

2020 入試対策
2次数学アーカイブ

曲 線
理系

1998 - 2019

外林康治 編著

電送数学舎

曲 線

【問題一覧】

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 (1) 点 $P(p, q)$ と円 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ($r > 0$) との距離 d とは, P と C 上の点 (x, y) との距離の最小値をいう。 P が C の外部にある場合と内部にある場合に分けて, d を表す式を求めよ。

(2) 2 つの円 $C_1: (x+4)^2 + y^2 = 81$ と $C_2: (x-4)^2 + y^2 = 49$ から等距離にある点 P の軌跡の方程式を求めよ。 [1998 東北大]

2 (1) 平面上に半径が R, r ($R > r$) の 2 円があり, それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ。

(2) 座標平面上で x 軸を準線とし, 定点 $A(0, a)$ を通る放物線について考える。ただし, $a > 0$ とする。

① そのような放物線の焦点 $F(s, t)$ の全体はどのような図形を描くか。

② x 軸上にない点 $P(p, q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。 [1998 九州大]

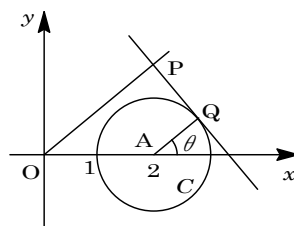
3 平面上に 2 定点 A, B をとる。 c は正の定数として, 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{PA}| \parallel \overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$$

を満たすとき, 点 P の軌跡を求めよ。

[1999 京大]

4 xy 平面上において, 点 $A(2, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。 C 上の点 Q における C の接線に原点 $O(0, 0)$ から下ろした垂線の足を P とする。図のように x 軸と線分 AQ のなす角を θ とする。ただし, θ は $-\pi < \theta \leq \pi$ を動くものとする。



(1) 点 $P(x, y)$ の座標 (x, y) を θ を用いて表せ。

(2) 点 $P(x, y)$ の x 座標が最小になるとき, P の座標 (x, y) を求めよ。

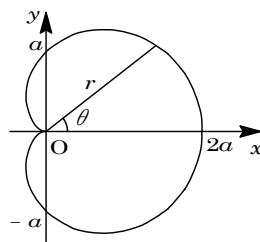
(3) 直線 $x = k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるとき, k のとりうる値の範囲を求めよ。 [1999 筑波大]

5 $a > 0$ を定数として、極方程式 $r = a(1 + \cos \theta)$ により表される曲線 C_a を考える。
次の問いに答えよ。

(1) 極座標が $(\frac{a}{2}, 0)$ の点を中心とし半径が $\frac{a}{2}$ である円 S

を、極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $P \neq O$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき、線分 PQ の長さは一定であることを示せ。



(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき、極座標が $(2a, 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。
[2000 神戸大]

6 C を双曲線 $2x^2 - 2y^2 = 1$ とする。 l, m を点 $(1, 0)$ を通り、 x 軸とそれぞれ $\theta, \theta + \frac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\frac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1) 直線 l は双曲線 C と異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2) PQ^2 を、 θ を用いて表せ。

(3) 直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき、 $\frac{1}{PQ^2} + \frac{1}{RS^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。

[2001 筑波大]

7 C を曲線 $a^2x^2 + y^2 = 1$, l を直線 $y = ax + 2a$ とする。ただし、 a は正の定数である。

(1) C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2) C 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ。

(3) (1)における交点を P, Q とし、点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $R(X, Y)$ とする。 a が(1)の範囲を動くとき、 X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ。
[2002 広島大]

8 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で、 $a^2 > 4b$ を満たす点 $P(a, b)$ から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q, R とし、接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とおく。点 P は $\angle QPR = \theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき、 $\tan \theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

[2003 九州大]

9 楕円 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上の点で、 $x \geq 0$ の範囲にあり、定点 $A(0, -1)$ との距離が最大となる点を P とする。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする。 $\triangle APQ$ の面積が最大となるとき、点 Q の座標および $\triangle APQ$ の面積を求めよ。

