

2020 入試対策  
2次数学アーカイブ

# 積分法

## 理系

1998 - 2019

---

外林康治 編著

電送数学舎

---

# 積分法

## 【問題一覧】

---

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 関数  $f(x) = \int_x^{2x+1} \frac{1}{t^2+1} dt$  について次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x) = 0$  となる  $x$  を求めよ。  
 (2)  $f'(x) = 0$  となる  $x$  を求めよ。  
 (3)  $f(x)$  の最大値を求めよ。

[1998 筑波大]

2 (1)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$  のとき、 $y = f(x)$  の逆関数  $y = g(x)$  を求めよ。

(2) (1)の  $f(x)$ ,  $g(x)$  に対し、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = bf(b) - af(a)$$

[1998 東北大]

3 2以上の自然数  $n$  に対して

$$\int_0^1 t^{2n-1} e^t dt + \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n-1 P_{2n-2k}}{2k+1} \right) e = (2n-1)!$$

を示せ。ここで  $e$  は自然対数の底である。

[1999 東京工大]

4 (1)  $a_0 < b_0$ ,  $a_1 < b_1$  を満たす正の実数  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} > \frac{a_1^2}{a_0^2+1} + \frac{b_1^2}{b_0^2+1}$$

(2)  $n$  個の自然数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  は互いに相異なり、 $1 \leq x_k \leq n$  ( $1 \leq k \leq n$ ) を満たしているとする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

[1999 京都大]

5 次を示せ。

(1)  $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \int_0^1 \sin \pi y dy = \frac{2}{\pi}$

[2000 金沢大]

6  $a > 0, t > 0$  に対して定積分  $S(a, t) = \int_0^a \left| e^{-x} - \frac{1}{t} \right| dx$  を考える。

(1)  $a$  を固定したとき、 $t$  の関数  $S(a, t)$  の最小値  $m(a)$  を求めよ。

(2)  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2}$  を求めよ。 [2001 東京工大]

7  $f(t)$  を連続関数、 $x$  を実数として、関数  $g(x)$  を次のように定義する。

$$g(x) = \int_0^1 |f(t) - x| dt$$

(1)  $f(t) = e^t$  のとき、関数  $g(x)$  の増減を調べ、 $y = g(x)$  のグラフの概形を描け。ただし、 $e = 2.71828\dots$  は自然対数の底である。

(2)  $f(t)$  は微分可能な単調増加関数で、その逆関数も微分可能とし、 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$  とおく。このとき、 $g(x)$  は  $x = a$  で最小値をとることを証明せよ。 [2001 岡山大]

8 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx \quad [2001 京都大]$$

9  $-1 < a < 1$  とする。

(1) 積分  $\int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx$  を求めよ。

(2)  $n = 1, 2, 3, \dots$  のとき、次の等式を示せ。

$$\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

(3) 次の等式を示せ。

$$\log \frac{1+a}{1-a} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1} \quad [2001 北海道大]$$

10 関数  $f(x) = 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3$  を考える。 $n, k$  を自然数とし

$$g_n(k) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \dots + f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし  $n \geq 2$  とする。

(1)  $n$  を固定する。 $2 \leq k \leq 3n$  の範囲で  $g_n(k-1) \geq g_n(k)$  となる  $k$  をすべて求めよ。

また、 $k$  が  $1 \leq k \leq 3n$  の範囲を動くとき、 $g_n(k)$  を最小とする  $k$  をすべて求めよ。

(2) (1)における  $g_n(k)$  の最小値を  $G_n$  とする。このとき極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n}$  を求めよ。

[2001 大阪大]

**11**  $n$  を 2 以上の整数とし,  $I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt \, dt$  ( $x \geq 0$ ) と定める。

- (1)  $n=2$  のとき,  $I(x)$  の最大値を求めよ。  
 (2)  $I(x)$  の最大値が  $\frac{n}{n^2-1}$  であるならば,  $n$  は偶数であることを証明せよ。

[2002 千葉大]

**12** 次の問いに答えよ。

- (1) すべての正の実数  $x, y$  に対して, 不等式  $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$  が成り立つことを示せ。ここで  $\log$  は自然対数を表す。  
 (2)  $a, b$  は実数で  $a < b$  とする。関数  $f(x)$  と  $g(x)$  は閉区間  $[a, b]$  で正の値をとる連続関数で,  $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$  をみたす。このとき, 不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x) \, dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) \, dx$$

が成り立つことを示せ。

- (3)  $a, b$  は実数で  $a < b$  とする。閉区間  $[a, b]$  で正の値をとる連続関数  $f(x)$  に対し正の実数  $M$  を  $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$  とする。不等式

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) \, dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ。

[2002 九州大]

**13**  $a$  は定数とし,  $n$  は 2 以上の整数とする。関数  $f(x) = ax^n \log x - ax$  ( $x > 0$ ) の最小値が  $-1$  のとき, 定積分  $\int_1^e f(x) \, dx$  の値を  $n$  と自然対数の底  $e$  を用いて表せ。

[2003 千葉大]

**14**  $n$  を自然数とする。 $n+1$  項の等差数列  $x_0, x_1, \dots, x_n$  と等比数列  $y_0, y_1, \dots, y_n$  が,  $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 2$ ,  $1 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 2$  を満たすとし,  $P(n), Q(n), R(n), S(n)$  を次で定める。

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$$

このとき極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n), \lim_{n \rightarrow \infty} Q(n), \lim_{n \rightarrow \infty} R(n), \lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$  をそれぞれ求めよ。

[2004 東北大]

**15**  $n = 0, 1, 2, \dots$  に対して,  $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx$  とおく。ただし,  $0! = 1$  とする。

(1)  $I_0$  の値を求め,  $n = 1, 2, \dots$  のとき  $I_n$  と  $I_{n-1}$  の関係式を求めよ。また, これらを用いて  $I_3$  の値を求めよ。

(2)  $0 \leq x \leq 2$  に対して  $e^x \leq e^2$  であることを利用して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$  を求めよ。

[2004 九州大]

**16** 次の問いに答えよ。

(1)  $f(x), g(x)$  を連続な偶関数,  $m$  を正の整数とするととき,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx = m \int_0^\pi f(\sin x) g(\cos x) dx$$

を証明せよ。

(2) 正の整数  $m, n$  が  $m\pi \leq n < (m+1)\pi$  を満たしているとき,

$$\frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1 + \cos^2 nx)^2} dx \leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} dx$$

を証明せよ。

(3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1 + \cos^2 nx)^2} dx$  を求めよ。

[2004 東京工大]

