２０２０ 入試対策
２次数学アーカイブ

# 複素数

## 理系

１９９８−２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

# 複素数

## 【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

**1** 複素平面上で$z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0°<\theta<90°)$，$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$，$z_2=-\dfrac{1}{z_0}$ を表す点をそれぞれ$P_0$，$P_1$，$P_2$とする。

(1) $z_1$を極形式で表せ。

(2) $z_2$を極形式で表せ。

(3) 原点O，$P_0$，$P_1$，$P_2$の 4 点が同一円周上にあるときの$z_0$の値を求めよ。

［1998 岡山大］

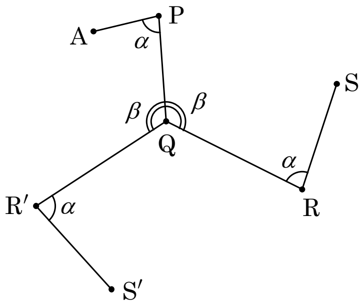
**2** 平面上において，7 点A，P，Q，R，S，R′，S′を下図のようにとる。ただし，

$\mathrm{AP}=a$，$\mathrm{PQ}=b$

$\mathrm{QR}=\mathrm{QR'}=c$，$\mathrm{RS}=\mathrm{R'S'}=d$

$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{SRQ}=\angle\mathrm{S'R'Q}=\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$

$\angle\mathrm{RQP}=\angle\mathrm{PQR'}=\beta$ $(0\leqq\beta\leqq\pi)$




である。このとき，$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS'}^2$を$\sin\alpha$，$\sin\beta$および$a, b, c, d$を用いて表せ。 ［1998 大阪大］

**3** $p$を 0 でない実数とし，2 次方程式$x^2-px+5p=0$を考える。

(1) $x^2-px+5p=0$の解$\alpha$，$\beta$が$\alpha^5+\beta^5=p^5$を満たすとする。このときの $p$ の値を求めよ。

(2) $x^2-px+5p=0$が虚数解をもち，その 5 乗が実数になるとする。このときの $p$ の値を求めよ。

［1999 東北大］

**4** 2 つの複素数$\alpha$，$\beta$が，条件$\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$，$|\alpha+\beta|=3$を満たしているとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$の偏角$\theta$を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta<360°$とする。

(2) $\alpha$の絶対値を求めよ。

(3) 複素数平面上で，$\alpha$，$\beta$，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$の表す 5 つの点を頂点とする五角形の面積を求めよ。

［1999 岡山大］

**5** $\alpha$，$\beta$は$|\alpha+\beta|<2$を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2x^2-\left(|\alpha|+|\beta|\right)x+1$$

の $0\leqq x\leqq1$ における最小値を求めよ。

［2000 東北大］

**6** 複素数 $z=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$ と，それに共役な複素数 $\overline{z}$ に対し，$\alpha = z+\overline{z}$ とする。

(1) $\alpha$ は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする 2 次方程式で，$\alpha$ を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。 ［2000 九州大］

**7** 原点を O とする複素数平面上で, 0 でない複素数 $z$, $w$ の表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ とする。$z$ に対して $w$ を，O を始点とする半直線 $\mathrm{OP}(z)$ 上に $\mathrm{Q}(w)$ があり，$|w| = \dfrac{2}{|z|}$ を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $w = \dfrac{2}{\overline{z}}$ を示せ。

(2) $\pm 2$, $\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $\mathrm{P}(z)$ が動く。このとき，$\mathrm{Q}(w) = \mathrm{P}(z)$ となる $z$ を求めよ。

(3) $\mathrm{P}(z)$ が(2)の正方形の周上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ の描く図形を求めて図示せよ。

［2000 岡山大］

**8** 複素数平面上の点 $z$ を考える。

(1) 実数 $a$, $c$ と複素数 $b$ が $|b|^2 - ac > 0$ を満たすとき，$az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$ を満たす点 $z$ は $a \neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は $z$ に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 $d$ に対して，$dz(\overline{z}+1) = \overline{d}\,\overline{z}(z+1)$ を満たす点 $z$ はどのような図形を描くか。 ［2001 九州大］

**9** 複素数平面上の点 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$，$\cdots$ を

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = i,\ \ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め，$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。ただし，$i$ は虚数単位である。

(1) 3 点 $b_1$，$b_2$，$b_3$ を通る円 $C$ の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 $b_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ は円 $C$ の周上にあることを示せ。 ［2001 東京大］

