２０２１ 入試対策

２次数学ランドマーク

微分と積分

文系＋理系

１９９８ － ２０２０

外林 康治　編著

電送数学舎

微分と積分

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1　a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。　[1998 東京大]

2　(1)　曲線 $y=x^3$ と直線 $y=3x+a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲を動くとき, 3 つの交点を A, B, C とし, 点 $(a,\ 4a)$ を D とする。3 つの線分の長さの積 $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値を求めよ。　[1999 一橋大]

3　a を実数とする。x の 2 次方程式 $x^2-ax=2\displaystyle\int_0^1|t^2-at|dt$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。　[2000 京都大・文]

4　$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ とおく。曲線 $y=f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただ一つ引けるとし, しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの a の値を求めよ。　[2001 大阪大・理]

5　xy 平面上の曲線 $C:y=x^3$ 上の点 P における接線を, P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする。C と L が, 相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。　[2001 京都大・理]

6　a, b, c を実数とする。$y=x^3+3ax^2+3bx$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき $a^2>b$ が成立することを示し, さらにこれらの交点の x 座標のすべては開区間 $(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b})$ に含まれていることを示せ。　[2002 京都大・理]

7　実数 t に対して, u の 3 次方程式 $u^3-3u+2t=0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1)　媒介変数 t を用いて, $x=f(t)$, $y=-2t$（t は実数）と表される曲線を図示せよ。

(2)　関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め, $f(t)$ のグラフをかけ。　[2003 千葉大・理]

8　放物線 $C:y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし, C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$, 原点を O とする。ただし, $a<b$, $m\neq 0$, $\alpha<\beta$ とする。線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。　[2003 大阪大・文]

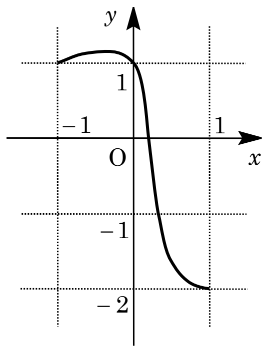
9 区間$-1 \leqq x \leqq 1$で定義された関数$f(x)$が，

$$f(-1)=f(0)=1,\ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき，$\int_{-1}^{1} f(x)dx \geqq -1$を示せ。

[2004 京都大・文]



10 関数$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) aを実数とする。$f(x)=a$を満たす実数xの個数を求めよ。

(2) $g(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。 [2004 東京大・文]

11 aを正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $y=\left|x^2-a|x|\right|$のグラフをかけ。

(2) $F(a)=\int_{-1}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx$を求めよ。

(3) $F(a)$の最小値を求めよ。 [2005 神戸大・文]

12 $0 \leqq k \leqq 1$を満たす実数kに対して，xy平面上に次の連立不等式で表される３つの領域D, E, Fを考える。

Dは連立不等式$y \geqq x^2$，$y \leqq kx$で表される領域

Eは連立不等式$y \leqq x^2$，$y \geqq kx$で表される領域

Fは連立不等式$y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$で表される領域

(1) 領域$D \cup (E \cap F)$の面積$m(k)$を求めよ。

(2) (1)で求めた面積$m(k)$を最小にするkの値と，その最小値を求めよ。

[2006 名古屋大・文]

13 (1) 関数$f(x)=2x^3-3x^2+1$のグラフをかけ。

(2) 方程式$f(x)=a$（aは実数）が相異なる３つの実数解$\alpha<\beta<\gamma$をもつとする。$l=\gamma-\alpha$をβのみを用いて表せ。

(3) aが(2)の条件のもとで変化するときlの動く範囲を求めよ。 [2007 名古屋大・理]

14 xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1) $-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき，k の満たす条件を求めよ。

(2) k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。 [2007 大阪大・文]

15 放物線 $C: y=x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。 [2008 九州大・文]

16 $f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1) $f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2) α が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3) $f(x)=0$ の解を小さい順に α_1，α_2，α_3 とすれば，

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\ g(\alpha_2)=\alpha_1,\ g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。 [2009 神戸大・理]