**17** 多項式の列  $f_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$  が,  $f_0(x) = 2, f_1(x) = x,$

$$f_n(x) = x f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

を満たすとする。

(1)  $f_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta, n = 0, 1, 2, \dots$  であることを示せ。

(2)  $n \geq 2$  のとき, 方程式  $f_n(x) = 0$  の  $|x| \leq 2$  における最大の実数解を  $x_n$  とおく。こ

のとき,  $\int_{x_n}^2 f_n(x) dx$  の値を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{x_n}^2 f_n(x) dx$  の値を求めよ。

[2004 名古屋大]

**18**  $e$  を自然対数の底とし, 数列  $\{a_n\}$  を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1)  $n \geq 3$  のとき, 次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2)  $n \geq 1$  に対し,  $a_n > a_{n+1} > 0$  となることを示せ。

(3)  $n \geq 2$  のとき, 以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)} (e-2)$$

[2005 東京工大]

**19**  $f(x)$  は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1) 自然数  $n, m$  に対し,  $\int_0^n t^m dt \leq \sum_{k=1}^n k^m \leq \int_0^n (t+1)^m dt$  を示せ。

(2)  $f(x)$  の次数を  $r$  とするとき, 次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{r+1}$$

(3) すべての自然数  $n$  に対して  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} f(n)$  が成り立つような  $f(x)$  を求めよ。

[2005 北海道大]

**20**  $x > 0$  を定義域とする関数  $f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$  について, 以下の問いに答えよ。

(1) 関数  $y = f(x)$  ( $x > 0$ ) は, 実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち, 任意の実数  $a$  に対して,  $f(x) = a$  となる  $x > 0$  がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を  $y = g(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) とする。このとき, 定積分

$$\int_8^{27} g(x) dx$$

[2006 東京大]

**21** 以下の問いに答えよ。

(1)  $0 < x < a$  を満たす実数  $x, a$  に対し, 次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left( \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

(2) (1)を利用して, 次を示せ。

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし,  $\log 2$  は 2 の自然対数とする。

[2007 東京大]

**22**  $a > 0$  に対し  $I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} dx$ ,  $I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とおく。

(1)  $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$  を求めよ。

(2) 漸化式  $I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を示せ。

(3) 自然数  $n$  に対して,  $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$  を求めよ。 [2007 東北大]

**23**  $e$  は自然対数の底とする。  $t > e$  において関数  $f(t)$ ,  $g(t)$  を次のように定める。

$$f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t-x} dx, \quad g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x} dx$$

(1)  $f(t) - g(t)$  を  $t$  の 1 次式で表せ。

(2)  $1 \leq x \leq e$  かつ  $t > e$  のとき  $\frac{1}{t-x} \leq \frac{1}{t-e}$  が成り立つことを用いて,  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  を示せ。

(3)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( f(t) - \frac{bt^2}{t-a} \right) = 0$  となる定数  $a, b$  を求めよ。 [2008 筑波大]

**24** 次の問いに答えよ。ただし,  $n$  は自然数を表す。

(1)  $0 \leq x \leq 1$  を満たす実数  $x$  に対して, 不等式  $\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$  が成り立つことを示せ。ただし, 対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} \right)^5$$

(3) 数列  $\{a_n\}$  を,  $a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$  で定めるとき, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。 [2008 広島大]

**25** 自然数  $n$  に対して,  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{2n} dx$  とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(1)  $a_1$  を求めよ。

(2)  $a_{n+1}$  を  $a_n$  で表せ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$  を求めよ。

[2009 北海道大]



**26** 曲線  $y = e^x$  上の点  $A(0, 1)$  における接線を  $l$  とし、点  $B(0, 2)$  を通り直線  $l$  に平行な直線を  $m$  とする。直線  $m$  と曲線  $y = e^x$  の2つの交点  $P, Q$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  (ただし  $\alpha < \beta$ ) とする。直線  $x = \alpha$  と直線  $l$  の交点を  $P'$ 、直線  $x = \beta$  と直線  $l$  の交点を  $Q'$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形  $PP'Q'Q$  の面積  $S$  を  $\alpha, \beta$  で表せ。
- (2) 直線  $m$  と曲線  $y = e^x$  によって囲まれる図形の面積  $T$  を  $\alpha, \beta$  の多項式で表せ。
- (3) 線分  $PQ$  の中点  $R$  は第2象限にあることを示せ。
- (4)  $\alpha + \beta > -1$  であることを示せ。

[2009 広島大]

**27**  $f(x)$  を整式で表される関数とし、 $g(x) = \int_0^x e^t f(t) dt$  とおく。任意の実数  $x$  について、 $x(f(x) - 1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt$  が成り立つとする。

- (1)  $xf''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) = 1$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $f(x)$  は定数または1次式であることを示せ。
- (3)  $f(x)$  および  $g(x)$  を求めよ。

[2009 筑波大]

**28** 関数  $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1 + \tan t) dt$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$ ) について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ。
- (2)  $f(0)$  の値を求めよ。
- (3) 条件  $a_1 = f(0)$ 、 $a_{n+1} = f(a_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定まる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

[2010 熊本大]

**29** (1) すべての自然数  $k$  に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2)  $m > n$  であるようなすべての自然数  $m$  と  $n$  に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

[2010 東京大]

30 自然数  $n$  に対し,  $S_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x} dx$ ,  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$  とおく。このとき

以下の各問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。  $\left| S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$

(2)  $T_n - 2S_n$  を  $n$  を用いて表せ。

(3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  を求めよ。

[2011 東京医歯大]

31 曲線  $y = \log x$  の接線はつねにこの曲線の上側にあることを利用して, 次の問いに答えよ。以下,  $k$  は自然数とする。

(1) 点  $A_k(k, 0)$  を通り  $x$  軸に垂直な直線と曲線  $y = \log x$  との交点を  $A'_k$  とし,  $A'_k$  におけるこの曲線の接線を  $l_k$  とする。また,  $k \geq 2$  のとき,  $B_k(k - \frac{1}{2}, 0)$ ,  $C_k(k + \frac{1}{2}, 0)$  を通り  $x$  軸に垂直な直線と接線  $l_k$  との交点をそれぞれ  $B'_k$ ,  $C'_k$  とする。四角形  $B_k C_k C'_k B'_k$  の面積を求めよ。

(2) 次の2つの値の大きさを比較せよ。

(ア)  $\log k$  と  $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x dx$  (ただし,  $k \geq 2$ )

(イ)  $\frac{\log k + \log(k+1)}{2}$  と  $\int_k^{k+1} \log x dx$  (ただし,  $k \geq 1$ )

