２０２０ 入試対策
２次数学アーカイブ

微分法
理系

１９９８－２０１９

外林康治 編著

電送数学舎

微分法

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1　以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x)=e^x f(x)$ とおく。

(1)　定数関数でない関数 $f(x)$ で

　　条件(A)：すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である

をみたすものの例をあげよ。

(2)　関数 $f(x)$ が

　　条件(B)：すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である

をみたすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)をみたすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ。

(4)　関数 $f(x)$ が(1), (2)の条件(A), (B)をともにみたすとする。

①　$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ。

②　ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ となることを示せ。

［1998　九州大］

2　α，β，γ は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする。このとき，$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ。

［1999　京都大］

3　正の実数 a, b, p に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ。

［1999　東京工大］

4　すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}}\leqq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。

［2000　筑波大］

5　a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x)=\frac{\log x}{(1+x)^a}\quad (x>0)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在することを示せ。

(2)　$f'(c)=0$ となる c はただ 1 つであり，関数 $f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることを示せ。

［2002　筑波大］

6 (1) x を正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2) $\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。 ［2002 名古屋大］

7 以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 x, y に対して，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x=y$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数 x_1，…，x_n が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ を満たしているとき，不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\geqq\log\frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。 ［2002 金沢大］

8 関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\ f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1) $f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ。

(2) $f_n^{(1)}(0)$，$f_n^{(2)}(0)$，$f_n^{(3)}(0)$，$f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。 ［2003 東京工大］

9 座標平面上に直線 $l: x\sin\theta+y\cos\theta=1$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がある。不等式 $x\geqq0$, $y\geqq0$, $x\sin\theta+y\cos\theta\geqq1$ が表す領域を D, 不等式 $x\geqq0$, $y\geqq0$, $x\sin\theta+y\cos\theta\leqq1$ が表す領域を D' とする。

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1，C_2 を，C_1 は l と y 軸に接し，C_2 は l と x 軸に接し，さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる。また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1'，C_2' を，C_1' は l と y 軸に接し，C_2' は l と x 軸に接し，さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる。

(1) $\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ。

(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

［2004 大阪大］

10 a を $0<a<1$ を満たす定数とし，$f(x)=\dfrac{\cos2x-2}{a\cos x+1}$ とする。

(1) $f(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。 ［2005 東北大］

11 k を正の整数とし，$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ の範囲で定義された 2 曲線

$$C_1 : y=\cos x\,,\ \ C_2 : y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える。

(1) C_1 と C_2 は共有点をもつことを示し，その点における C_1 の接線は点 $(0,\ 1)$ を通ることを示せ。

(2) C_1 と C_2 の共有点はただ 1 つであることを証明せよ。 ［2005 京都大］

12 $a \geqq b > 0$, $x \geqq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1) $0 \leqq e^x-(1+x) \leqq \dfrac{x^2e^x}{2}$

(2) $a^n-b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3) $e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2e^x}{2n}$ ［2006 筑波大］

13 すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1) 任意の実数 a に対して，$-1 < f(a) < 1$ であることを証明せよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。 ［2007 京都大］

14 曲線 $C : y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P, Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P, Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

［2008 名古屋大］

15 $a,\ b$ は実数で $a>b>0$ とする。区間 $0\leqq x\leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log\left(ax+b(1-x)\right)-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし, log は自然対数を表す。このとき, 以下のことを示せ。

(1) $0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2) $f'(c)=0$ を満たす実数 c が, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3) $0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して, $ax+b(1-x)\geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

［2009 神戸大］

16 (1) 実数 x が $-1<x<1$, $x\neq 0$ を満たすとき, 次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

［2009 東京大］

17 長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし, 点 P は点 A, B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり, 線分 BP の長さを x とし, 線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

(1) y を x を用いて表せ。

(2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき, y が最大となる x を求めよ。

［2012 東北大］

18 k を定数とするとき, 方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

［2013 東京工大］

19 a を実数とし, $x>0$ で定義された関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。

［2013 東京大］

20 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a, b, c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし, log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 a, b, c, d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a \leqq b \leqq c$，$d \geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 [2014 熊本大]

21 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。 [2014 九州大]

22 xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。 [2015 東京工大]