17 k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C: y=kx^2\ (x\geqq 0)$ と 2 つの直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha-\beta$ の値を求めよ。

(2) $\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ。

(3) 曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。 [2010 広島大・文]

18 3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として $90°$ 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2010 東京大・理]

19 xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。 [2011 京都大・理]

20 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<q$)。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 $p,\ q$ もそれぞれ求めよ。 [2012 九州大・文]

21 a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。 [2012 一橋大]

22 a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。 [2012 名古屋大・理]

23 c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。 [2013 神戸大・理]

24 原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。 ［2013 一橋大］

25 関数 $f(x)$ を $f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n \leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1) $f(x) \geqq x$ であることを示せ。

(2) $f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3) $0 \leqq x \leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4) $0 \leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ を求めよ。 ［2014 岡山大・文］

26 $a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1) $M(a)$ を求めよ。

(2) 実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3) a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。 ［2015 東北大・文］

27 実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1 \leqq x \leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を a, b を用いて表せ。

(2) $b \geqq 0$ のとき，M を a, b を用いて表せ。

(3) a, b が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。

［2015 東京医歯大・医］

$\boxed{28}$ 座標平面において，x 軸上に 3 点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$があり，曲線$C: y=x^3+ax^2+bx$がx軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a，bは実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S をαとβの式で表せ。

(2) βの値を固定して，$0<\alpha<\beta$の範囲でαを動かすとき，Sを最小とするαをβの式で表せ。 ［2016 九州大・文］

$\boxed{29}$ a, b, cを実数とし，β, mをそれぞれ$0<\beta<1$，$m>0$を満たす実数とする。また，関数$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$は$x=\beta$，$-\beta$で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$を満たすとする。

(1) a, b, cおよびβ, mの値を求めよ。

(2) 関数$g(x)=x^3+px^2+qx+r$は，$-1\leqq x\leqq 1$に対して$f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$を求めよ。 ［2017 筑波大・理］

$\boxed{30}$ $a>0$とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数$f(t)=t^3-2at+1$の区間$t\geqq 0$における最小値を，aを用いて表せ。

(2) (1)で求めた最小値が 0 となるときのaの値をAとおく。A^3を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線$y=x^4$をC_1，点$(0,\ a)$を中心とする半径 a の円をC_2とする。C_1とC_2の共有点の個数を調べよ。

(4) 座標平面において，点 P が曲線$y=x^4$上を動くときの点 P と点$(0,\ a)$の距離の最小値を考える。その最小値がaに等しくなるようなaの値の範囲を求めよ。

［2017 広島大・理］

$\boxed{31}$ a を正の定数とする。2 次関数$f(x)=ax^2$と 3 次関数$g(x)=x(x-4)^2$について，次の問いに答えよ。

(1) 関数$y=g(x)$について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるようにaの値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点のx座標を求めよ。

［2017 名古屋大・文］

32 a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2) 領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3) s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。

［2018 千葉大］

33 実数 $a,\ b,\ c$ に対し，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x)=f'(x)g(x)-6x$ を満たしているとする。

(1) b と c を a で表せ。

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

［2019 北海道大・文］

34 s を実数とする。等式

$$f(x)=|x^2-x|-s-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\{f(t)-|t|\}dt$$

を満たす関数 $f(x)$ が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 3 点で交わる s の値の範囲を求めよ。

(3) s が(2)で求めた範囲にあるとする。$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積 $A(s)$ を求めよ。

(4) (3)における $A(s)$ の最小値を与える s を求めよ。 ［2020 岡山大・文］

微分と積分

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 東京大］

$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ より，

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

$f'(0)=-4<0$ から，$f'(x)=0$ は 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{a-\frac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3},\quad \beta=\frac{a-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3}$$

極大値と極小値の差を $g(a)$ とすると，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned}
g(a)&=f(\alpha)-f(\beta)\\
&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\
&=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&=9\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3\\
&=\frac{3}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}\right\}^3=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$g(a)$ は $a-\dfrac{1}{a}=0$，すなわち $a=\pm1$ のとき最小になる。