(3)  $a_n = \log(n!) - \frac{1}{2} \log n$  とおくと, 2以上の自然数  $n$  について, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\int_{\frac{3}{2}}^n \log x dx < a_n < \int_1^n \log x dx$$

(4) 2以上の自然数  $n$  について

$$U_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + \frac{3}{2} \left(1 - \log \frac{3}{2}\right), \quad V_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - n + 1$$

とおくとき, 次の不等式を示せ。

$$U_n < \log(n!) < V_n$$

[2011 長崎大]

32  $n$  を正の整数とする。数列  $\{a_k\}$  を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k a_i \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

(1)  $a_2$  および  $a_3$  を求めよ。

(2) 一般項  $a_k$  を求めよ。

(3)  $b_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k}$  とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log 2$  を示せ。 [2012 東京工大]

33 微分可能な関数  $f(x)$  が、すべての実数  $x, y$  に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$$

を満たし、さらに  $f'(0) = 0$  を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)  $f(0)$  を求めよ。

(2) 関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ。

(3) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$  を求めよ。 [2013 新潟大]

34  $n, m$  を 0 以上の整数とし、 $I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$  とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $n \geq 2$  のとき、 $I_{n,m}$  を  $I_{n-2,m+2}$  を使って表せ。

(2) 次の式  $I_{2n+1, 2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$  を示せ。

(3) 次の式  $\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{mC_0}{n+1} - \frac{mC_1}{n+2} + \dots + (-1)^m \frac{mC_m}{n+m+1}$  を示せ。ただし

$0! = 1$  とする。

[2014 千葉大]

**35** 自然数  $n$  に対して,  $a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$  とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 自然数  $n$  に対して, 不等式  $\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| \leq \frac{1}{2n+3}$  が成り立つことを示せ。
- (2) 定積分  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$  を求めよ。
- (3) 自然数  $n$  に対して,  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$  となることを示せ。
- (4) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$  を求めよ。 [2014 新潟大]

**36**  $n$  を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $g(x)$  を次のように定める。

$$g(x) = \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} \quad (|x| \leq 1 \text{ のとき}), \quad g(x) = 0 \quad (|x| > 1 \text{ のとき})$$

$f(x)$  を連続な関数とし,  $p, q$  を実数とする。  $|x| \leq \frac{1}{n}$  を満たす  $x$  に対して  $p \leq f(x) \leq q$  が成り立つとき, 次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

- (2) 関数  $h(x)$  を次のように定める。

$$h(x) = -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) \quad (|x| \leq 1 \text{ のとき}), \quad h(x) = 0 \quad (|x| > 1 \text{ のとき})$$

このとき, 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx \quad [2015 東京大]$$

**37**  $a > 0$  に対し, 関数  $f(x)$  が,  $f(x) = \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt$  を満たすとする。

- (1)  $f(x)$  を求めよ。
- (2)  $0 < a \leq 2\pi$  において,  $g(a) = \int_{-a}^a f(t) \sin t dt$  の最小値とそのときの  $a$  の値を求めよ。 [2016 北海道大]

38 連続関数  $f(x)$  と定数  $a$  が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t) dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t) dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t) dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

- (1)  $a$  と  $f(0)+f(1)$  の値を求めよ。
- (2)  $g(x) = e^{-2x}f(x)$  とおくと、 $g(x)$  の導関数  $g'(x)$  を求めよ。ここで  $e$  は自然対数の底を表す。
- (3)  $f(x)$  を求めよ。 [2017 東京医歯大]

39 積分を用いて表される次の関数

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{-t} dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

について、以下の問いに答えよ。ただし、 $0! = 1$  と定める。また、関数  $y = t^0$  は、関数  $y = 1$  を意味する。

- (1) 部分積分を利用して、 $F_2(x)$  を  $F_1(x)$  を用いて表せ。同様に、 $F_1(x)$  を  $F_0(x)$  を用いて表せ。
- (2)  $F_0(x)$  を計算し、積分を含まない式として表せ。その結果を利用して、 $F_1(x)$  を積分を含まない式として表せ。さらに、 $F_2(x)$  を積分を含まない式として表せ。
- (3)  $n \geq 1$  のとき、 $F_n(x)$  を  $F_{n-1}(x)$  を用いて表せ。さらに、 $n \geq 0$  のとき、 $F_n(x)$  を積分を含まない式として表せ。
- (4)  $p(x) = x^n$  とおくと、 $k$  次導関数  $p^{(k)}(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) を求めよ。そして、

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt = n! - e^{-x} \sum_{k=0}^n p^{(k)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $p^{(0)}(x) = p(x)$  と定める。 [2018 長崎大]

40 自然数  $n$  に対し、定積分  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$  を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$  を示せ。
- (2)  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$  を示せ。
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$  を求めよ。
- (4)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$  とする。このとき(1), (2)を用いて  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

[2018 名古屋大]

41 自然数  $n$  に対して、関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x)$$

と定める。ただし、 $(-x)^{3k}$  は  $k=0$  のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1)  $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1}$  を示せ。

(2)  $\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)}$  を示せ。

(3) 無限級数  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right)$  の和を求めよ。

[2018 新潟大]

42 以下の問いに答えよ。ただし、 $\log$  は自然対数、 $e$  はその底とする。

(1)  $b$  を実数とする。関数  $f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$  は単調に減少することを示せ。

(2)  $a \leq b$  を満たす正の実数  $a, b$  に対し、不等式

$$\frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 数列  $\{I_n\}$  を次のように定める。  $I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )

このとき極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n$  を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$  を用いてもよい。

[2019 大阪大]

43 関数  $f(x)$  は実数全体で連続で、すべての実数  $x$  に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$$

を満たすとする。ただし、 $e$  は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)  $f(0)$  の値を求めよ。また、 $f'(x) = 2(x-1)\cos x$  が成り立つことを示せ。

(2)  $f(x)$  を求めよ。

(3) 方程式  $f(x) = 0$  は、 $0 < x < \pi$  の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(4) (3) のただ 1 つの解を  $\alpha$  とする。曲線  $y = f(x)$  ( $0 \leq x \leq \alpha$ )、 $x$  軸および  $y$  軸によって囲まれる部分の面積を  $S_1$  とし、曲線  $y = f(x)$  ( $\alpha \leq x \leq \pi$ )、 $x$  軸および直線  $x = \pi$  によって囲まれる部分の面積を  $S_2$  とする。 $S_1$  と  $S_2$  の大小を判定せよ。

[2019 広島大]