23 次の問いに答えよ。

(1) c を正の定数とする。正の実数 x, y が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y, z が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。 [2016 大阪大]

24 e を自然対数の底，すなわち $e=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

[2016 東京大]

25 以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，不等式 $\log x<x$ を示せ。

(2) $1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3) $x\geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。 ［2016 千葉大］

26 n を自然数とする。$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。

(3) (2)における解を x_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx_n$ を求めよ。

［2017 神戸大］

27 a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。 ［2018 名古屋大］

28 以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。x についての方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ は，ただ 1 つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1)で定まる a_n に対し，$\cos a_n>\cos 1$ を示せ。

(3) (1)で定まる数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n,\quad b=\lim_{n\to\infty}{a_n}^n,\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。 ［2019 東京大］

微 分 法

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1　　[1998 九州大]

(1)　$f(x+1)=f(x)$ は，$f(x)$ が周期１の周期関数であることを表す。
　その１例として，$f(x)=\sin 2\pi x$ があげられる。

(2)　$F(x)=e^x f(x)$ より，$F'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\{f'(x)+f(x)\}$
　条件(B)より，$F'(x)\leqq 0$ となり，これより $F(x)$ は単調非増加。
　よって，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$

(3)　条件(A)より，正の整数 n に対して帰納的に，$f(x+n)=f(x)$ が成立する。
　よって，$F(x+n)=e^{x+n}f(x+n)=e^n e^x f(x)=e^n F(x)$

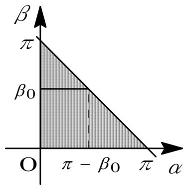
(4)　(2)より，正の整数 n に対して，$F(x)\geqq F(x+n)$
　(3)と合わせて，$F(x)\geqq e^n F(x)$，$(1-e^n)F(x)\geqq 0$
　よって，任意の x において $F(x)\leqq 0$，すなわち，$e^x f(x)\leqq 0$ から，$f(x)\leqq 0$
　すると，$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ である。
　また，ある c で $f(c)=0$ であれば，$F(c)=0$
　(2)より，$F(x)$ は単調非増加関数なので，$0=F(c)\geqq F(c+1)$
　(3)より，$F(c+1)=eF(c)=0$
　よって，$c\leqq x\leqq c+1$ において，$F(x)=0$，すなわち $f(x)=0$
　条件(A)より，すべての x で $f(x)=0$

［解　説］

抽象関数についての問題でも，具体的なイメージは必要ですが，それだけでは完全な解はできません。特に，(4)の証明には試行錯誤が要求されます。なお，微分方程式が高校課程からなくなって抽象関数を扱う機会が少なくなってしまいましたが，それに逆行するような形です。

２ ［1999 京都大］

$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma=\pi-\alpha-\beta>0$ すなわち $\alpha+\beta<\pi$ のもとで，



$$P=\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin\alpha\sin\beta\sin(\pi-\alpha-\beta)$$
$$=\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{1}{2}\{\cos(2\alpha+\beta)-\cos\beta\}\sin\beta$$

ここで，$\beta=\beta_0\ (0<\beta_0<\pi)$ と β の値を固定すると，

$$P=-\frac{1}{2}\{\cos(2\alpha+\beta_0)-\cos\beta_0\}\sin\beta_0=\frac{1}{2}\sin\beta_0\{\cos\beta_0-\cos(2\alpha+\beta_0)\}$$

$\sin\beta_0>0$ より，$\cos(2\alpha+\beta_0)$ が最小値をとるとき，P は最大値をとる。

さて，$0<\alpha<\pi-\beta_0$ より，$\beta_0<2\alpha+\beta_0<2\pi-\beta_0$ なので，$2\alpha+\beta_0=\pi$ すなわち $\alpha=\frac{1}{2}(\pi-\beta_0)$ において，$\cos(2\alpha+\beta_0)$ は最小値 -1 をとる。

$\beta=\beta_0$ と固定したとき，P の最大値は $P=\frac{1}{2}\sin\beta_0(\cos\beta_0+1)$ である。

次に，このとき β_0 の値を $0<\beta_0<\pi$ の範囲で変化させて，P の最大値を求める。

そこで，$f(x)=\sin x(\cos x+1)\ (0<x<\pi)$ とおくと，

$$f'(x)=\cos x(\cos x+1)+\sin x(-\sin x)$$
$$=2\cos^2x+\cos x-1$$
$$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		＋	0	－	
$f(x)$		↗		↘	