[2004 筑波大]

10 実数 a に対して、曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2 + ay^2 = a^2 + 3a + 1$ によって定める。

(1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し、その 4 定点の座標を求めよ。

(2) a が正の実数全体を動くとき、 C_a が通過する範囲を図示せよ。

[2005 筑波大]

11 直線 $y = x$ を l で、直線 $y = -x$ を l' で表す。直線 l, l' のどちらの上にもない点 $A(a, b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l, l' とそれぞれ点 P, P' で交わるとする。点 Q を、 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$ を満たすようにとる。ただし、 O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき、点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

[2006 大阪大]

12 空間内に、3点 $A_0(1, 0, 0)$, $A_1(1, 1, 0)$, $A_2(1, 0, 1)$ を通る平面 α と、3点 $B_0(2, 0, 0)$, $B_1(2, 1, 0)$, $B_2\left(\frac{5}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 β を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ とおくと、ベクトル \vec{OA}_0 , $\vec{A_0A_1}$, $\vec{A_0A_2}$, $\vec{OB_0}$, $\vec{B_0B_1}$, $\vec{B_0B_2}$ を \vec{e}_1 , \vec{e}_2 , \vec{e}_3 で表せ。

ただし、 O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P' も通っているとする。

$$\vec{OP} = \vec{OA_0} + a\vec{A_0A_1} + b\vec{A_0A_2}, \quad \vec{OP'} = \vec{OB_0} + p\vec{B_0B_1} + q\vec{B_0B_2}$$

とおくとき、 a, b を p, q で表せ。

(3) 点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき、点 P' が動いてできる図形 C' の方程式を(2)の p, q で表し、 C' が楕円であることを示せ。

[2006 北海道大]

13 平面の原点 O を端点とし、 x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$, α (ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$) である半直線を L_1 , L_2 とする。 L_1 上に点 P , L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり、点 R を、直線 PQ に対し原点 O の反対側に $\triangle PQR$ が正三角形になるようにとる。

(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき、点 R の座標を求めよ。

(2) 2点 P, Q が、線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1, L_2 上を動くとき、点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。

[2008 東京工大]

14 d を正の定数とする。2点 $A(-d, 0)$, $B(d, 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A , 点 B , 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP , BP , OP とかく。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2) $AP^2 + BP^2$ および $AP \cdot BP$ を、 OP と d を用いて表せ。

(3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき、 $AP^3 + BP^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

[2011 筑波大]

15 2つの双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$, $H: x^2 - y^2 = -1$ を考える。双曲線 H 上の点 $P(s, t)$ に対して、方程式 $sx - ty = 1$ で定まる直線を l とする。

- (1) 直線 l は点 P を通らないことを示せ。
- (2) 直線 l と双曲線 C は異なる2点 Q, R で交わることを示し、 $\triangle PQR$ の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。
- (3) (2)における3点 G, Q, R に対して、 $\triangle GQR$ の面積は点 $P(s, t)$ の位置によらず一定であることを示せ。

[2012 筑波大]

16 楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の、直線 $y = mx$ と平行な2接線を l_1, l_1' とし、 l_1, l_1' に直交する C の2接線を l_2, l_2' とする。

- (1) l_1, l_1' の方程式を m を用いて表せ。
- (2) l_1 と l_1' の距離 d_1 および l_2 と l_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし、平行な2直線 l, l' の距離とは、 l 上の1点と直線 l' の距離である。
- (3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。
- (4) l_1, l_1', l_2, l_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき、 S の最大値を求めよ。

[2013 筑波大]

17 曲線 $C: x^2 + 4y^2 = 4$ 上を動く点 P と、 C 上の定点 $Q(2, 0)$, $R(0, 1)$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle PQR$ の面積の最大値と、そのときの P の座標を求めよ。
- (2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で2つに分けたとき、直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

[2016 金沢大]