---

# 積分法

## 【解答例と解説】

---

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 筑波大]

$$(1) \quad g(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \text{ とおくと, つねに } g(t) > 0 \text{ より,}$$

$$2x + 1 > x \quad (x > -1) \text{ のとき, } f(x) > 0$$

$$2x + 1 < x \quad (x < -1) \text{ のとき, } f(x) < 0$$

よって,  $f(x) = 0$  となるのは,  $2x + 1 = x$  のときだけである。

すなわち,  $x = -1$

$$(2) \quad f'(x) = g(2x+1) \cdot (2x+1)' - g(x) = \frac{2}{(2x+1)^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{-x(x+2)}{(2x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } x(x+2) = 0 \text{ から } x = 0, -2$$

(3) (1)より,  $f(x)$  の最大値は  $x > -1$  に存在するので,  $x > -1$  における  $f(x)$  の値の増減を調べる。

$x$	$-1$	……	$0$	……	$\infty$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	
$f(x)$	$0$	$\nearrow$		$\searrow$	

最大値は  $f(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$  となり,  $t = \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$  とおくと,

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

### [解 説]

逆三角関数は高校数学の範囲外なので, 直接的な積分計算を回避して, 設問に答えていきます。この考え方が採用できたかどうかで, 本問の出来は決まります。



2

[1998 東北大]

(1)  $y = f(x)$  を同値変形すると,  $x = g(y)$  となることより,

$$y = \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \text{ から, } (e^x + 1)(1 - y) = 1$$

$$e^x = -1 + \frac{1}{1 - y} = \frac{y}{1 - y}, \quad x = \log \frac{y}{1 - y}$$

$$\text{よって, } g(y) = \log \frac{y}{1 - y} \text{ となり, } g(x) = \log \frac{x}{1 - x}$$

(2)  $x = f(t)$  とおくと  $dx = f'(t)dt$ , また  $x = f(a)$  のとき  $t = a$ ,  $x = f(b)$  のとき  $t = b$  となる。

さらに,  $y = f(x)$  の逆関数が  $y = g(x)$  から,  $g(f(x)) = x$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = \int_a^b g(f(t)) f'(t) dt = \int_a^b t f'(t) dt = \int_a^b x f'(x) dx$$

$$\text{よって, } \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx$$

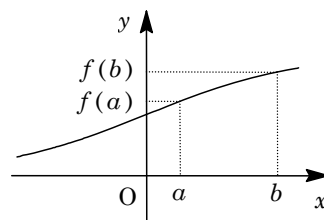
$$= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x f'(x) dx$$

$$= \int_a^b \{ f(x) + x f'(x) \} dx$$

$$= \int_a^b (x f(x))' dx$$

$$= [x f(x)]_a^b$$

$$= b f(b) - a f(a)$$



### [解説]

(2)の証明は, まず右上の図で考えました。この位置関係では面積を考えると与式の成立は明らかなのですが, これでは証明とは言えません。積分の第2項の積分区間を  $[a, b]$  に変更することから, 置換の式をみつけました。

3

[1999 東京工大]

$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$  とおくと、部分積分により、

$$I_n = [t^n e^t]_0^1 - n \int_0^1 t^{n-1} e^t dt = e - nI_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{また, } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}^{2n-1}P_{2n-2k}}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2k+1)(2k-1)!} = (2n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{(2k+1)!} \\ &= (2n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

証明すべき式  $\int_0^1 t^{2n-1} e^t dt + \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}^{2n-1}P_{2n-2k}}{2k+1} \right) e = (2n-1)! \cdots \cdots (*)$  は、②より、

$$(*) \Leftrightarrow \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} + e \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right) = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さらに、 $\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} = J_n$  とおくと、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow J_n = 1 + e \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!} \right) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、①から、

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e - (2n+1)I_{2n}}{(2n+1)!} = \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{I_{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{e - 2nI_{2n-1}}{(2n)!} = \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{e}{(2n)!} + \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= J_n + e \left( \frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n)!} \right) \end{aligned}$$

$$n \geq 2 \text{ で, } J_n = J_1 + e \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!} \right)$$

$$\text{ここで, } J_1 = I_1 = \int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e-1) = 1$$

よって、 $n \geq 2$  で④は成立するので、(\*)は成立する。

### [解 説]

最初は③式を数学的帰納法で証明しました。しかし②式を眺めていると、直接的な証明が可能ではないかと思えてきました。それで考え直して書いたのが上の解です。

4

[1999 京都大]

$$(1) \frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} - \frac{a_1^2}{a_0^2+1} - \frac{b_1^2}{b_0^2+1} = \frac{b_1^2 - a_1^2}{a_0^2+1} - \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_0^2+1}$$

$$= \frac{(b_1^2 - a_1^2)(b_0^2 - a_0^2)}{(a_0^2+1)(b_0^2+1)}$$

$$0 < a_0 < b_0, \quad 0 < a_1 < b_1 \text{ より, } \frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} > \frac{a_1^2}{a_0^2+1} + \frac{b_1^2}{b_0^2+1}$$

(2) まず,  $1 \leq i < j \leq n$  とし,  $x_i = y_j, x_j = y_i, x_k = y_k (k \neq i, k \neq j)$  とすると, 条件より,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$

さらに  $x_i > x_j$  のとき, (1)より

$$\frac{x_i^2}{i^2+1} + \frac{x_j^2}{j^2+1} > \frac{x_j^2}{i^2+1} + \frac{x_i^2}{j^2+1} = \frac{y_i^2}{i^2+1} + \frac{y_j^2}{j^2+1}$$

すると,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{k^2+1}$  となり, 同様にして  $1 \leq p < q \leq n$  で  $x_p > x_q$  の

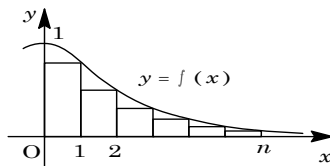
ときは,  $x_p$  の値と  $x_q$  の値を交換していくと,  $S_n$  の値は減少していく。よって,  $S_n$  の値が最小となるのは  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ , すなわち  $x_k = k$  のときである。

$$\text{以上より, } S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{k^2+1} \right) = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

さて,  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  とすると,  $x > 0$  で

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ となり, } f(x) \text{ は}$$

単調に減少する。



右図において, 面積を比較して,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^n f(x) dx = \int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$x = \tan \theta \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$  とおき,  $n = \tan \alpha \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$  とすると,

$$\int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^\alpha \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^\alpha d\theta = \alpha < \frac{\pi}{2} < \frac{3.2}{2} = \frac{8}{5} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より, } S_n > n - \frac{8}{5}, \text{ すなわち } \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

### [解説]

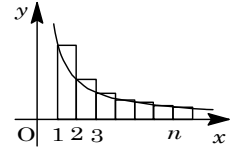
(2)の前半は, わかっているのにそれを表現するのが難しく, もどかしく感じてしまいます。87年に東大・理で同じ考え方をしている問題が出ています。