右の増減表から，$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ をとる。

以上より，P は $\beta=\frac{\pi}{3}$，$\alpha=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$，$\gamma=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ のとき最大となり，このとき最大値は，$P=\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{3}=\frac{3}{8}\sqrt{3}$ である。

［解 説］

どこかで出会ったような問題です。いわゆる予選・決勝戦という方法で解くと，予想通りの結論が得られます。

３ ［1999 東京工大］

$A=(a+b)^p$，$B=2^{p-1}(a^p+b^p)$に対して，$\dfrac{b}{a}=x$とおくと，$x>0$として，

$$A=a^p(1+x)^p,\ B=2^{p-1}(a^p+a^px^p)=a^p\cdot 2^{p-1}(1+x^p)$$

すると，$A-B=a^p\left\{(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)\right\}$

ここで，$f(x)=(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)$とおくと，

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-2^{p-1}\cdot px^{p-1}=p\left\{(1+x)^{p-1}-(2x)^{p-1}\right\}$$

(i) $p-1>0$ （$p>1$）のとき

$f'(x)>0 \iff (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \iff 1+x>2x \iff 0<x<1$

$f'(x)<0 \iff (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \iff 1+x<2x \iff 1<x$

$f(x)$の値の増減は右図のようになり，

$f(x)\leqq 0$

よって，$A\leqq B$（等号は$a=b$のとき成立）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		＋	0	－
$f(x)$		↗	0	↘

(ii) $p-1=0$ （$p=1$）のとき

$f(x)=(1+x)-2^0(1+x)=0$より，$A=B$

(iii) $p-1<0$ （$0<p<1$）のとき

$f'(x)>0 \iff (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \iff 1+x<2x \iff 1<x$

$f'(x)<0 \iff (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \iff 1+x>2x \iff 0<x<1$

$f(x)$の値の増減は右図のようになり，

$f(x)\geqq 0$

よって，$A\geqq B$（等号は$a=b$のとき成立）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		－	0	＋
$f(x)$		↘	0	↗

(i)(ii)(iii)をまとめて，

$p>1$ かつ $a\neq b$ のとき $A<B$, また $0<p<1$ かつ $a\neq b$ のとき $A>B$, さらにこれらの場合以外の $p=1$ または$a=b$のとき$A=B$

［解 説］

A も B も a と b についての p 次式で，しかも定数項が 0 なので，a と b の比を考えて文字を減らしました。この常套手段で結論が導けます。

4 ［2000 筑波大］

$x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ より，$\log x^{\sqrt{a}} \leqq \log a^{\sqrt{x}}$，$\sqrt{a}\log x \leqq \sqrt{x}\log a$ なので，

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leqq \frac{\log a}{\sqrt{a}} \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \log x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	0

すると，(＊)はどんな正の実数 x についても，$f(x) \leqq f(a)$ ということなので，この条件を満たす a の値は，上表より $a = e^2$ となる。

［解 説］

毎年のように類題の出る頻出有名問題です。ポイントは(＊)の形に不等式を変形することです。

5 ［2002 筑波大］

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{(1+x)^a}$ より，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}(1+x)^a-a\log x\cdot(1+x)^{a-1}}{(1+x)^{2a}}=\dfrac{1+x-ax\log x}{x(1+x)^{a+1}}$

ここで，$g(x)=1+x-ax\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^{a+1}}$ となり，

$$g\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=1+e^{\frac{1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{a}=1,\quad g\left(e^{\frac{2}{a}}\right)=1+e^{\frac{2}{a}}-ae^{\frac{2}{a}}\cdot\frac{2}{a}=1-e^{\frac{2}{a}}<0$$

$x>0$ なので $x(1+x)^{a+1}>0$ より，$f'\left(e^{\frac{1}{a}}\right)>0$，$f'\left(e^{\frac{2}{a}}\right)<0$

よって，$e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在する。

(2) $g'(x)=1-a\log x-ax\cdot\dfrac{1}{x}=1-a-a\log x$

$g'(x)=0$ の解は $\log x=\dfrac{1-a}{a}$ より $x=e^{\frac{1-a}{a}}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty$ から，

