2020 入試対策

2次数学アーカイブ

極　限

理系

1998－2019

外林康治 編著

電送数学舎

極　　限

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 n を正の整数とする。連立不等式

$$x+y+z \leqq n,\ -x+y-z \leqq n,\ x-y-z \leqq n,\ -x-y+z \leqq n$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$ を求めよ。 [1998 東京大]

2 A 地点から B 地点まで 0 または 1 の一文字からなる信号を送る。A 地点と B 地点の間に中継点を $2n-1$ 箇所作り AB 間を $2n$ 個の小区間に分割すると, 一つの区間において 0 と 1 が逆転して伝わる確率は $\dfrac{1}{4n}$ である。このとき A 地点を発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わる確率を P_{2n} とする。次の各問いに答えよ。

(1) 偶数回の逆転があると, A 地点で発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わることに注意して P_2 を求めよ。

(2) $(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}$ を示せ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{2n}$ を求めよ。 [1998 神戸大]

3 関数 $f(x)=1-x^2$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2) a を(1)で求めた実数とする。$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば, $|f(x)-f(a)| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$ となることを示せ。

(3) a を(1)で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として,

$$x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば, $x_1=a$ であることを示せ。 [1999 九州大]

4　複素数 z_n （$n=1,\ 2,\ \cdots$）を

$$z_1=1,\ \ z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$$

によって定める。ただし，i は虚数単位である。

(1)　すべての自然数 n について，$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$ が成り立つことを示せ。

(2)　実数 $r>0$ に対して，$|z_n|\leqq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}$ を求めよ。　［1999 東京大］

5　数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。この数列が $a_1=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$，$n(n-2)a_{n+1}=S_n$ $(n\geqq1)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

［2002 京都大］

6　関数 $f(x)=4x-x^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=c,\ \ a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与える。ただし，c は $0<c<2$ を満たす定数である。

(1)　$a_n<2$，$a_n<a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(2)　$2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　［2003 東北大］

7　座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。$p,\ n$ を自然数とし，領域 $D_n=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x,\ x^p\leqq y\leqq n\}$ を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1)　グラフ $y=x^p$ $\left(0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}}\right)$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2)　不等式 $M_n<S_n<M_n+n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n$ を求めよ。　［2003 九州大］

8 曲線 $C: y=e^x$ 上の異なる 2 点 $A(a,\ e^a)$，$P(t,\ e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す。さらに，$r(a)=\lim\limits_{t\to a} L_a(t)$ と定義する。

(1) $r(a)$ を求めよ。

(2) a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ。 ［2005 筑波大］

9 $a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。 ［2006 東京大］

10 x, y を相異なる正の実数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=0,\ a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点 $(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。 ［2007 京都大］

11 n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1=90^\circ$，$OA_1=1$，$A_1A_2=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。A_2 から OA_1 へ垂線を下ろし，交点を A_3 とする。A_3 から OA_2 へ垂線を下ろし，交点を A_4 とする。以下同様に，$k=4,\ 5,\ \cdots$ について，A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし，交点を A_{k+1} として，順番に A_5，A_6，$\cdots$ を定める。$\overrightarrow{h_k}=\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $k=1,\ 2,\ \cdots$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

(2) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。 ［2008 東北大］

12　実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a，b を正の実数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。　[2008 東京工大]

13　正の実数 r と $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ とおく。a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を漸化式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2)　$\dfrac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3)　$\theta\neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。　[2010 北海道大]

14　a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(*)\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような a を小さい順に並べたものを a_1，a_2，a_3，$\cdots$とする。ここに[　]はガウス記号で，実数 u に対し，$[u]$は u 以下の最大の整数を表す。

(1)　$a=7,\ 8,\ 9$ の各々について(∗)の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2)　a_1，a_2 を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。　[2010 東京工大]

15　a が正の実数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。　[2012 京都大]

16　数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$a_n>1$ となることを示せ。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数αを求めよ。

(3)　すべての自然数nに対して$a_n<\alpha$となることを示せ。

(4)　$0<r<1$ を満たすある実数rに対して，不等式

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n} \leqq r\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。さらに，極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。　[2012 東北大]

17　正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において$\sin 4nx \geqq \sin x$を満たす x の区間の長さの総和をS_nとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。　[2013 東京工大]