［解 説］

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題で，特殊な解法があります。ただし本問では，$f'(x)=0$ の解が $x=\dfrac{2}{3}a$，$-\dfrac{2}{3a}$ となりますので，a の正負で場合分けをして，直接 $g(a)$ を求めても，計算量がやや増える程度ですみます。

2 ［1999 一橋大］

(1) $y=x^3$………①，$y=3x+a$………②

①②より，$x^3-3x=a$………③

①と②が異なる 3 点で交わる条件は，曲線 $y=x^3-3x$ と直線 $y=a$ が異なる 3 点で交わる条件と同値である。

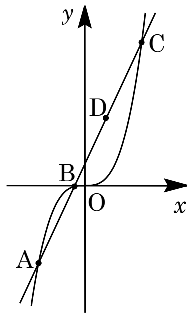
ここで，$f(x)=x^3-3x$ とおくと，

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右表より，求める条件は $-2<a<2$

(2) ③の解を $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ （$\alpha<\beta<\gamma$）として，$\mathrm{A}(\alpha,\ 3\alpha+a)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 3\beta+a)$，$\mathrm{C}(\gamma,\ 3\gamma+a)$ とおく。



このとき，③を $x^3-3x-a=0$ と変形すると，

$$x^3-3x-a=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\text{………④}$$

このとき，$\mathrm{DA}=\sqrt{(\alpha-a)^2+(3\alpha+a-4a)^2}$

$=\sqrt{10(\alpha-a)^2}=\sqrt{10}\,|\alpha-a|$

同様にして，$\mathrm{DB}=\sqrt{10}\,|\beta-a|$，$\mathrm{DC}=\sqrt{10}\,|\gamma-a|$

$$\begin{aligned}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}&=10\sqrt{10}\,|\alpha-a||\beta-a||\gamma-a|\\&=10\sqrt{10}\,|(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)|\\&=10\sqrt{10}\,|a^3-3a-a|\quad\text{（④より）}\\&=10\sqrt{10}\,|a^3-4a|\end{aligned}$$

ここで，$g(a)=a^3-4a$ とおくと，$g'(a)=3a^2-4=(\sqrt{3}a+2)(\sqrt{3}a-2)$

右表より，$|g(a)|$ は $a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$ をとる。

a	-2	$\cdots$	$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

よって，$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値は $10\sqrt{10}\cdot\dfrac{16}{9}\sqrt{3}=\dfrac{160}{9}\sqrt{30}$ となる。

［解 説］

微分法の応用に関する問題です。本問のポイントは，強いて言えば，(2)で④式に注目することです。

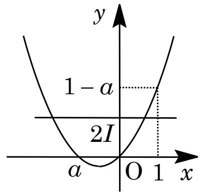
3 ［2000 京都大・文］

$I=\int_0^1 \left| t^2-at \right| dt$ とおくと，$x^2-ax=2I$ の解の個数は，$y=x^2-ax$ と $y=2I$ のグラフの共有点の個数と一致する。

(i) $a<0$ のとき

$$I=\int_0^1 (t^2-at)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$$

$$2I-(1-a)=\frac{2}{3}-a-1+a=-\frac{1}{3}<0$$



よって，$0<2I<1-a$ となるので，右図より，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

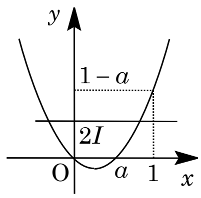
(ii) $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$I=\int_0^a -(t^2-at)\,dt+\int_a^1 (t^2-at)\,dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_a^1$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$$

$$2I-(1-a)=\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}-1+a=\frac{1}{3}(2a^3-1)$$

(ii-i) $2I\leqq 1-a\ \left(0\leqq a\leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ のとき