18 座標平面上の放物線 $y = x^2$ 上に点 $P(t, t^2)$ ($t > 0$) をとる。原点 $O(0, 0)$ を通り、直線 OP に垂直な直線を l とする。また、 $0 < a \leq 1$ として、点 $A(0, a)$ をとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 PA と l は交わることを示し、その交点 $Q(u, v)$ の座標を t と a を用いて表せ。
- (2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき、(1)で求めた点 $Q(u, v)$ の軌跡が $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ を通るとする。このとき、定数 a の値を求め、点 $Q(u, v)$ の軌跡を求めよ。

[2017 金沢大]

曲 線

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 東北大]

(1) 円 C の中心を $C(a, b)$ とすると,(i) P が円 C の外部にあるとき

$$d = PC - r = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} - r$$

(ii) P が円 C の内部にあるとき

$$d = r - PC = r - \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2}$$

(2) C_1 の中心を $A(-4, 0)$, C_2 の中心を $B(4, 0)$ とし, C_1 と C_2 の交点を $Q(2, 3\sqrt{5})$, $R(2, -3\sqrt{5})$ とおく。(i) P が円 C_1, C_2 の外部にあるとき

$$PA - 9 = PB - 7 \text{ より } PA - PB = 2$$

 P は 2 点 A, B を焦点とする双曲線の点 B に近い方の枝である。その方程式を $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a^2 + b^2 = c^2$) とすると, $2a = 2, c = 4$

$$a = 1, b = \sqrt{15} \text{ から, } x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$$

(ii) P が円 C_1, C_2 の内部にあるとき

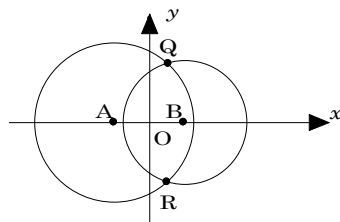
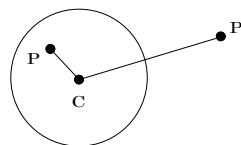
$$9 - PA = 7 - PB \text{ より } PA - PB = 2 \text{ なので, (i) と同じく } x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$$

(iii) P が円 C_1 の外部, 円 C_2 の内部にあるとき $PA - 9 = 7 - PB$ より $PA + PB = 16$ で, P は 2 点 A, B を焦点とする楕円である。その方程式を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a^2 - b^2 = c^2$) とすると, $2a = 16, c = 4$

$$a = 8, b = 4\sqrt{3} \text{ から, } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

(iv) P が円 C_1 の内部, 円 C_2 の外部にあるとき

$$9 - PA = PB - 7 \text{ より } PA + PB = 16 \text{ なので, (iii) と同じく } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

以上より, P の軌跡の方程式は, $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ ($1 \leq x$), $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ 

[解 説]

今年, 頻出の 2 次曲線の定義を利用する問題の 1 つです。おもしろい設定ですので, 丁寧に書いてみました。なお, 2 交点 Q, R に点 P が一致したときも条件をみやすのは明らかですので, 軌跡は曲線全体になります。

2

[1998 九州大]

(1) 2円が共有点をもつ条件は、中心間距離が半径の差以上、半径の和以下より、

$$R - r \leq l \leq R + r$$

(2) 放物線は、準線が x 軸で y 軸と正の部分で交わることで x 軸の上方にあり、焦点 $F(s, t)$ から頂点 $(s, \frac{t}{2})$ で、頂点と焦点の距離が $\frac{t}{2}$ から、その方程式は、

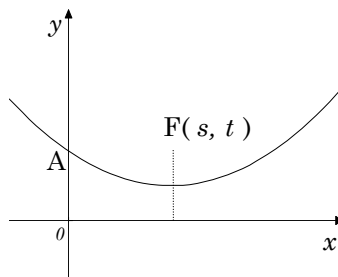
$$(x - s)^2 = 4 \cdot \frac{t}{2} \left(y - \frac{t}{2} \right) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