5

[2000 金沢大]

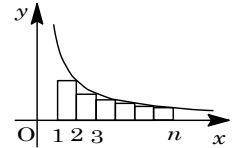
(1)  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) とすると,  $f(x)$  は減少関数より,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$



(2) (1)と同様にして,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n f(x) dx = \log n$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$



①②より,  $\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} < \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \frac{1}{\log n} + 1 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

さて  $n \rightarrow \infty$  のとき,  $\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1 = \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} \rightarrow 0$  から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$$

また,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\log n} + 1\right) = 1$  となるので, ③より  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$

(3) まず,  $\int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \dots\dots\dots \textcircled{4}$

$k \leq x \leq k+1$  において,  $\frac{|\sin \pi x|}{k+1} \leq \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| \leq \frac{|\sin \pi x|}{k}$  より,

$$\frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx \leq \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

ここで,  $y = x - k$  とおくと,

$$\int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx = \int_0^1 |\sin \pi(y+k)| dy = \int_0^1 |\sin \pi y| dy = \int_0^1 \sin \pi y dy \\ = -\frac{1}{\pi} [\cos \pi y]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

そこで⑤において,  $k=1$  から  $k=n$  まで各辺の和をとると,

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

④より,  $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

(2)より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{\pi}$$

したがって⑥より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \int_0^1 \sin \pi y dy = \frac{2}{\pi}$

### [解 説]

金沢大・理系の入試問題には、よく練られた難問が 1 題出題されますが、今年は本問がそれに当たります。(3)で(2)の極限值をどのように使うかということを考えていると、謎解きの楽しみが味わえます。

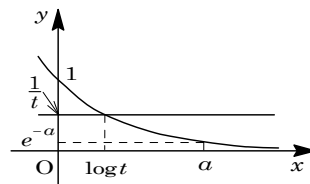
6

[2001 東京工大]

(1) (i)  $\frac{1}{t} \geq 1$  ( $0 < t \leq 1$ ) のとき

$$S(a, t) = \int_0^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx = \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_0^a$$

$$= e^{-a} - 1 + \frac{a}{t}$$

(ii)  $e^{-a} \leq \frac{1}{t} < 1$  ( $1 < t \leq e^a$ ) のとき $e^{-x} = \frac{1}{t}$  の解は,  $x = \log t$  より,

$$S(a, t) = \int_0^{\log t} \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx + \int_{\log t}^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x\right]_0^{\log t} + \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_{\log t}^a = -\frac{2}{t} \log t + \frac{a-2}{t} + e^{-a} + 1$$

(iii)  $\frac{1}{t} < e^{-a}$  ( $t > e^a$ ) のとき

$$S(a, t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx = -e^{-a} + 1 - \frac{a}{t}$$

すると,  $0 < t \leq 1$  のとき  $\frac{dS(a, t)}{dt} = -\frac{a}{t^2} < 0$  となり,  $S(a, t)$  は単調に減少し, $t > e^a$  のとき  $\frac{dS(a, t)}{dt} = \frac{a}{t^2} > 0$  となり,  $S(a, t)$  は単調に増加する。また,  $1 < t \leq e^a$  のとき  $\frac{dS(a, t)}{dt} = \frac{2}{t^2} \log t - \frac{2}{t^2} - \frac{a-2}{t^2} = \frac{2 \log t - a}{t^2}$  となる。このとき  $\frac{dS(a, t)}{dt} = 0$  の解は,  $t = e^{\frac{a}{2}}$  であり, $S(a, t)$  の増減は右表のようになる。さらに,  $S(a, t)$  は  $t=1$ ,  $t=e^a$  において連続なので,  $t = e^{\frac{a}{2}}$  で最小値をとり,

$$m(a) = S\left(a, e^{\frac{a}{2}}\right) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1$$

$t$	1	...	$e^{\frac{a}{2}}$	...	$e^a$
$\frac{dS(a, t)}{dt}$		-	0	+	
$S(a, t)$		↘		↗	

(2) (1)より,  $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1}{a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2$ ここで,  $-\frac{a}{2} = b$  とおくと,  $a \rightarrow 0$  のとき  $b \rightarrow 0$  となり,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{e^b - 1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

## [解 説]

積分計算についての理解を問う問題です。(2)の極限は  $e$  の定義を適用するものです。

7

[2001 岡山大]

(1)  $f(t) = e^t$  のとき,  $g(x) = \int_0^1 |e^t - x| dt$  となる。

(i)  $x < 1$  のとき  $g(x) = \int_0^1 (e^t - x) dt = [e^t - xt]_0^1 = -x + e - 1$

このとき, 関数  $g(x)$  は単調減少となる。

(ii)  $1 \leq x \leq e$  のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\log x} -(e^t - x) dt + \int_{\log x}^1 (e^t - x) dt = -[e^t - xt]_0^{\log x} + [e^t - xt]_{\log x}^1 \\ &= -(x-1) + x \log x + (e-x) - x(1 - \log x) = 2x \log x - 3x + e + 1 \end{aligned}$$

$$g'(x) = 2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 3 = 2 \log x - 1 \text{ とな}$$

り, 関数  $g(x)$  の増減は右表のようになる。

極小値は,  $g(\sqrt{e}) = e - 2\sqrt{e} + 1 = (\sqrt{e} - 1)^2$

である。

$x$	1	...	$\sqrt{e}$	...	$e$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$e-2$	$\searrow$		$\nearrow$	1

(iii)  $x > e$  のとき

$$g(x) = \int_0^1 -(e^t - x) dt = x - e + 1$$

このとき, 関数  $g(x)$  は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より,  $y = g(x)$  のグラフの概形は右図。

(2) 条件より  $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ , また  $b = f(0)$ ,  $c = f(1)$

とおく。すると,  $f(t)$  は単調増加関数なので,

$b < a < c$  となる。

さらに,  $F'(t) = f(t)$  とおくと,

(i)  $x < b$  のとき  $g(x) = \int_0^1 \{f(t) - x\} dt = [F(t) - xt]_0^1 = F(1) - F(0) - x$