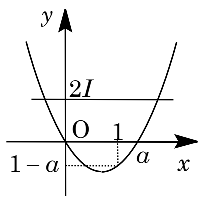


$0<2I\leqq 1-a$ となるので，右図より，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii-ii) $2I>1-a\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a\leqq 1\right)$ のとき

$0<1-a<2I$ となるので，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解はない。

(iii) $1<a$ のとき



$0<2I$ となるので，右図より，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解はない。

(i)(ii)(iii)より，求める解の個数は，$a\leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき 1 個，$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a$ のとき 0 個である。

［解 説］

当然ですが，$I>0$ です。これが場合分けを少なくし，議論をスッキリさせるポイントです。

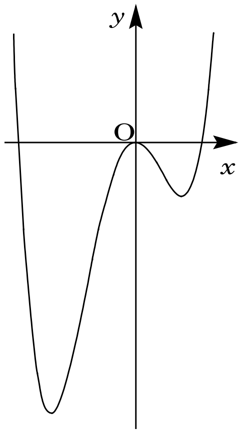
$\boxed{4}$ ［2001 大阪大・理］

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より，$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$

接点を $(t,\ t^4+t^3-3t^2)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^4+t^3-3t^2)=(4t^3+3t^2-6t)(x-t)$$

$$y=(4t^3+3t^2-6t)x-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots①$$



①が点 $(0,\ a)$ を通るので，

$$a=-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g(t)=-3t^4-2t^3+3t^2$ とおくと，

$$g'(t)=-12t^3-6t^2+6t$$

$$=-6t(2t-1)(t+1)$$

点 $(0,\ a)$ を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は，②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

すると，右表において $2>\frac{5}{16}$ なので，$a=2$ のときである。

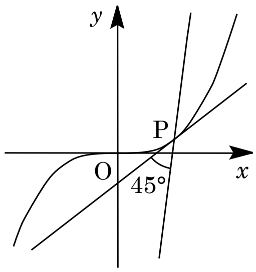
t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{16}$	$\searrow$

［解 説］

問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは，4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。

5 [2001 京都大・理]

$C: y = x^3$ より $y' = 3x^2$ となるので，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における接線の傾きは $3t^2$ となる。この接線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta = 3t^2$ である。



また，この接線を P のまわりに $45°$ 回転して得られる直線 L と, x 軸の正の向きとのなす角を φ とすると,

$$\tan\varphi = \tan(\theta + 45°) = \frac{\tan\theta + \tan 45°}{1 - \tan\theta\tan 45°} = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}$$

よって，$t \neq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，直線 $L: y - t^3 = \dfrac{3t^2+1}{1-3t^2}(x - t)$

なお，$t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，直線 L は $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，条件を満たさない。

すると, C と L の共有点は，$x^3 = \dfrac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t) + t^3$ より,

$$x^3 - t^3 - \frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t) = 0,\ (x-t)\left(x^2 + tx + t^2 + \frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right) = 0$$

よって，$x = t$ または $x^2 + tx + t^2 + \dfrac{3t^2+1}{3t^2-1} = 0$ ………①

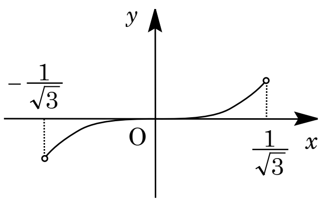
求める条件は, ①が $x \neq t$ の異なる 2 実数解をもつことより,

$$t^2 + t^2 + t^2 + \frac{3t^2+1}{3t^2-1} \neq 0 \cdots\cdots②,\ D = t^2 - 4\left(t^2 + \frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right) > 0 \cdots\cdots③$$

②は $\dfrac{9t^4+1}{3t^2-1} \neq 0$ となるので，つねに成立する。

③より，$\dfrac{9t^4+9t^2+4}{3t^2-1} < 0$，$3t^2 - 1 < 0$

よって，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < t < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，点 P の範囲を図示すると右図のようになる。



［解 説］

方針に迷いが生ずることはなく，どんどん計算を進めていくことができます。

$\boxed{6}$ [2002 京都大・理]