点 $A(0, a)$ を通るので、 $s^2 = 2t \left(a - \frac{t}{2} \right)$

$$s^2 + t^2 - 2at = 0$$

$$s^2 + (t - a)^2 = a^2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

よって②から、点 F は中心 $(0, a)$ 、半径 a の円を描く。ただし、 $t > 0$ より原点を除く。



さて、①が点 $P(p, q)$ ($q > 0$) を通るとき、 $(p - s)^2 = 4 \cdot \frac{t}{2} \left(q - \frac{t}{2} \right)$ から、

$$(s - p)^2 + (t - q)^2 = q^2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{は、} s^2 + (t - a)^2 = a^2 \quad (t \neq 0) \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

ここで、③と④をとともにみたす (s, t) が存在する p, q の関係が求める条件なので、

(1)の結果から、

(i) $p \neq 0$ のとき

$$|q - a| \leq \sqrt{p^2 + (q - a)^2} \leq q + a \text{ より、} (q - a)^2 \leq p^2 + (q - a)^2 \leq (q + a)^2$$

左側の不等式はつねに成立するので、右側の不等式を変形して、

$$p^2 - 4aq \leq 0, \quad q \geq \frac{1}{4a} p^2$$

(ii) $p = 0$ のとき

③は $s^2 + (t - q)^2 = q^2$ となり、求める条件は $q = a$

(i)(ii)より、 $q \geq \frac{1}{4a} p^2$ ($p \neq 0$)、 $q = a$ ($p = 0$)

[解説]

(2)の設問は、一見(1)とは無関係と見えるものの、解のネックとなる部分で(1)の結果を利用します。

3

[1999 京都大]

$\triangle ABP$ に余弦定理を適用して,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} \dots\dots\dots ①$$

なお, ①は 3 点 P, A, B が同一直線上にあるときも成立する。

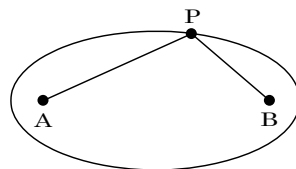
$$\text{条件より, } |\overrightarrow{PA}| \parallel |\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c \dots\dots\dots ②$$

①を②に代入して,

$$|\overrightarrow{PA}| \parallel |\overrightarrow{PB}| + \frac{|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} = c$$

$$\left(|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| \right)^2 = 2c + |\overrightarrow{AB}|^2$$

$$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{2c + |\overrightarrow{AB}|^2} \dots\dots\dots ③$$



$\sqrt{2c + |\overrightarrow{AB}|^2}$ は定数なので, ③より点 P は 2 点 A, B を焦点とする楕円を描く。

長軸の長さは $\sqrt{2c + |\overrightarrow{AB}|^2}$, 短軸の長さは $2\sqrt{\frac{1}{4}(2c + |\overrightarrow{AB}|^2) - \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{2c}$ と

なる。

[解 説]

2 点 A, B の中点を原点として座標設定しようかと思いましたが, 条件式②の形に注目して, ベクトルの大きさと内積を余弦定理で関連づけてみました。すると, 楕円の定義式が導けました。

4

[1999 筑波大]

(1) $\vec{AQ} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $Q(2 + \cos \theta, \sin \theta)$ より,直線 PQ の方程式は, $\cos \theta(x - 2 - \cos \theta) + \sin \theta(y - \sin \theta) = 0$

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 2 \cos \theta + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

直線 OP は PQ と垂直なので, その方程式は, $-x \sin \theta + y \cos \theta = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)x = (2 \cos \theta + 1) \cos \theta$$

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)y = (2 \cos \theta + 1) \sin \theta$$

$$\text{よって, } x = (2 \cos \theta + 1) \cos \theta, \quad y = (2 \cos \theta + 1) \sin \theta$$