**10** 次の問いに答えよ。ただし，偏角$\theta$は，$0° \leqq \theta < 360°$ の範囲で考えるものとする。

(1) $|z+i|=|z-i|$ を満たす複素数$z$は，実数に限ることを示せ。

(2) 複素数平面上で $z$ が実軸上を動くとき，複素数$z+i$の偏角$\arg(z+i)$の動く範囲を求めよ。

(3) $z$ を未知数とする方程式$(z+i)^9=(z-i)^9$ のすべての解 $z$ について$z+i$の偏角$\arg(z+i)$を求めよ。 ［2002 名古屋大］

**11** $a$を実数とし，$z$を複素数とする。複素数平面上で，$a$，$z$，$z^2$，$z^3$が表す４点が，あるひし形の４頂点になるとする。ただし，$a$ と$z^2$が表す頂点は対角線上にあるとする。このような$a$と$z$の値をすべて求めよ。 ［2003 千葉大］

**12** 次の問いに答えよ。ただし，$i$は虚数単位とする。

(1) 複素数 $z$ に対し，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ とする。$z$ が実軸上を動くとき，複素数平面上で $w$ を表す点が描く図形を求めよ。

(2) 複素数 $z$ とその共役複素数$\overline{z}$に対し，$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$ とする。$z \neq \pm i$ のとき，複素数平面上で$w_1$を表す点を P，$w_2$を表す点を Q とする。P, Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。 ［2003 神戸大］

**13** O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，$i$は虚数単位である。正の実数$t$に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1) $\angle\mathrm{APB}$を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる$t$を求めよ。 ［2003 東京大］

**14** 複素数$\alpha$，$\beta$は$|\alpha-1|=1$，$|\beta-i|=1$を満たす。

(1) $\alpha+\beta$が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。 ［2003 一橋大］

**15** 複素数平面上に異なる３点$z$，$z^2$，$z^3$がある。

(1) $z$，$z^2$，$z^3$が同一直線上にあるような$z$をすべて求めよ。

(2) $z$，$z^2$，$z^3$が二等辺三角形の頂点になるような $z$ の全体を複素数平面上に図示せよ。また，$z$，$z^2$，$z^3$が正三角形の頂点になるような$z$をすべて求めよ。

［2004 一橋大］

**16** $\alpha$ は絶対値 1 の複素数とし，複素数 $z$ に対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は $\alpha$ の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で，$z$ が原点と点 $\alpha$ を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき, $w$ の表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で，$z$ が不等式 $|z|>1$ を満たすとき，複素数 $w$ を表す点はどのような図形上を動くか。 [2005 千葉大]

**17** $t$ を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような $t$ の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。$t$ が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 $C$ を求め，図示せよ。

(3) 複素数平面上で，点 $z$ が(2)の図形 $C$ 上を動くとき，$w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 $w$ が描く図形を求め，図示せよ。 [2005 九州大]

**18** $\alpha$ を実数でない複素数とし，$\beta$ を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 $w$ に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) 複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 $z$ の描く図形を $C$ とする。このとき，$C$ は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 $z$ の描く図形を $L$ とする。$L$ は(1)で定めた $C$ と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P, Q とするとき，線分 PQ の長さを $\alpha$ と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) $\beta$ の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P, Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，$\beta$ を $\alpha$ と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。 [2015 筑波大]

**19** 多項式$P(x)$を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$により定める。ただし，$i$は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$とするとき，係数$a_0$，$\cdots$，$a_7$をすべて求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めた$a_1$，$a_3$，$a_5$，$a_7$を用いて，多項式$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$として，$k=1,\ 2,\ 3$について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$とおく。このとき，$Q(x_k)=0$が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$の値を求めよ。 ［2016 東北大］

**20** $z$を複素数とする。複素数平面上の 3 点A$(1)$，B$(z)$，C$(z^2)$が鋭角三角形をなすような$z$の範囲を求め，図示せよ。 ［2016 東京大］

**21** $\alpha$，$\beta$，$\gamma$を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0\cdots\cdots(*)$を満たす複素数$z$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $z$は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$を仮定し，また$\gamma$は負の実数であると仮定する。このとき，$(*)$を満たす$z$がちょうど2個あるための必要十分条件を$\alpha$，$\beta$を用いて表せ。