このとき, 関数  $g(x)$  は単調減少となる。

(ii)  $b \leq x \leq c$  のとき

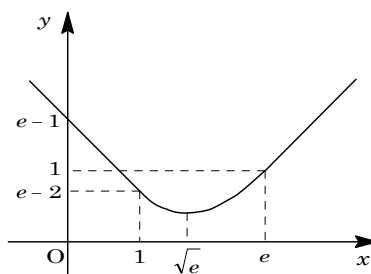
$f(u) = x$ , すなわち  $u = f^{-1}(x)$  とおくと,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^u -\{f(t) - x\} dt + \int_u^1 \{f(t) - x\} dt = -[F(t) - xt]_0^u + [F(t) - xt]_u^1 \\ &= -2F(u) + 2xu - x + F(0) + F(1) \end{aligned}$$

$$g'(x) = -2F'(u) \frac{du}{dx} + 2u + 2x \frac{du}{dx} - 1 = -2f(u) \frac{du}{dx} + 2x \frac{du}{dx} + 2u - 1$$

$$= -2f(f^{-1}(x)) \frac{du}{dx} + 2x \frac{du}{dx} + 2u - 1 = -2x \frac{du}{dx} + 2x \frac{du}{dx} + 2u - 1$$

$$= 2u - 1 = 2f^{-1}(x) - 1$$



条件より  $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$  なので、 $f^{-1}(a) = \frac{1}{2}$  である。

さて、 $f(t)$  が単調増加関数なので、 $f^{-1}(x)$  も単調増加関数となり、 $g'(x) = 0$  すなわち  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}$  の解は  $x = a$  となる。

さらに  $g'(x)$  の符号は、 $x = a$  の前後で負から正に変わる。

$x$	$b$	$\cdots$	$a$	$\cdots$	$c$
$g'(x)$		$-$	$0$	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すると、関数  $g(x)$  の増減は右表のようになる。

$$(iii) \quad x > c \text{ のとき } g(x) = \int_0^1 -\{f(t) - x\} dt = -F(1) + F(0) + x$$

このとき、関数  $g(x)$  は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より、 $g(x)$  はすべての  $x$  に対して連続なので、 $x = a$  で最小値をとる。

### 【解説】

(2)は(1)を一般化したもので、同じように論理を展開することができます。しかし、逆関数の扱い方など、かなり難易度はアップします。



8

[2001 京都大]

$nx = t$  とおくと,  $\frac{dt}{dx} = n$  より,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx = \int_0^{n^2\pi} e^{-\frac{t}{n}} |\sin t| \frac{1}{n} dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} |\sin t| dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} \sin t dt \right| \end{aligned}$$

ここで,  $(e^{-\frac{t}{n}} \sin t)' = -\frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \sin t + e^{-\frac{t}{n}} \cos t \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$(e^{-\frac{t}{n}} \cos t)' = -\frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \cos t - e^{-\frac{t}{n}} \sin t \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times n$  より,  $(e^{-\frac{t}{n}} \sin t + ne^{-\frac{t}{n}} \cos t)' = -\frac{n^2+1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \sin t$

$$e^{-\frac{t}{n}} \sin t = -\frac{n}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{t}{n}} (\sin t + n \cos t) \right\}'$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} \sin t dt &= -\frac{n}{n^2+1} \left[ e^{-\frac{t}{n}} (\sin t + n \cos t) \right]_{(k-1)\pi}^{k\pi} \\ &= -\frac{n}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{k\pi}{n}} n \cos k\pi - e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} n \cos(k-1)\pi \right\} \\ &= -\frac{n^2}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{k\pi}{n}} (-1)^k - e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} (-1)^{k-1} \right\} = -\frac{n^2}{n^2+1} (-1)^k (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) e^{-\frac{k\pi}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } I_n &= \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k\pi}{n}} = \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{n}} (1 - e^{-\frac{\pi \cdot n^2}{n}})}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \cdot \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) (1 - e^{-n\pi}) \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}} - 1} \end{aligned}$$

以上より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{\pi} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

### [解説]

積分と数列の和に関する超頻出問題です。正確な計算力がすべてです。

9

[2001 北海道大]

$$(1) \int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[ -\log|1-x| + \log|1+x| \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_0^a = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} \quad (-1 < a < 1 \text{ より})$$

$$(2) \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \int_0^a \frac{1-1+x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx - \int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} dx$$

$$\text{ここで, (1)より, } \int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a}$$

$$\text{また, } \int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} dx = \int_0^a (1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) dx$$

$$= \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^a$$

$$= a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \dots + \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{よって, } \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

$$(3) \text{ (i) } 0 \leq a < 1 \text{ のとき } 0 \leq x \leq a \text{ において, } 0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$$

$$0 \leq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \leq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-a^2} dx = \frac{1}{1-a^2} \left[ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^a = \frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$$

$$\text{よって, } n \rightarrow \infty \text{ のとき, } \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \rightarrow 0$$

$$\text{(ii) } -1 < a < 0 \text{ のとき } a \leq x \leq 0 \text{ において, } 0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$$

$$0 \leq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \leq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-a^2} dx = \frac{1}{1-a^2} \left[ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_a^0 = -\frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$$

$$\text{よって, } n \rightarrow \infty \text{ のとき, } \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = -\int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \rightarrow 0$$

$$\text{(i)(ii)より, } -1 < a < 1 \text{ のとき, } n \rightarrow \infty \text{ とすると, } \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \rightarrow 0$$

$$\text{すると, (2)より, } \log \frac{1+a}{1-a} - 2 \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = 2 \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k+1}}{2k+1} \text{ なので,}$$

$$\log \frac{1+a}{1-a} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

### [解説]

無限級数の値を積分を用いて求めるという頻出題です。パズルのような誘導がついているおもしろい問題です。

10

[2001 大阪大]

$$(1) \quad g_n(k-1) \geq g_n(k) \text{ より, } g_n(k) - g_n(k-1) \leq 0 \text{ なので, } f\left(\frac{k\pi}{3n}\right) \leq 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{さて, } f(x) = 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 = (2 \cos x - 3)(2 \cos x - 1)$$

$$f(x) \leq 0 \text{ とすると, } \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ なので, } \textcircled{1} \text{ より } \cos \frac{k\pi}{3n} \geq \frac{1}{2} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$2 \leq k \leq 3n \text{ から, } \frac{2\pi}{3n} \leq \frac{k\pi}{3n} \leq \pi \text{ となり, } \textcircled{2} \text{ を満たすのは, } \frac{2\pi}{3n} \leq \frac{k\pi}{3n} \leq \frac{1}{3}\pi$$