$y=x^3+3ax^2+3bx$ ……①に対して，$y'=3x^2+6ax+3b=3(x^2+2ax+b)$

$y'=0$ の判別式 $D/4=a^2-b$ より，$a^2>b$ のときは $y'=0$ は 2 つの異なる実数解 $x=-a\pm\sqrt{a^2-b}$ をもち，これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，①のグラフ増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，ある c に対して，①と $y=c$ のグラフは相異なる 3 つの交点をもつ。

また，$a^2\leqq b$ のときは $y'\geqq 0$ となり，①は単調増加関数になる。これより，どんな c をとっても，①と $y=c$ のグラフは 1 個の共有点しかもたない。

以上より，①と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつ条件は，$a^2>b$ である。

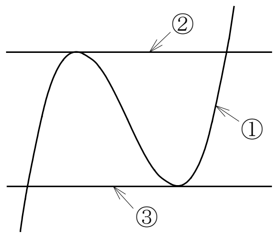
さて，$a^2>b$ のとき，①と $y=\alpha^3+3a\alpha^2+3b\alpha$ ……②のグラフの共有点は，

$$x^3+3ax^2+3bx=\alpha^3+3a\alpha^2+3b\alpha$$
$$(x-\alpha)^2(x+2\alpha+3a)=0$$
$$x=\alpha,\ \ x=-2\alpha+3a$$

同様にして，①と $y=\beta^3+3a\beta^2+3b\beta$ ……③のグラフの共有点は，

$$x=\beta,\ \ x=-2\beta+3a$$

右図より，①と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつとき，これらの交点の x 座標のすべては，開区間 $(-2\beta+3a,\ -2\alpha+3a)=\left(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b}\right)$ に含まれている。



[解 説]

3 次関数のグラフについての文系風の基本問題です。

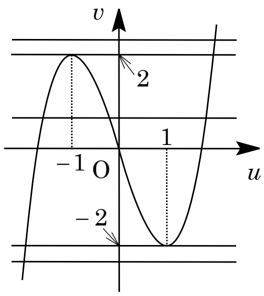
$\boxed{7}$ ［2003 千葉大・理］

(1) $u^3-3u+2t=0$ ……①より，$u^3-3u=-2t$ と変形すると，条件より，uv 平面上で $v=u^3-3u$ ……②と $v=-2t$ ……③の共有点のうち, u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

②より，$v'=3u^2-3=3(u+1)(u-1)$

u	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
v'	＋	0	－	0	＋
v	↗	2	↘	-2	↗

すると, ②のグラフは右図のようになり，③との共有点の様子から, 次のように場合分けをする。

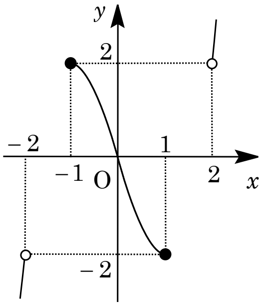


(i) $-2t<-2$，$2<-2t$ のとき　②と③は 1 つの共有点しかもたないので, その共有点が $(f(t),\ -2t)$ である。

(ii) $-2t=\pm2$ のとき　②と③は 2 つの共有点をもつが, u 座標の絶対値が小さいのは接点の方で，$(f(t),\ -2t)=(\mp1,\ \pm2)$ (複号同順)となる。

(iii) $-2<-2t<2$ のとき　②と③は 3 つの共有点をもつが, u 座標の絶対値が小さいのは $-1<u<1$ の範囲にある共有点であり, その点が $(f(t),\ -2t)$ である。

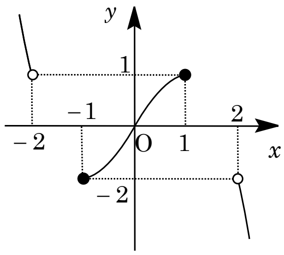
以上より，$(x,\ y)=(f(t),\ -2t)$ と表される曲線は，$y=x^3-3x$ $(x<-2,\ -1\leqq x\leqq1,\ 2<x)$ であり, 図示すると右図のようになる。