［2017 東北大］

**22** $w$を0でない複素数，$x, y$を$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$を満たす実数とする。

(1) 実数$R$は$R>1$を満たす定数とする。$w$が絶対値$R$の複素数全体を動くとき，$xy$平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2) 実数$\alpha$は$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$を満たす定数とする。$w$が偏角$\alpha$の複素数全体を動くとき，$xy$平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。 ［2017 京都大］

**23** 複素数平面上の原点以外の点$z$に対して，$w=\dfrac{1}{z}$とする。

(1) $\alpha$を0でない複素数とし，点$\alpha$と原点Oを結ぶ線分の垂直二等分線を$L$とする。点$z$が直線$L$上を動くとき，点$w$の軌跡は円から1点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1の3乗根のうち，虚部が正であるものを$\beta$とする。点$\beta$と点$\beta^2$を結ぶ線分上を点$z$が動くときの点$w$の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。 ［2017 東京大］

$\boxed{24}$ 複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする△OAB がある。ただし，O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を，それぞれ $\alpha$，$\beta$，$z$ とするとき，$\alpha\beta = z$ が成り立つとする。

(1) 複素数 $\alpha$ の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。 ［2017 北海道大］

$\boxed{25}$ $\alpha$ を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 $z$ をすべて求めよ。ただし，$i$ は虚数単位である。 ［2018 九州大］

$\boxed{26}$ 複素数平面上で $|z+i|-|z-i|=1$ を満たす点 $z$ の全体を $H$ とおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角 $\theta$ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(1) $H$ の点 $z$ に対して，$z$ の偏角 $\theta_1$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $H$ の点 $z$ に対して $w=\dfrac{1}{z}$ とする。$w$ の絶対値 $r_2$ と偏角 $\theta_2$ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 ［2018 熊本大］

$\boxed{27}$ 複素数 $\alpha$ に対して，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\alpha^2)$ を考える。次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)をすべて満たす複素数 $\alpha$ 全体の集合を $S$ とする。

(Ⅰ) $\alpha$ は実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ) $|\alpha|>1$ である。

(Ⅲ) 三角形 OAB は直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha$ が $S$ に属するとき，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2) 集合 $S$ を複素数平面上に図示せよ。

(3) $x$, $y$ を $\alpha^2=x+yi$ を満たす実数とする。$\alpha$ が $S$ を動くとき，$xy$ 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求め，図示せよ。 ［2018 筑波大］

$\boxed{28}$ $|z|^2+3=2(z+\overline{z})$ を満たす複素数 $z$ 全体の集合を $A$ とする。ただし $\overline{z}$ は $z$ の共役複素数である。

(1) 集合 $A$ を複素数平面上に図示せよ。

(2) $A$ の要素 $z$ の偏角を $\theta$ とする。ただし $-\pi<\theta \leqq \pi$ とする。$z$ が $A$ を動くとき，$\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $z^{60}$ が正の実数となる $A$ の要素 $z$ の個数を求めよ。 ［2019 筑波大］

**29** 方程式$z^3=1$の解を$z_1$，$z_2$，$z_3$とし，$0 \leqq \arg z_1 < \arg z_2 < \arg z_3 < 2\pi$とする。複素数平面上に３点$\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $z_1+z_2+z_3$，$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$，$z_1z_2z_3$の値をそれぞれ求めよ。

(2) 複素数平面上の点$\mathrm{P}(\alpha)$について，線分の長さの２乗の和$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$および線分の長さの積$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$の値を，$\alpha$を用いてそれぞれ表せ。

(3) 複素数平面上の点$\mathrm{P}(\alpha)$について，$\alpha$が$\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri$ $(r>0)$を満たすとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$の最大値，およびそのときの$r$と$\alpha$の値を求めよ。ただし，$i$は虚数単位である。

(4) (3)において，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$が最大になるときの$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$の値を求めよ。

［2019 長崎大］

# 複素数

## 【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

**1** ［1998 岡山大］

(1) $z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0=\dfrac{1}{2}\{\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\}\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\cos(\theta-60^\circ)+i\sin(\theta-60^\circ)$

(2) $z_2=-\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{2}\{\cos(180^\circ-\theta)+i\sin(180^\circ-\theta)\}$

(3) $0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\theta-60^\circ<\theta<180^\circ-\theta$

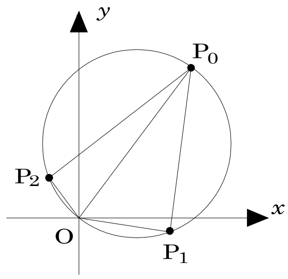
$\angle P_0OP_1=\theta-(\theta-60^\circ)=60^\circ$ で，