(2) $x = f(\theta)$, $y = g(\theta)$ とおくと, $f(-\theta) = f(\theta)$, $g(-\theta) = -g(\theta)$ より, 点 P の軌跡は x 軸対称となる。以下, θ が $0 \leq \theta \leq \pi$ を動くときを考える。

$$\frac{dx}{d\theta} = -2 \sin \theta \cos \theta + (2 \cos \theta + 1)(-\sin \theta)$$

$$= -\sin \theta(4 \cos \theta + 1)$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{4} \text{ の解を } \theta = \alpha \text{ (} 0 \leq \alpha \leq \pi \text{) とおくと,}$$

θ	0	...	α	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	-	0	+	
x	3	\searrow	$-\frac{1}{8}$	\nearrow	1

 $\theta = \alpha$ のとき点 P の x 座標が最小になる。

$$\text{このとき } x = -\frac{1}{8}, \text{ また } \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ より, } y = \frac{\sqrt{15}}{8} \text{ となる。}$$

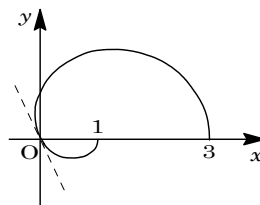
$$x \text{ 軸に関する対称性を考えて, } x \text{ 座標が最小の点 P の座標は, } \left(-\frac{1}{8}, \pm \frac{\sqrt{15}}{8}\right)$$

(3) 原点を極, x 軸の正の部分に始線とする極座標を設定すると, 点 P の軌跡は,

$$r = 2 \cos \theta + 1$$

 $0 \leq \theta \leq \pi$ において r は単調減少し, $0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ では $r \geq 0$, $\frac{2}{3}\pi < \theta \leq \pi$ では $r < 0$ となるので, 点 P の軌跡の概

形は右図のような曲線になる。

さらに, この曲線とこれを x 軸対称した曲線とを合わせた曲線が, $-\pi < \theta \leq \pi$ における点 P の軌跡である。すると, 直線 $x = k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるのは, (2) の結果を用いて, $-\frac{1}{8} < k < 0$, $0 < k < 1$ となる。

[解説]

(3) でも, (2) と同じく y の増減を調べ, 点 P の軌跡の概形を調べようかとも思いました。しかし, それほどの設問でもないので, 極方程式で概形を考えました。

5

[2000 神戸大]

(1) 原点と点 $(a, 0)$ を直径の両端とする円なので、

$$r = a \cos \theta$$

(2) x 軸に関する対称性より、 $0 \leq \theta \leq \pi$ で考える。

$$OP = a(1 + \cos \theta), \quad OQ = a|\cos \theta|$$

(i) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$PQ = OP - OQ = a(1 + \cos \theta) - a \cos \theta = a$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき

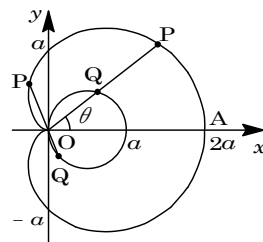
$$PQ = OP + OQ = a(1 + \cos \theta) - a \cos \theta = a$$

(3) $A(2a, 0)$ とおき、 $0 < \theta < \pi$ のとき、 $\triangle OAP$ に余弦定理を適用して、

$$\begin{aligned} AP^2 &= OP^2 + OA^2 - 2OP \cdot OA \cos \theta = r^2 + 4a^2 - 2r \cdot 2a \cos \theta \\ &= a^2(1 + \cos \theta)^2 + 4a^2 - 4a \cos \theta \cdot a(1 + \cos \theta) \\ &= 5a^2 - 2a^2 \cos \theta - 3a^2 \cos^2 \theta \\ &= -3a^2 \left(\cos \theta + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{16}{3} a^2 \end{aligned}$$

また、 $\theta = 0$ のとき $AP^2 = 0$ 、 $\theta = \pi$ のとき $AP^2 = 4a^2$ となる。

よって、 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のとき、 AP^2 は最大値 $\frac{16}{3} a^2$ をとる。このとき AP は最大値 $\frac{4}{\sqrt{3}} a$ をとる。



[解説]

有名は曲線カージオイドを題材とした問題です。なお、極方程式は $r < 0$ の場合もあるので、注意しなくてはなりません。