よって,  $2 \leq k \leq n$  となり, 求める  $k$  は,  $k = 2, 3, \dots, n-1, n$

すると,  $g_n(k-1) > g_n(k)$  となるのは  $2 \leq k \leq n-1$ , また  $g_n(k-1) = g_n(k)$  となるのは  $k = n$ , さらに  $g_n(k-1) < g_n(k)$  となるのは  $n+1 \leq k \leq 3n$  なので,

$$g_n(1) > g_n(2) > \dots > g_n(n-1) = g_n(n) < g_n(n+1) < \dots < g_n(3n)$$

よって,  $g_n(k)$  が最小となる  $k$  は,  $n-1$  または  $n$  である。

$$(2) \quad (1) \text{ より, } G_n = g_n(n) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \dots\dots\dots + f\left(\frac{n\pi}{3n}\right) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{\pi}{3n}k\right) = \frac{3}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{\pi}{3n}k\right) = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \\ &= \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3) dx = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos 2x - 8 \cos x + 5) dx \\ &= \frac{3}{\pi} [\sin 2x - 8 \sin x + 5x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} + \frac{5}{3}\pi \right) = -\frac{21\sqrt{3}}{2\pi} + 5 \end{aligned}$$

## [解 説]

(1)は階差数列を用いた最大・最小問題, (2)は区分求積法による極限計算となっています。一見, 畑違いの分野が1つの問題にうまく収まっています。

11

[2002 千葉大]

$$(1) \quad n=2 \text{ のとき, } I(x) = \int_0^x \sin t \sin 2t \, dt = \int_0^x -\frac{1}{2}(\cos 3t - \cos t) \, dt$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} \sin 3t - \sin t \right]_0^x = -\frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x$$

$$I'(x) = -\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x = -\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x) = \sin 2x \sin x$$

$I(x)$  は周期  $2\pi$  の周期関数なので,  $0 \leq x \leq 2\pi$  で考えても一般性は失われない。

したがって, 右表より, 最大値は  $I\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$  となる。

$x$	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$2\pi$
$I'(x)$	0	+	0	-	0	-	0	+	0
$I(x)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0

$$(2) \quad I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt \, dt = \int_0^x -\frac{1}{2} \{ \cos(n+1)t - \cos(n-1)t \} \, dt$$

$$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n+1} \sin(n+1)t - \frac{1}{n-1} \sin(n-1)t \right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{2(n+1)} \sin(n+1)x + \frac{1}{2(n-1)} \sin(n-1)x$$

$-1 \leq \sin(n+1)x \leq 1, -1 \leq \sin(n-1)x \leq 1$  より,

$$I(x) \leq \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n-1)} = \frac{n-1+n+1}{2(n+1)(n-1)} = \frac{n}{n^2-1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

これより,  $I(x)$  の最大値が  $\frac{n}{n^2-1}$  であるのは, ①の等号が成立するときなので,

$$\sin(n+1)x = -1 \dots\dots \textcircled{2}, \quad \sin(n-1)x = 1 \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } m \text{ を } 0 \text{ 以上の整数として, } (n+1)x = 2m\pi + \frac{3}{2}\pi \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{ より, } l \text{ を } 0 \text{ 以上の整数として, } (n-1)x = 2l\pi + \frac{1}{2}\pi \dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} \text{ より, } 2nx = 2m\pi + 2l\pi + 2\pi, \quad nx = (m+l+1)\pi \dots\dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{5} \text{ より, } 2x = 2m\pi - 2l\pi + \pi, \quad x = \left(m-l + \frac{1}{2}\right)\pi \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{6} \textcircled{7} \text{ より, } n\left(m-l + \frac{1}{2}\right)\pi = (m+l+1)\pi, \quad \frac{1}{2}n = (m+l+1) - n(m-l)$$

以上より,  $l, m, n$  は整数なので,  $n$  は偶数となる。

### [解 説]

(2)でも, (1)と同じように微分して増減表と考えました。ところが, それを実行するのは複雑そうに思えたので, 見方を変えたところ, あっさり結論が導けました。おもしろい問題です。

12

[2002 九州大]

- (1)
- $x > 0, y > 0$
- に対して,
- $t = \frac{x}{y} > 0$
- とおくと,

$$x \log x - x \log y - x + y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \log \frac{x}{y} - \frac{x}{y} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \log t - t + 1 \geq 0$$

ここで,  $h(t) = t \log t - t + 1$  とおくと,

$$h'(t) = \log t + t \cdot \frac{1}{t} - 1 = \log t$$

右表より,  $t > 0$  のとき,  $h(t) \geq 0$  となる。

$t$	0	...	1	...
$h'(t)$		-	0	+
$h(t)$		↘	0	↗

よって,  $x \log x - x \log y - x + y \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 

- (2) 区間
- $[a, b]$
- において,
- $f(x) > 0, g(x) > 0$
- なので,
- $\textcircled{1}$
- より,

$$f(x) \log f(x) - f(x) \log g(x) - f(x) + g(x) \geq 0$$

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx - \int_a^b f(x) \log g(x) dx - \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \geq 0$$

条件より,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx \cdots \cdots \textcircled{2}$  なので,

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx \cdots \cdots \textcircled{3}$$

- (3)
- $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
- より,
- $\int_a^b f(x) dx = (b-a)M = \int_a^b M dx \cdots \cdots \textcircled{4}$

これより,  $g(x) = M$  とおくと,  $\textcircled{2}$  をみたすので,  $\textcircled{3}$  より,

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log M dx = \log M \int_a^b f(x) dx$$

 $\textcircled{4}$  の関係から,  $\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq (b-a)M \log M$  となり,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq M \log M$$

## [解説]

(1)から(2)へはスムーズに流れ, (2)から(3)へはちょっと引っかかるという, うまい誘導がついています。

13

[2003 千葉大]

$f(x) = ax^n \log x - ax = a(x^n \log x - x)$  に対して,

$$f'(x) = a(nx^{n-1} \log x + x^{n-1} - 1) = a\{x^{n-1}(n \log x + 1) - 1\}$$

ここで,  $g(x) = x^{n-1}(n \log x + 1) - 1$  とおくと,  $f'(x) = ag(x)$  となり,

$$g'(x) = (n-1)x^{n-2}(n \log x + 1) + nx^{n-2} = x^{n-2}\{n(n-1) \log x + 2n - 1\}$$

$x > 0$  において,  $g'(x) = 0$  の解は,  $n \geq 2$  より,

$$\log x = -\frac{2n-1}{n(n-1)}, \quad x = e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$$

この値を  $x = \alpha$  とおくと,  $g(x)$  の増減は右表のようになり,  $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -1$ ,  $g(1) = 0$  に注意すると,  $0 < x < 1$  のとき  $g(x) < 0$ ,  $x > 1$  のとき  $g(x) > 0$  である。