$OP_0=2$，$OP_1=1$ から，$\angle OP_1P_0=90^\circ$

よって，$OP_0$ は円の直径となり，$\angle OP_2P_0=90^\circ$

ここで，$\angle P_0OP_2=(180^\circ-\theta)-\theta=180^\circ-2\theta$ で，

$OP_0=2$，$OP_2=\dfrac{1}{2}$ から，




$$\cos(180^\circ-2\theta)=\frac{OP_2}{OP_0}=\frac{1}{4}$$

よって，$\cos 2\theta=-\dfrac{1}{4}$，$2\cos^2\theta-1=-\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

以上より，$z_0=2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{10}}{4}i\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

## ［解 説］

(3)では，最初は一般的に 4 点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが，たいへんな計算が待ち構えていました。そこで，これは何か特別な事情があると推測したところ，やはりその通りでした。この発見がポイントです。

**２** ［1998 大阪大］

Q を原点とし, QP を実軸の正の部分とする複素数平面を設定する。

また, $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $w=\cos\beta+i\sin\beta$ とおく。

すると, 点 P を表す複素数は $b$ となり, 点 A を表す複素数は,

$$b+(0-b)\cdot\frac{a}{b}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=b-a\overline{z}$$

点 R, R′ を表す複素数は, それぞれ $c\overline{w}$, $cw$ となる。

点 S を表す複素数は,

$$c\overline{w}+(0-c\overline{w})\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=c\overline{w}-d\overline{w}\overline{z}=\overline{w}(c-d\overline{z})$$

点 S′ を表す複素数は,

$$cw+(0-cw)\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=cw-dw\overline{z}=w(c-d\overline{z})$$

ここで $b-a\overline{z}=u$, $c-d\overline{z}=v$ とおくと, $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{S}(\overline{w}v)$, $\mathrm{S'}(wv)$ となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS'}^2&=|\overline{w}v-u|^2-|wv-u|^2\\&=(\overline{w}v-u)(w\overline{v}-\overline{u})-(wv-u)(\overline{w}\overline{v}-\overline{u})\\&=-\overline{w}\overline{u}v-wu\overline{v}+w\overline{u}v+\overline{w}u\overline{v}=(\overline{u}v-u\overline{v})(w-\overline{w})\end{aligned}$$

そこで, 
$$\begin{aligned}\overline{u}v-u\overline{v}&=(b-az)(c-d\overline{z})-(b-a\overline{z})(c-dz)\\&=-bd\overline{z}-acz+bdz+ac\overline{z}\\&=(bd-ac)(z-\overline{z})=(bd-ac)\cdot 2i\sin\alpha\end{aligned}$$

また, $w-\overline{w}=2i\sin\beta$ より,

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS'}^2=(bd-ac)(4i^2)\sin\alpha\sin\beta=4(ac-bd)\sin\alpha\sin\beta$$

［解 説］

いろいろな方針が考えられますが, 上の解では複素数平面を利用してみました。それさえ決まれば, 計算を簡略化するための置き換えを適当に行っていくと, 結論を導くことはさほど困難ではありません。

**３** ［1999 東北大］

(1) $x^2-px+5p=0$ の解が $\alpha$, $\beta$ より，$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=5p$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-10p$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-15p^2$$

すると，
$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5&=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)\\&=(p^2-10p)(p^3-15p^2)-25p^3\\&=p^5-25p^4+125p^3\end{aligned}$$

条件より，$\alpha^5+\beta^5=p^5$ なので，$25p^4-125p^3=0$

$p\neq 0$ より，$p=5$

(2) $x^2-px+5p=0$ が虚数解をもつので，

$$D=p^2-20p<0,\ \ 0<p<20\cdots\cdots\cdots①$$

このとき，虚数解を $\alpha$, $\overline{\alpha}$ とすると，$\alpha+\overline{\alpha}=p$，$\alpha\overline{\alpha}=5p$

条件より，$\alpha^5$ が実数なので，$\alpha^5=\overline{\alpha}^5$

$$(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha^4+\alpha^3\overline{\alpha}+\alpha^2\overline{\alpha}^2+\alpha\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^4)=0$$