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

$g(x)$ の増減は右表のようになる。

よって，$g(x)=0$ となる x は 1 つしかなく，言い換えると，$f'(c)=0$ となる c はただ 1 つである。

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることになる。

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

［解 説］

微分法の標準的な問題です。ただ，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$ はプロセス抜きで答えるしかないでしょう。

$\boxed{6}$ ［2002 名古屋大］

(1) $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと,

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

$f(x)$ は $x>0$ において単調減少で, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より, $f(x)>0$

よって, $\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2) $g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと, (1)より,

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

よって, $g(x)$ は $x>0$ において単調増加である。

すると, $\dfrac{2001}{2002}<\dfrac{2002}{2001}$ より, $g\left(\dfrac{2001}{2002}\right)<g\left(\dfrac{2002}{2001}\right)$ となるので,

$$\log\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\log\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$$

したがって, $\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

［解 説］

(2)において $g(x)$ を設定するところがポイントです。 $g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ または $g(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ でしょうが, 前者の方が(1)と相性がよさそうです。

７ [2002 金沢大]

(1) x, y の大小関係で場合分けをして，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ を証明する。

(i) $0<y<x$ のとき

$f(x)=\log x$ とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ となるので，平均値の定理より，

$$\frac{\log x-\log y}{x-y}=\frac{1}{c_1}\quad(0<y<c_1<x)$$

$\dfrac{1}{c_1}>\dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log x-\log y}{x-y}>\dfrac{1}{x}$，$x(\log x-\log y)>x-y$

(ii) $0<x<y$ のとき

(i)と同様にして，$\dfrac{\log y-\log x}{y-x}=\dfrac{1}{c_2}\quad(0<x<c_2<y)$

$\dfrac{1}{c_2}<\dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log y-\log x}{y-x}<\dfrac{1}{x}$，$x(\log y-\log x)<y-x$

$$x(\log x-\log y)>x-y$$

(iii) $0<x=y$ のとき

$\log x-\log y=0$，$x-y=0$ より，$x(\log x-\log y)=x-y$

(i)(ii)(iii)より，$x(\log x-\log y)\geqq x-y$（等号は $x=y$ のとき成立）

(2) $1\leqq i\leqq n$ として, (1)から，$x_i\left(\log x_i-\log\dfrac{1}{n}\right)\geqq x_i-\dfrac{1}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\log x_i-\log\frac{1}{n}\right)\geqq\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i-\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqq\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1$$

条件より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ なので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i-\log\frac{1}{n}\geqq 1-\frac{1}{n}\cdot n$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\geqq\log\frac{1}{n}$$

等号が成立するのは，$(*)$において $x_i=\dfrac{1}{n}$ のとき，すなわち $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ の場合に限る。

［解 説］

(2)は(1)を利用します。等号成立条件を参照すれば，x を x_i，y を $\dfrac{1}{n}$ と置き換えるのは，そんなに難しいことではありません。

８ ［2003 東京工大］

(1) $f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき $f_1(x)=x^2$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき $f_k(x)$ が $k+1$ 次多項式であるとする。

このとき $f_k^{(2)}(x)$ は $k-1$ 次多項式となり，$x^3f_k^{(2)}(x)$ は $k+2$ 次多項式である。

すると，$f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3f_k^{(2)}(x)$ より，$f_{k+1}(x)$ は $k+2$ 次多項式となる。

(i)(ii)より，$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式である。

さて，$f_n(x)$ の x^{n+1} の係数を a_n とすると，$a_1=1$ で，$f_n^{(2)}(x)$ の x^{n-1} の係数は $n(n+1)a_n$ となるので，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$ から x^{n+2} の係数を比べると，

$$a_{n+1}=n(n+1)a_n$$

$n\geqq 2$ で，$a_n=a_1(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(3\cdot 4)\cdots(n-1)n=(n-1)!n!$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=0!1!=1$ となり成立する。

よって，$a_n=(n-1)!n!$

(2) $g_n(x)$ を x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項が 0 の 5 次以上の多項式として，

$$f_n(x)=g_n(x)+p_nx^4+q_nx^3+r_nx^2+s_nx+t_n$$

すると条件より，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3\{g_n^{(2)}(x)+12p_nx^2+6q_nx+2r_n\}$