(2) (1)と同様にして，①より $-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u=t$ と変形すると，$v=-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u$ ……④と $v=t$ の共有点のうち, u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

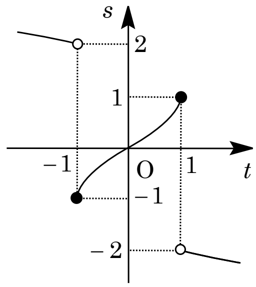
④より，$v'=-\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(u+1)(u-1)$

すると，$t=\pm1$ で $f(t)$ は不連続で,（x，y）$=(f(t),\ t)$ は，$y=-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x$ $(x<-2,\ -1\leqq x\leqq1,\ 2<x)$ ……⑤で表される曲線を描き, 図示すると右図のようになる。



これより，点 $(t,\ f(t))$ の描く曲線は，⑤の曲線を直線 $y=x$ に関して対称移動したものであり，これを $s=f(t)$ とおくと，$t=-\dfrac{3}{2}s^3+\dfrac{3}{2}s$ $(s<-2,\ -1\leqq s\leqq1,\ 2<s)$ である。

よって，このグラフは右図のようになる。

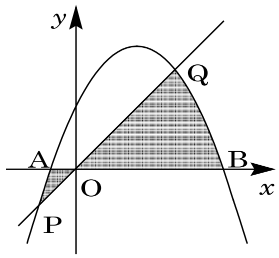


［解 説］

おもしろい問題ですが, (1)の誘導は少し使いにくいものです。

8 ［2003 大阪大・文］

$C: y=-x^2+2x+1$ ……①，直線 $y=mx$ ……②に対して，



①と x 軸との交点 A, B の x 座標 a, b は，$-x^2+2x+1=0$ より，$x=1\pm\sqrt{2}$ なので，$a=1-\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$ となる。

①と x 軸で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，

$$S_1=\int_a^b(-x^2+2x+1)\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3$$

また，①と②の交点 P, Q の x 座標 α, β は，$-x^2+2x+1=mx$ より，$x=\dfrac{-(m-2)\pm\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$ なので，

$$\alpha=\frac{-(m-2)-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2},\quad \beta=\frac{-(m-2)+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$

①と②で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，

$$S_2=\int_\alpha^\beta(-x^2+2x+1-mx)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+4}\right)^3$$

条件から，線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と，線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいことより，$S_1=S_2$ となる。

$$\sqrt{(m-2)^2+4}=2\sqrt{2},\ (m-2)^2+4=8,\ m-2=\pm2$$

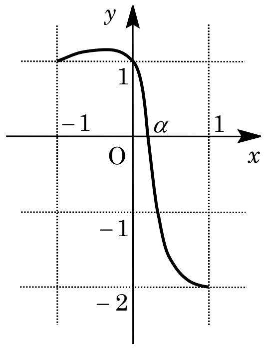
$m\neq0$ より，$m=4$ である。

［解 説］

$S_1=S_2$ が発見できれば，後はいわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる基本的な頻出問題です。

9 ［2004 京都大・文］

$y=f(x)$ のグラフは $-1\leqq x\leqq 1$ で連続であり，x 軸との交点を $x=\alpha$ とすると，$0<\alpha<1$ となる。



右図より，$-1<x<\alpha$ で $f(x)>0$，$-1<x<0$ で $f(x)>1$ となっているので，

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx>\int_{-1}^{0} f(x)\,dx>\int_{-1}^{0}dx=1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\alpha<x<1$ で $f(x)>-2$ より，

$$\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx>\int_{\alpha}^{1}(-2)\,dx=-2(1-\alpha)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx>1-2(1-\alpha)=-1+2\alpha>-1$$