$\alpha$ は虚数なので $\alpha\neq\overline{\alpha}$ から，$\alpha^4+\alpha^3\overline{\alpha}+\alpha^2\overline{\alpha}^2+\alpha\overline{\alpha}^3+\overline{\alpha}^4=0$

$$\alpha^4+\overline{\alpha}^4+\alpha\overline{\alpha}(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)+(\alpha\overline{\alpha})^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

ここで, (1)より $\alpha^2+\overline{\alpha}^2=p^2-10p$

$$\alpha^4+\overline{\alpha}^4=(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)^2-2\alpha^2\overline{\alpha}^2=(p^2-10p)^2-50p^2=p^4-20p^3+50p^2$$

②より，$p^4-20p^3+50p^2+5p(p^2-10p)+25p^2=0$

$$p^4-15p^3+25p^2=0$$

$p\neq 0$ より，$p^2-15p+25=0$

よって，$p=\dfrac{15\pm5\sqrt{5}}{2}$ （この値はともに①を満たす）

### ［解 説］

解と係数の関係を利用する問題です。(1), (2)とも頻出題です。

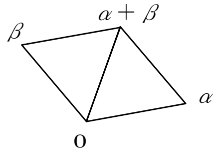
$\boxed{4}$ ［1999 岡山大］

(1) $\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$ で $\alpha\neq 0$ より，$1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm 120^\circ)+i\sin(\pm 120^\circ)$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 $\theta$ は $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より，$\theta=120^\circ$，$240^\circ$

(2) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$ より，$\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=1$，$|\alpha|=|\beta|$

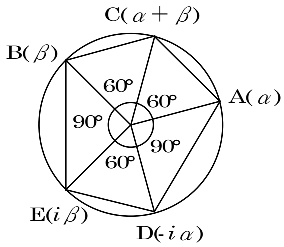



すると，4 点 $0$，$\alpha$，$\alpha+\beta$，$\beta$ を結ぶ四角形はひし形となり，しかも(1)より，3 点 $0$，$\alpha$，$\alpha+\beta$ を結ぶ三角形は正三角形となる。

条件より $|\alpha+\beta|=3$ なので，$|\alpha|=|\beta|=3$

(3) 点 $-i\alpha$ は点 $\alpha$ を原点まわりに $-90^\circ$ 回転した点，点 $i\beta$ は点 $\beta$ を原点まわりに $90^\circ$ 回転した点である。

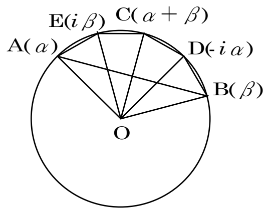
(i) $\theta=120^\circ$ のとき




5 点 $\alpha$，$\beta$，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{BOE}=\angle\mathrm{AOD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EOD}=60^\circ$ より，五角形 ACBED の面積は,

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 60^\circ\right)\times 3+\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\times 2=9+\frac{27}{4}\sqrt{3}$$

(ii) $\theta=240^\circ$ のとき




5 点 $\alpha$，$\beta$，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{AOE}=\angle\mathrm{COE}=\angle\mathrm{COD}=\angle\mathrm{BOD}=30^\circ$ より，五角形 ABDCE の面積は,

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 30^\circ\right)\times 4-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 120^\circ=9-\frac{9}{4}\sqrt{3}$$

［解 説］

複素数と図形に関する頻出問題です。(3)において，位置関係の異なる 2 つの五角形を考えるのがポイントです。

**5** [2000 東北大]

$|\alpha+\beta|=k\ (0\leqq k<2)$，$|\alpha|+|\beta|=l$ とおくと，$f(x)=\dfrac{1}{4}k^2x^2-lx+1$ となる。

(i) $k=0\ (|\alpha+\beta|=0)$ のとき

$f(x)=-lx+1$ となり, $l\geqq 0$ なので, $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$$f(1)=-l+1=-|\alpha|-|\beta|+1$$

(ii) $0<k<2\ (0<|\alpha+\beta|<2)$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{4}k^2\left(x-\frac{2l}{k^2}\right)^2-\frac{l^2}{k^2}+1$$

ここで，$\dfrac{2l}{k^2}-1=\dfrac{1}{k^2}(2l-k^2)=\dfrac{1}{k^2}\left\{2\left(|\alpha|+|\beta|\right)-|\alpha+\beta|^2\right\}$

