，

$$-(x+1)^2 = (x-a)^2 + b,\quad 2x^2 - (2a-2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a-1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 - 2a - 1,\quad b \leqq -\frac{1}{2}(a+1)^2 \cdots\cdots\cdots②$$

以上より，$A \cap B \neq \phi$ であるとき①または②が成立し，これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



［解 説］

集合と領域の融合問題です。(3)の題意は，少し把握しづらいですが，その点は，(2)の誘導によって少し緩和されています。

12 [2005 大阪大・理]

(1) 条件より，$x = t\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……①，$y = 1 - t^2 + t\sin\dfrac{\pi}{4} = 1 - t^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……②

$y = 0$ とすると，②から $1 - t^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}t = 0$ より，

$\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0$，$(\sqrt{2}t + 1)(t - \sqrt{2}) = 0$

$x \geqq 0$ より $t \geqq 0$ なので，$t = \sqrt{2}$ となり，①から点 Q の x 座標は $x = 1$ である。

(2) $x = t\cos\theta$ ……③，$y = 1 - t^2 + t\sin\theta$ ……④に対して，

$t = 0$ のとき，$(x,\ y) = (0,\ 1)$

$t \neq 0$ のとき，③④より $\cos\theta = \dfrac{x}{t}$，$\sin\theta = \dfrac{y - 1 + t^2}{t}$ から，

$\left(\dfrac{x}{t}\right)^2 + \left(\dfrac{y - 1 + t^2}{t}\right)^2 = 1$，$x^2 + (y - 1 + t^2)^2 = t^2$ ………⑤

⑤は $(x,\ y) = (0,\ 1)$ を満たしているので，$t = 0$ のときも成り立つ。

さて，t が実数全体を動くとき，曲線⑤が通過する範囲は，⑤を t の方程式をしてみたとき，実数 t が存在する条件として求めることができる。

⑤から，$x^2 + (y - 1)^2 + 2(y - 1)t^2 + t^4 = t^2$

$t^4 + (2y - 3)t^2 + x^2 + (y - 1)^2 = 0$ ………⑥

ここで，$u = t^2 \geqq 0$ とおくと，⑥は $u^2 + (2y - 3)u + x^2 + (y - 1)^2 = 0$ ……⑦となり，2 次方程式⑦が，0 以上の解を少なくとも 1 つもつ条件となる。

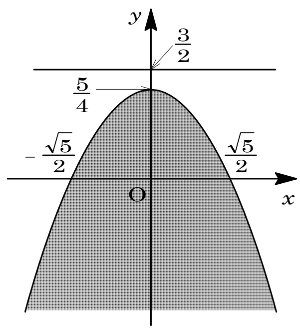
そこで，$f(u) = u^2 + (2y - 3)u + x^2 + (y - 1)^2$ とおき，$f(0) = x^2 + (y - 1)^2 \geqq 0$ に注意すると，

$D = (2y - 3)^2 - 4\{x^2 + (y - 1)^2\} \geqq 0$ ………⑧

$u = -\dfrac{2y - 3}{2} \geqq 0$ ………⑨

⑧から，$-4y - 4x^2 + 5 \geqq 0$，$y \leqq -x^2 + \dfrac{5}{4}$

⑨から，$2y - 3 \leqq 0$，$y \leqq \dfrac{3}{2}$



以上まとめると，曲線 C が通過する範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。

(3) 点 Q の x 座標の最大値は，(2)より $x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であり，③④より，

$\dfrac{\sqrt{5}}{2} = t\cos\theta$ ……⑩，$0 = 1 - t^2 + t\sin\theta$ ……⑪

⑩より，$t = \dfrac{\sqrt{5}}{2\cos\theta}$ となり，⑪に代入すると，

$1 - \dfrac{5}{4\cos^2\theta} + \dfrac{\sqrt{5}\sin\theta}{2\cos\theta} = 0$，$1 - \dfrac{5}{4}(1 + \tan^2\theta) + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta = 0$