$x$	0	...	$\alpha$	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		↘		↗

(i)  $a > 0$  のとき

$f(x)$  の増減は, 右表のようになり, 最小値は  $f(1) = -a$  となる。

条件から,  $-a = -1$ ,  $a = 1$  となり,  $a > 0$  も満たす。

$x$	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-a$	↗

(ii)  $a = 0$  のとき

$f(x) = 0$  より, 最小値が  $-1$  にはならない。

(iii)  $a < 0$  のとき

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  より, 最小値は存在しない。

(i)(ii)(iii)より,  $f(x) = x^n \log x - x$  である。

このとき,  $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x^n \log x - x) dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n+1} [x^{n+1} \log x]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e x^n dx - \frac{1}{2} [x^2]_1^e \\ &= \frac{1}{n+1} e^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} [x^{n+1}]_1^e - \frac{1}{2} (e^2 - 1) \\ &= \frac{n}{(n+1)^2} e^{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### [解説]

$g(1) = 0$  は式の形から見つけます。ただ,  $g(x)$  の増減について, チェックが少々面倒です。なお,  $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \log x = 0$  は証明なしで用いています。

14

[2004 東北大]

等差数列  $x_0, x_1, \dots, x_n$  の公差は  $\frac{1}{n}$ , 等比数列  $y_0, y_1, \dots, y_n$  の公比は  $2^{\frac{1}{n}}$  より,

$$x_k = 1 + \frac{k}{n}, \quad y_k = 2^{\frac{k}{n}}$$

すると,  $P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)$  より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \int_0^1 (1+x) dx = \left[ x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}}$  より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \int_0^1 2^x dx = \left[ \frac{2^x}{\log 2} \right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}$$

また,  $Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$  より,

$$\log Q(n) = \frac{1}{n} \log(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log Q(n) &= \int_0^1 \log(1+x) dx = \left[ (1+x) \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx \\ &= 2 \log 2 - 1 = \log \frac{4}{e} \end{aligned}$$

ここで,  $f(x) = \log x$  は  $x > 0$  において連続であることより,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \frac{4}{e}$

同様に,  $S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$  より,

$$\log S(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log 2^{\frac{k}{n}} = \frac{\log 2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{\log 2}{2n} (n+1)$$

よって,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log S(n) = \frac{\log 2}{2} = \log \sqrt{2}$  より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \sqrt{2}$

### [解 説]

単純な構図の問題ですが, 4つの極限とも, きれいな数値として求まります。いろいろな解法がありますが, 最初に考えたものを記しました。

15

[2004 九州大]

$$(1) I_0 = \frac{(-1)^0}{0!} \int_0^2 x^0 e^x dx = \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{また, } I_n &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ [x^n e^x]_0^2 - \int_0^2 n x^{n-1} e^x dx \right\} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} 2^n e^2 - \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^2 x^{n-1} e^x dx = \frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!} + I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{すると, } I_1 = \frac{-2e^2}{1!} + (e^2 - 1) = -e^2 - 1, \quad I_2 = \frac{4e^2}{2!} + (-e^2 - 1) = e^2 - 1 \text{ より,}$$

$$I_3 = \frac{-8e^2}{3!} + (e^2 - 1) = -\frac{1}{3}e^2 - 1$$

$$(2) 0 \leq x \leq 2 \text{ に対して } e^x \leq e^2 \text{ より,}$$

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^2 dx = \frac{e^2}{n!} \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^2 = \frac{2^{n+1} e^2}{(n+1)!}$$

ここで,  $n \geq 2$  のとき,

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^{n-1}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+1)} \leq 2 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} \cdots \cdots (*)$$

なお,  $n=1$  のときも  $\frac{2^2}{2!} = 2 \left( \frac{2}{3} \right)^0$  となり, (\*) は成立している。

$$\text{よって, } \frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$$(3) (1) \text{ から, } I_n - I_{n-1} = \frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!} \text{ より, } \frac{(-1)^n 2^n}{n!} = \frac{1}{e^2} (I_n - I_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2} \sum_{k=1}^n (I_k - I_{k-1}) = \frac{1}{e^2} (I_n - I_0) = \frac{1}{e^2} (I_n - e^2 + 1)$$

$$\text{よって, } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = 1 + \frac{1}{e^2} (I_n - e^2 + 1) = \frac{1}{e^2} (I_n + 1)$$

$$\text{さて, (2) より, } |I_n| = \frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$n \rightarrow \infty$  のとき,  $|I_n| \rightarrow 0$  より  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$  となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}$$

### [解説]

(3)が本題ですが, それを解くのに無理が生じないように, (1)と(2)が設けられています。配慮の深い問題です。



16

[2004 東京工大]

(1) まず、積分区間  $0 \leq x \leq m\pi$  を  $m$  等分して、

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $t = x - (k-1)\pi$  とおくと、

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f(\sin(t+(k-1)\pi))g(\cos(t+(k-1)\pi))dt$$

さて、 $\sin(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1} \sin t$ 、 $\cos(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1} \cos t$  と表すことができ、さらに  $f(x)$ 、 $g(x)$  は偶関数より、

$$f(\sin(t+(k-1)\pi)) = f((-1)^{k-1} \sin t) = f(\sin t)$$

$$g(\cos(t+(k-1)\pi)) = g((-1)^{k-1} \cos t) = g(\cos t)$$

$$\text{よって、} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)dt \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\text{より、} \int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = m \int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$$

(2)  $I_n = \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx$  とし、 $nx = t$  とおくと、

$$I_n = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} \cdot \frac{dt}{n} = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx$$

ここで、 $m\pi \leq n < (m+1)\pi$  において、 $\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} \geq 0$  なので、

$$I_n \geq \frac{1}{n} \int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \geq \frac{1}{(m+1)\pi} \int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$I_n \leq \frac{1}{n} \int_0^{(m+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \leq \frac{1}{m\pi} \int_0^{(m+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さて、 $f(x) = |x|$ 、 $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$  とおくと、 $f(x)$ 、 $g(x)$  は連続な偶関数なので、(1)の結論から、

$$\int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx = m \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx = m \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\text{同様に、} \int_0^{(m+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx = (m+1) \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3} \sim \textcircled{6}\text{より、} \frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \leq I_n \leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx$$

(3) まず、 $\cos x = u$  とおくと、

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx = \int_1^{-1} \frac{1}{(1+u^2)^2} (-du) = 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2} du$$

さらに、 $u = \tan \theta$  ( $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) とおくと、

$$\begin{aligned}
2 \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2} du &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta) d\theta = \left[ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

そこで、(2)の結論から、

$$\frac{m}{(m+1)\pi} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \leq I_n \leq \frac{m+1}{m\pi} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $m \rightarrow \infty$  となるので、はさみうちの原理を用いると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

### [解説]

(3)の極限值が到達点となりますが、このために与えられた誘導の意味を考えながら、(1)と(2)の証明を進めます。決して易しくはありませんが、演習する価値の大きな一題です。