18　数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を，$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　すべてのnに対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ。　[2015 東京工大]

19 xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。記号 $[\ \ ]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

(1) n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする。点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2) 直線 $y=x$ と，x 軸，および直線 $x=N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)\ (0 \leqq x \leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x=N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2)の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。　［2017 筑波大］

20 k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3) (2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

［2018 神戸大］

21 a を実数とし，数列 $\{x_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$x_1=a,\ x_{n+1}=x_n+{x_n}^2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $a>0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ が発散することを示せ。

(2) $-1<a<0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1<x_n<0$ が成り立つことを示せ。

(3) $-1<a<0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の極限を調べよ。　［2019 東北大］

$\boxed{22}$ 数列$\{a_n\}$を$a_n=\dfrac{1}{2^n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t>0$のとき，$1 \leqq \dfrac{e^t-1}{t} \leqq e^t$であることを示せ。

(2) 数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$を

$$x_n=\log(e^{a_n}+1),\ \ y_n=\log(e^{a_n}-1),\ \ z_n=y_n+\sum_{k=1}^{n}x_k \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_nはnによらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right)$を求めよ。 [2019 筑波大]

極　　限

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 東京大]

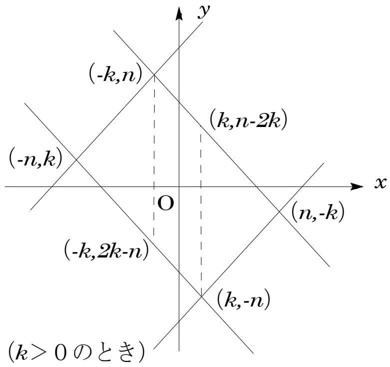
$z=k$ での切り口を考える。

$x+y+k\leqq n$ より，$y\leqq -x+n-k$

$-x+y-k\leqq n$ より，$y\leqq x+n+k$

$x-y-k\leqq n$ より，$y\geqq x-(n+k)$

$-x-y+k\leqq n$ より，$y\geqq -x-(n-k)$



切り口の存在する条件は，

$n-k\geqq -(n-k)$ かつ $n+k\geqq -(n+k)$

より，$-n\leqq k\leqq n$

境界線の交点は，

$y=-x+n-k$ かつ $y=x+n+k$ より，$(x,\ y)=(-k,\ n)$

$y=-x+n-k$ かつ $y=x-(n+k)$ より，$(x,\ y)=(n,\ -k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x+n+k$ より，$(x,\ y)=(-n,\ k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x-(n+k)$ より，$(x,\ y)=(k,\ -n)$

$z=k$ 上での格子点の個数を $f_k(n)$ とすると，

$$\begin{aligned}f_k(n)&=2\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-2k+1)\}+(2n-2k+1)(2k-1)\\&=2\cdot\frac{1+(2n-2k+1)}{2}\cdot(n-k+1)+(2n-2k+1)(2k-1)\\&=2(n-k+1)^2+\{2(n-k+1)-1\}(2k-1)\end{aligned}$$

以上より，

$$f(n)=\sum_{k=-n}^{n}f_k(n)=\sum_{k=-n}^{n}\left[2(n-k+1)^2+\{2(n-k+1)-1\}(2k-1)\right]$$

ここで，$n-k+1=l$ とおくと，

$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{2l^2+(2l-1)(2n+1-2l)\right\}=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{-2l^2+4(n+1)l-(2n+1)\right\}\\&=-\frac{2}{3}(2n+1)(n+1)(4n+3)+4(n+1)^2(2n+1)-(2n+1)^2\\&=\frac{1}{3}(2n+1)(4n^2+4n+3)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\frac{8}{3}$$

［解 説］

4 平面で囲まれた領域にある格子点の個数を求める頻出問題です。平面の方程式は知っていて当然というのが，出題者からのメッセージです。

２ [1998 神戸大]

(1) $n=1$ のとき, A 地点から B 地点まで信号の逆転が起こらない確率は $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2$,