まとめると，

$$5\tan^2\theta - 2\sqrt{5}\tan\theta + 1 = 0\ ,\ \ (\sqrt{5}\tan\theta - 1)^2 = 0$$

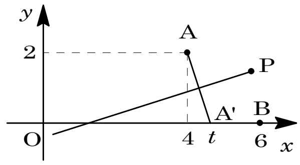
よって，$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である。

［解 説］

難易度が高いというわけではありませんが，それなりに時間のかかる問題です。(2)では，まずパラメータ θ を動かし，その後，パラメータ t を動かして通過領域を求めました。

$\boxed{13}$ ［2006 名古屋大・理］

(1) ピッタリ直線 l は，線分 AA' の垂直二等分線より，$\mathrm{PA}=\mathrm{PA}'$ となり，



$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$
$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2) ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点 $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

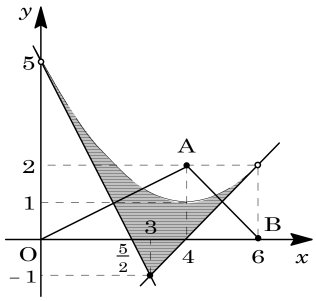
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③′

④より $q\geqq -2p+5$ ………④′，⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤′

さて，領域③′ の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③′ と領域④′ の境界線，領域③′ と領域⑤′ の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③′ ④′ ⑤′ より，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3) ①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，$\mathrm{A}_1'(t_1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2'(t_2,\ 0)$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}_1'}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{\mathrm{AA}_2'}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{\mathrm{AA}_1'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AA}_2'}=0$ となり，

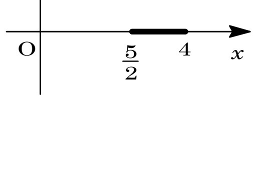
$(t_1-4)(t_2-4)+4=0$，$t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0$ ………⑥

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$t_1+t_2=2p$，$t_1t_2=8p+4q-20$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。



［解 説］

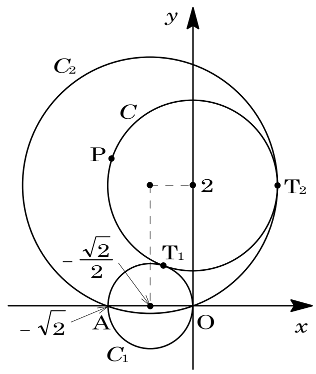
線対称を題材にした問題で，ひとひねりが加えられています。

14 ［2007 北海道大・文］

(1) $C: x^2+y^2-4y+2=0$ より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円 C は中心 $(0,\ 2)$，半径 $r=\sqrt{2}$ となる。

さて，中心 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ で，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円を C_1 とすると，その半径は $r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。



すると, C と C_1 の中心間距離は,

$$d_1=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

また，半径の和は，$r+r_1=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

よって，$d_1=r+r_1$ となり, 2 円 C と C_1 は外接する。

次に，中心 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ で, 2 点 A, O を通る円を C_2 とすると，その半径は,

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

すると，C と C_2 の中心間距離は $d_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，半径の差は $r_2-r=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$d_2=r_2-r$ より，円 C は円 C_2 に内接する。

(2) C と C_1，C と C_2 の接点を T_1，T_2 とおくと，この接点以外は，C 上の点 P は円 C_1 の外部, 円 C_2 の内部にあり,

$$\angle\mathrm{AT_2O}\leqq\angle\mathrm{APO}\leqq\angle\mathrm{AT_1O}$$
$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}\leqq\cos\angle\mathrm{APO}\leqq\cos\angle\mathrm{AT_2O}$$

さて, AO は C_1 の直径なので $\angle\mathrm{AT_1O}=90°$ となり，$\cos\angle\mathrm{AT_1O}=0$

また，C_2 の中心を B とおくと，$\angle\mathrm{AT_2O}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABO}$ より,

$$\cos\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{2}{r_2}=\frac{2}{\frac{3}{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最小値は 0, 最大値は $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

［解 説］

(1)の巧みな誘導により, (2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると, 計算の海に溺れてしまいます。