さて，複素数 $\alpha$，$\beta$ に対して，$|\alpha|+|\beta|\geqq|\alpha+\beta|$ が成り立つので,

$$2\left(|\alpha|+|\beta|\right)-|\alpha+\beta|^2\geqq 2|\alpha+\beta|-|\alpha+\beta|^2=2k-k^2=-(k-1)^2+1$$

$0<k<2$ において，$-(k-1)^2+1>0$ なので，$\dfrac{2l}{k^2}-1>0$，$\dfrac{2l}{k^2}>1$

すると, $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$$f(1)=\frac{1}{4}k^2-l+1=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$$

(i)(ii)より，$f(x)$ の最小値は，$f(1)=\dfrac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$

［解 説］

(ii)の場合をさらに分けて最小値を求めるのでは，条件の $|\alpha+\beta|<2$ の意味が不明です。ここは $|\alpha|+|\beta|$ と $|\alpha+\beta|$ の関係がポイントとなりますが，その両者をつなぐのは，どう考えても三角不等式しかありません。なお，昨年，東大・理で，この不等式を利用する問題が出ています。

**6** ［2000 九州大］

(1) $\alpha = z+\bar{z} = (\cos 20°+i\sin 20°)+(\cos 20°-i\sin 20°) = 2\cos 20°$ から，$\cos 20° = \dfrac{\alpha}{2}$

ここで，$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$ より，

$$\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{\alpha^3}{8} - 3\cdot\frac{\alpha}{2},\quad \alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

よって，$\alpha$ は３次方程式 $x^3-3x-1=0 \cdots\cdots ②$ の解である。

(2) $f(x) = x^3-3x-1$ とおくと，

$$f'(x) = 3x^2-3 = 3(x+1)(x-1)$$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ |

$f(-1)>0$，$f(1)<0$ より，$f(x)=0$ は３個の実数解をもつ。

ここで，この解が有理数であると仮定すると，$p>0$ で $p$ と $q$ を互いに素な整数として，$x=\dfrac{q}{p}$ とおくことができる。

②より，$\dfrac{q^3}{p^3} - 3\cdot\dfrac{q}{p} - 1 = 0$，$q^3 - 3p^2q - p^3 = 0$，$q^3 = p^2(3q+p)$

$p^2$ は $q^3$ の約数となるが，$p$ と $q$ は互いに素な整数なので，$p=1$ となる。すなわち，$f(x)=0$ の解はすべて整数となる。

ところが，$f(-2)=-3<0$，$f(-1)=1>0$，$f(0)=-1<0$，$f(1)=-3<0$，$f(2)=1>0$ より，$f(x)=0$ の解は $-2<x<-1$，$-1<x<0$，$1<x<2$ に１つずつあり，整数解は存在しない。

したがって，３個の実数解は，いずれも有理数ではない。

(3) $a$，$b$ を有理数として，$x=\alpha$ を解とする２次方程式を，一般性を失うことなく $x^2+ax+b=0$ とできるので，$\alpha^2+a\alpha+b=0 \cdots\cdots ③$ となる。

ここで，$x^3-3x-1$ を $x^2+ax+b$ で割ると，

$$x^3-3x-1 = (x^2+ax+b)(x-a)+(a^2-b-3)x+(ab-1) \cdots\cdots\cdots ④$$

$x=\alpha$ を④に代入すると，①③より $(a^2-b-3)\alpha+(ab-1)=0$

$a, b$ は有理数，$\alpha$ は無理数なので，$a^2-b-3=0 \cdots\cdots ⑤$，$ab-1=0 \cdots\cdots ⑥$

⑤より $b=a^2-3$ となり，⑥に代入して $a^3-3a-1=0$ となるが，この方程式の解は(2)より有理数でない。よって，③は成立しない。

以上より，有理数を係数とする２次方程式で，$\alpha$ を解とするものは存在しない。

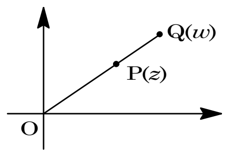
［解 説］

さまざまな分野の融合したおもしろい問題です。

**７** ［2000 岡山大］

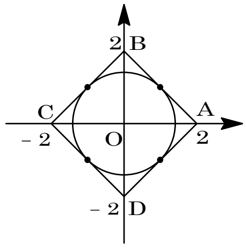
(1) 半直線$\mathrm{OP}(z)$上に点$\mathrm{Q}(w)$があるので, $k>0$として$w=kz$より, $|w|=k|z|$