逆転が 2 回起こる確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ より,

$$P_2=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$$

(2) $$(a+b)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}+\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}b^{2k-1}\cdots\cdots\cdots①$$

$$(a-b)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}(-b)^{2k}+\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}(-b)^{2k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}-\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}b^{2k-1}\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より

$$(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}\cdots\cdots\cdots③$$

(3) A 地点から B 地点まで信号の逆転が, 0, 2, 4, ……, $2n$ 回のとき, 0 が 0 として伝わるので, $p_n=\dfrac{1}{4n}$, $q_n=1-\dfrac{1}{4n}$ とおくと,

$$P_n={q_n}^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_2\,{p_n}^2{q_n}^{2n-2}+{}_{2n}\mathrm{C}_4\,{p_n}^4{q_n}^{2n-4}+\cdots\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-2}\,{p_n}^{2n-2}{q_n}^2+{p_n}^{2n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,{q_n}^{2n-2k}{p_n}^{2k}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(q_n+p_n)^{2n}+(q_n-p_n)^{2n}\right\}\quad(③より)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}P_{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\left(1+\frac{1}{-2n}\right)^{-2n}\right)^{-1}\right\}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

［解 説］

最近はやりの通信を題材とした問題です。非常にていねいな誘導がついています。特に(1)は親切すぎるのではないかと思えるほどです。

３ ［1999 九州大］

(1) $f(a)=a$ より，$1-a^2=a$，$a^2+a-1=0$

$a>0$ より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2) $|f(x)-f(a)|=|1-x^2-(1-a^2)|=|-(x+a)(x-a)|=|x+a||x-a|$

ここで条件より，$|x+a|\geqq\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

よって，$|f(x)-f(a)|\geqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$

(3) $x_{n+1}=f(x_n)$，$a=f(a)$ なので，$x_n\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき(2)より，

$$|x_{n+1}-a|=|f(x)-f(a)|\geqq\frac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$$

よって，$|x_n-a|\geqq|x_1-a|\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

(i) $x_1-a\neq0$ のとき

$n\to\infty$ のとき $|x_n-a|\to\infty$ となるので，すべての n に対しては $x_n\leqq1$ が成立しない。

(ii) $x_1-a=0$ のとき

$a=f(a)$ なので，すべての n に対して $x_n=a$ となる。

(1)より，$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq1$ なので，すべての n に対して $\dfrac{1}{2}\leqq x_n\leqq1$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x_1=a$ の場合のみ題意が成立する。

［解 説］

(2)の不等式は，(3)で定義された数列の発散条件に対応することがわかります。これを(3)の題意に結びつけることがポイントです。

4 ［1999 東京大］

(1) $r_n=|z_n|$とおくと，$r_1=|z_1|=1$

$$r_{n+1}=|z_{n+1}|=|(3+4i)z_n+1|\leqq|3+4i||z_n|+1=5r_n+1\cdots\cdots\cdots①$$

$$r_{n+1}=|z_{n+1}|=|(3+4i)z_n+1|\geqq\big||3+4i||z_n|-1\big|=|5r_n-1|\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$r_{n+1}+\dfrac{1}{4}\leqq5\left(r_n+\dfrac{1}{4}\right)$，$r_n+\dfrac{1}{4}\leqq\left(r_1+\dfrac{1}{4}\right)5^{n-1}=\dfrac{5^n}{4}$から，$r_n<\dfrac{5^n}{4}$

また，$r_1=1$なので，②より帰納的に$r_n\geqq1$

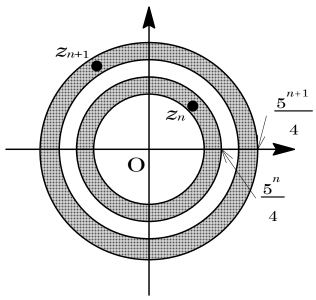
すると②は，$r_{n+1}\geqq5r_n-1$，$r_{n+1}-\dfrac{1}{4}\geqq5\left(r_n-\dfrac{1}{4}\right)$

$r_n-\dfrac{1}{4}\geqq\left(r_1-\dfrac{1}{4}\right)5^{n-1}=\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}$から，$r_n>\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}$

以上より，$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$

(2) (1)より，$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$，$\dfrac{3\times5^n}{4}<|z_{n+1}|<\dfrac{5^{n+1}}{4}$