$=f_n(x)+x^3g_n^{(2)}(x)+12p_nx^5+6q_nx^4+2r_nx^3$

ここで x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項を比べると，

$p_{n+1}=p_n+6q_n$ ……①，$q_{n+1}=q_n+2r_n$ ……②

$r_{n+1}=r_n$ ……③，$s_{n+1}=s_n$ ……④，$t_{n+1}=t_n$ ……⑤

また，$f_1(x)=x^2$ より，$p_1=q_1=0$，$r_1=1$，$s_1=t_1=0$ となり，

③より $r_n=1$，④⑤より $s_n=t_n=0$

②に代入して，$q_{n+1}=q_n+2$ より，$q_n=0+2(n-1)=2(n-1)$

さらに①に代入して，$p_{n+1}=p_n+12(n-1)$ より，$n\geqq 2$ で，

$$p_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}12(k-1)=6(n-1)(n-2)$$

$n=1$ をあてはめると，$p_1=0$ となり成立する。

よって，$f_n^{(1)}(x)=g_n^{(1)}(x)+4p_nx^3+3q_nx^2+2r_nx+s_n$ より，$f_n^{(1)}(0)=s_n=0$

$f_n^{(2)}(x)=g_n^{(2)}(x)+12p_nx^2+6q_nx+2r_n$ より，$f_n^{(2)}(0)=2r_n=2$

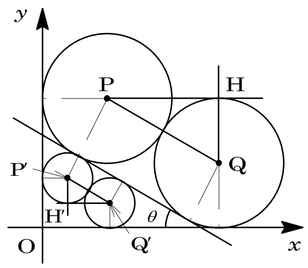
$f_n^{(3)}(x)=g_n^{(3)}(x)+24p_nx+6q_n$ より，$f_n^{(3)}(0)=6q_n=12(n-1)$

$f_n^{(4)}(x)=g_n^{(4)}(x)+24p_n$ より，$f_n^{(4)}(0)=24p_n=144(n-1)(n-2)$

［解 説］

(1)と(2)は同じ解法をとっています。比べる位置が異なるだけです。

9 ［2004 大阪大］



(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から，直線 $l: x\sin\theta+y\cos\theta=1$ の上向きの法線ベクトルの成分を $(\sin\theta,\ \cos\theta)$ とすることができるので，これより l の右向きの方向ベクトルの成分は $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる。

さて，半径 R の 2 つの円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ P，Q とおき，P を通り x 軸に平行な直線と，Q を通り y 軸に平行な直線との交点を H とおくと，$\mathrm{PQ}=2R$，$\angle\mathrm{QPH}=\theta$ となる。

すると，点 P の座標は $\mathrm{P}(R,\ 2R\sin\theta+R)$ となり，直線 l との距離が R なので，

$$\frac{R\sin\theta+(2R\sin\theta+R)\cos\theta-1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=R$$

$R(\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)-1=R$ より，$R=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}$

同様にして，図のように点 P′，Q′，H′ を設定すると，$\mathrm{P}'(r,\ 2r\sin\theta+r)$ となり，

$$\frac{-\{r\sin\theta+(2r\sin\theta+r)\cos\theta-1\}}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}=r$$

$-r(\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta)+1=r$ より，$r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

以上より，$\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $1<t\leqq\sqrt{2}$ である。

ここで，$\dfrac{r}{R}=f(t)$ とおくと，(1)より，

$$f(t)=\frac{t+t^2-2}{t+t^2}=1-\frac{2}{t+t^2}$$

すると，$1<t\leqq\sqrt{2}$ で，$f'(t)=\dfrac{2(2t+1)}{(t+t^2)^2}>0$ より，$f(t)$ は単調増加し，

$$f(1)<f(t)\leqq f(\sqrt{2})$$

よって，$f(1)=0$，$f(\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$ より，$0<\dfrac{r}{R}\leqq-1+\sqrt{2}$ である。

［解 説］

(1)はいろいろな解法が考えられます。最初に考えたのは，直線 l の x 切片と y 切片の間の距離を R と θ で表すものでした。しかし，計算が複雑になりすぎ，次に考えたのが上に記した解法です。