条件より, $|w|=\dfrac{2}{|z|}$なので, $k|z|=\dfrac{2}{|z|}$, $k=\dfrac{2}{|z|^2}$




よって, $w=\dfrac{2}{|z|^2}z=\dfrac{2}{z\bar{z}}z=\dfrac{2}{\bar{z}}$

(2) $w=z$とすると, (1)より, $z=\dfrac{2}{|z|^2}z$




$z\neq 0$より, $|z|^2=2$, $|z|=\sqrt{2}$

よって, 点$\mathrm{P}(z)$は原点を中心とする半径$\sqrt{2}$の円周上にあり, $\pm 2$, $\pm 2i$の表す 4 点を頂点とする正方形との共有点を求めると,

$$z=1\pm i,\ -1\pm i$$

(3) まず, 点$\mathrm{P}(z)$が線分 AB 上を動くとき,

$$|z|=|z-(2+2i)|\cdots\cdots\cdots①,\ |z|\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

(1)より, $w=\dfrac{2}{\bar{z}}$なので, $\bar{z}=\dfrac{2}{w}\cdots\cdots\cdots③$

①より, $|\bar{z}|=\left|\overline{z-(2+2i)}\right|$, $|\bar{z}|=|\bar{z}-(2-2i)|$

③を代入して, $\left|\dfrac{2}{w}\right|=\left|\dfrac{2}{w}-(2-2i)\right|$, $\dfrac{2}{|w|}=\dfrac{2|1-(1-i)w|}{|w|}$

$$\left|(1-i)\left(w-\frac{1}{1-i}\right)\right|=1,\ \sqrt{2}\left|w-\frac{1+i}{2}\right|=1,\ \left|w-\frac{1+i}{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots④$$

②より$|\bar{z}|\leqq 2$となり, ③を代入して, $\left|\dfrac{2}{w}\right|\leqq 2$, $\dfrac{2}{|w|}\leqq 2$, $|w|\geqq 1\cdots\cdots\cdots⑤$

したがって, 点$\mathrm{P}(z)$が線分 AB 上を動くとき, 点$\mathrm{Q}(w)$は④と⑤を満たす曲線, すなわち点$\dfrac{1+i}{2}$を中心とし, 半径$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の円周上で, 原点中心の単位円の外部または周上の部分を動く。

さて, 点$z_1$が線分 AB 上を動くとき, $z_1$を原点のまわりに$90^\circ$だけ回転した点を$z_2$, $z_1$を原点のまわりに$180^\circ$だけ回転した点を$z_3$, $z_1$を原点のまわりに$270^\circ$だけ回転した点を$z_4$とすると,

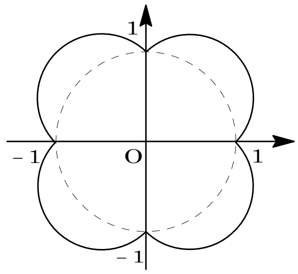
$$z_2=iz_1,\ z_3=-z_1,\ z_4=-iz_1$$

このとき点$z_2$は線分 BC 上, 点$z_3$は線分 CD 上, 点$z_4$は DA 上をそれぞれ動く。

ここで, $w_1=\dfrac{2}{\overline{z_1}}$とおくと, 点$w_1$は④と⑤を満たす曲線上を動く。

すると，$w_2=\dfrac{2}{\overline{z_2}}=\dfrac{2}{-i\overline{z_1}}=i\dfrac{2}{\overline{z_1}}=iw_1$，$w_3=\dfrac{2}{\overline{z_3}}=\dfrac{2}{-\overline{z_1}}=-w_1$

$$w_4=\frac{2}{\overline{z_4}}=\frac{2}{i\overline{z_1}}=-i\frac{2}{\overline{z_1}}=-iw_1$$




以上より，点$w_2$，$w_3$，$w_4$は，動点$w_1$を原点のまわりに90°，180°，270°だけ回転した点となり，点$\mathrm{Q}(w)$の軌跡は，まとめると右図の実線のようになる。

［解 説］

複素数平面上における軌跡の問題で，昨年，名市大・医に類題が出ています。そのとき考えたのと同じ方針で，上の解を作りました。

$\boxed{8}$ ［2001 九州大］

(1) 条件より，$az\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0\ (a\neq 0)$ なので，

$$z\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}z+\frac{b}{a}\bar{z}+\frac{c}{a}=0,\ \left(z+\frac{b}{a}\right)\left(\bar{z}+\frac{\bar{b}}{a}\right)=-\frac{c}{a}+\frac{b\bar{b}}{a^2}$$