ここで$\dfrac{5^n}{4}<\dfrac{3\times5^n}{4}$より，$z_n$，$z_{n+1}$の存在領域は



右図のようになる。

すると$\dfrac{5^n}{4}\leqq r\leqq\dfrac{5^{n+1}}{4}$のとき，$f(r)=n,\ n+1$

よって，$n\log5-\log4\leqq\log r\leqq(n+1)\log5-\log4$

のとき，$n\leqq f(r)\leqq n+1$

$$\frac{n}{(n+1)\log5-\log4}\leqq\frac{f(r)}{\log r}\leqq\frac{n+1}{n\log5-\log4}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log5-\frac{1}{n}\log4}\leqq\frac{f(r)}{\log r}\leqq\frac{1+\frac{1}{n}}{\log5-\frac{1}{n}\log4}$$

$r\to+\infty$のとき，$n\to\infty$となるので，

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log5-\frac{1}{n}\log4}\to\frac{1}{\log5},\quad\frac{1+\frac{1}{n}}{\log5-\frac{1}{n}\log4}\to\frac{1}{\log5}$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}=\frac{1}{\log5}$

［解 説］

(1)は最初与えられた漸化式を解いたのですが，複雑な式になったので止めました。次に数学的帰納法で証明と考えたのですが，第 2 段階がうまくいきません。しかしそのとき，証明に用いた三角不等式を漸化式に適用という方針を思いつきました。

$\boxed{5}$ ［2002 京都大］

条件より，$n(n-2)a_{n+1}=S_n\ (n\geqq 1)$………①

$(n-1)(n-3)a_n=S_{n-1}\ (n\geqq 2)$………②

①－②より，$n(n-2)a_{n+1}-(n-1)(n-3)a_n=a_n$，$n(n-2)a_{n+1}=(n-2)^2a_n$

$n\geqq 3$ で，$na_{n+1}=(n-2)a_n$

$n(n-1)a_{n+1}=(n-1)(n-2)a_n$

よって，$(n-1)(n-2)a_n=(3-1)(3-2)a_3=2a_3$

$$a_n=\frac{2a_3}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$$

ここで，①に $n=1$ を代入すると，$1\cdot(-1)a_2=S_1$，$-a_2=a_1$ より，$a_2=-a_1=-1$

さて，$n\geqq 3$ で，$S_n=a_1+a_2+\displaystyle\sum_{k=3}^{n}a_k=1-1+\sum_{k=3}^{n}\frac{2a_3}{(k-1)(k-2)}$

$$=2a_3\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)=2a_3\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$$

条件より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$ なので，$2a_3=1$，$a_3=\dfrac{1}{2}$

以上より，$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_n=\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$

［解 説］

①に $n=2$ を代入して a_3 の値を求めようとしましたが，$0\cdot a_3=0$ となり，何も得られませんでした。そこで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$ の利用となったわけです。

6 ［2003 東北大］

(1) $0<a_n<2$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき $a_1=c$ $(0<c<2)$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき $0<a_k<2$ が成立すると仮定する。

ここで，$f(a_k)=4a_k-{a_k}^2=-(a_k-2)^2+4$ で，$0<a_k<2$ より，$0<f(a_k)<4$ すなわち $0<\sqrt{f(a_k)}<2$ となる。よって，$0<a_{k+1}<2$ が成立する。

(i)(ii)より，$0<a_n<2$ が成立する。

また，$a_{n+1}-a_n=\sqrt{4a_n-{a_n}^2}-a_n=\dfrac{4a_n-{a_n}^2-{a_n}^2}{\sqrt{4a_n-{a_n}^2}+a_n}=\dfrac{2a_n(2-a_n)}{\sqrt{4a_n-{a_n}^2}+a_n}>0$

よって，$a_n<a_{n+1}$ が成立する。

(2) まず，$2-a_{n+1}=2-\sqrt{4a_n-{a_n}^2}=\dfrac{4-(4a_n-{a_n}^2)}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}=\dfrac{2-a_n}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}(2-a_n)$

ここで，$c=a_1\leqq a_n$ より $0<2-a_n\leqq 2-c$，また $2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}>2$ なので，

$$0<\frac{2-a_n}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}<\frac{2-c}{2}$$

よって，$2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ となる。

(3) (2)より，$0<2-a_n\leqq(2-a_1)\left(\dfrac{2-c}{2}\right)^{n-1}$（等号は $n=1$ のとき成立）

$0<\dfrac{2-c}{2}<1$ より，$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{2-c}{2}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$2-a_n\to 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

［解 説］

毎年，出題を見かける有名問題です。誘導も詳しいので，解の道筋は明快です。