$a$ は実数より，$\left(z+\dfrac{b}{a}\right)\left(\overline{z+\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|^2=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$

ここで，$|b|^2-ac>0$ なので，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，点 $z$ は中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円を描く。

(2) 条件より，$dz(\bar{z}+1)=\bar{d}\bar{z}(z+1)$，$(d-\bar{d})z\bar{z}+dz-\bar{d}\bar{z}=0$

(i) $d=\bar{d}$ （$d$ が実数）のとき

$dz-d\bar{z}=0$ より，$d\neq 0$ より $z=\bar{z}$ となり，点 $z$ は実軸を描く。

(ii) $d\neq\bar{d}$ （$d$ が虚数）のとき

$z\bar{z}+\dfrac{d}{d-\bar{d}}z-\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\bar{z}=0$ より，$\left(z-\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right)\left(\bar{z}+\dfrac{d}{d-\bar{d}}\right)=-\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\cdot\dfrac{d}{d-\bar{d}}$

$$\left(z-\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right)\left(\overline{z-\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}}\right)=\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\cdot\overline{\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}},\ \left|z-\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|^2=\left|\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|^2$$

よって，$\left|z-\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|=\left|\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|$ より，点 $z$ は中心 $\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}$，半径 $\left|\dfrac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|$ の円を描く。

［解 説］

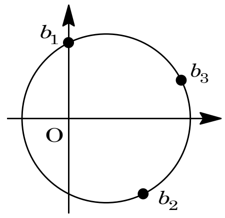
複素数平面における円の方程式が題材です。(2)でも共役複素数を前面に出さずに，$z=x+yi$ として解けますが，結論を $d$ を用いて記述するのに苦労します。

**9**　　[2001 東京大]

(1)　$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ より，$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，$b_{n+1}=1+\dfrac{1}{b_n}$ ………①

まず，$b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=i$ なので，①より，

$$b_2=1+\frac{1}{i}=1-i,\ \ b_3=1+\frac{1}{1-i}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$




3 点 $b_1$，$b_2$，$b_3$ を通る円 $C$ の中心を $x+yi$ とおくと，

$$|x+yi-i|=|x+yi-(1-i)|=\left|x+yi-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|$$

$$|x+(y-1)i|=|(x-1)+(y+1)i|=\left|\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)i\right|$$

よって，$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+1)^2$ ………②

$$x^2+(y-1)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \text{ ………③}$$

②より $2x-4y=1$，③より $6x-2y=3$ なので，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$となり，円 $C$ の中心は点 $\dfrac{1}{2}$，半径は $\left|\dfrac{1}{2}-i\right|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ である。

(2)　すべての点 $b_n$ が円 $C$ の周上にあることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　点 $b_1$ は明らかに円 $C$ の周上にある。

(ii)　$n=k$ のとき　点 $b_k$ が円 $C$ の周上にあると仮定する。

$$\left|b_k-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ………④}$$

このとき，①より $b_{k+1}=1+\dfrac{1}{b_k}$ なので，$b_k=\dfrac{1}{b_{k+1}-1}$

④に代入して，$\left|\dfrac{1}{b_{k+1}-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\left|\dfrac{3-b_{k+1}}{2(b_{k+1}-1)}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{|3-b_{k+1}|}{2|b_{k+1}-1|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$$|b_{k+1}-3|=\sqrt{5}|b_{k+1}-1|,\ \ |b_{k+1}-1|:|b_{k+1}-3|=1:\sqrt{5}$$

ここで，2 点 1，3 を結ぶ線分を $1:\sqrt{5}$ に内分する点を $z_1$，$1:\sqrt{5}$ に外分する点を $z_2$ とすると，点 $b_{k+1}$ は 2 点 $z_1$，$z_2$ を直径の両端とする円周上にある。

$$z_1=\frac{\sqrt{5}\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{5}+1}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \ z_2=\frac{\sqrt{5}\cdot 1-1\cdot 3}{\sqrt{5}-1}=\frac{-3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

すると円の中心は $\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{1}{2}$，半径は $\dfrac{1}{2}|z_1-z_2|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ となり，円 $C$ に一致する。

(i)(ii)より，すべての点 $b_n$ は円 $C$ の周上にある。

［解　説］

複素数平面上における円を題材とした問題です。それに加えて漸化式がスパイスとしてよく効いています。