［解 説］

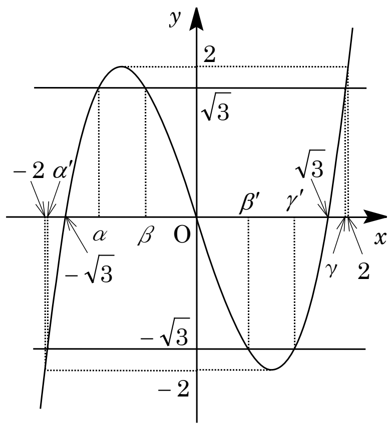
定性的な問題で，符号付きの面積を考えると，結論が見えてきます。

$\boxed{10}$ ［2004 東京大・文］

(1) $f(x)=x^3-3x$ より，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

$f(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は，$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数に等しいので，右表より，$a<-2$，$2<a$ のとき 1 個，$a=\pm2$ のとき 2 個，$-2<a<2$ のとき 3 個である。



(2) $f(x)=a$ とおくと，$g(x)=0$ は，

$a^3-3a=0$，$a=0$，$\pm\sqrt{3}$

(i) $a=0$ のとき　$f(x)=0$ より $x=0$，$\pm\sqrt{3}$

(ii) $a=\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha$，β，γ とおく。

(iii) $a=-\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=-\sqrt{3}$ となり，これを満たす実数 x は，(1)より 3 個存在し，$x=\alpha'$，β'，γ' とおく。

すると，$-2<\alpha'<-\sqrt{3}<\alpha<\beta<0<\beta'<\gamma'<\sqrt{3}<\gamma<2$ ……(＊)が成立するので，$g(x)=0$ を満たす実数 x は合計 9 個存在する。

(3) $h(x)=0$ より，$\{g(x)\}^3-3g(x)=0$ となり，$g(x)=0$，$\pm\sqrt{3}$ である。

$g(x)=0$ のとき，$a=0$，$\pm\sqrt{3}$ であり, (2)より実数 x は 9 個存在する。

$g(x)=\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=\sqrt{3}$ より $a=\alpha$，β，γ となり，それぞれの a の値に対し, (1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

同様に，$g(x)=-\sqrt{3}$ のとき，$a^3-3a=-\sqrt{3}$ より $a=\alpha'$，β'，γ' となり，それぞれの a の値に対し, (1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

さらに, (＊)から a の値に重複は存在しないので, x の値も重複はない。

よって，$h(x)=0$ を満たす実数 x は合計 27 個存在する。

［解 説］

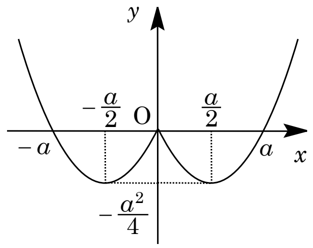
実数解の個数を調べる頻出問題ですが，ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。図をたくさん書いて，思考過程を述べた方が明快です。

$\boxed{11}$ ［2005 神戸大・文］

(1) まず，$y = x^2 - a|x| \cdots\cdots$①に対して，

$$y = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad (x \geqq 0)$$

$$y = x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad (x < 0)$$



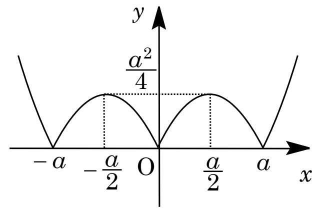
よって，①のグラフは右図のようになる。

すると，$y = \left|x^2 - a|x|\right| \cdots\cdots$②に対して，

$$y = x^2 - a|x| \quad (x^2 - a|x| \geqq 0)$$

$$y = -x^2 + a|x| \quad (x^2 - a|x| < 0)$$

よって，②のグラフは，①のグラフの $y<0$ の部分を x 軸について折り返したものとなり，図示すると，右図のようになる。



(2) ②のグラフは y 軸対称なので，

$$F(a) = \int_{-1}^{1} \left|x^2 - a|x|\right| dx = 2\int_0^1 \left|x^2 - a|x|\right| dx = 2\int_0^1 \left|x^2 - ax\right| dx$$

(i) $0 < a < 1$ のとき

$$F(a) = 2\int_0^a -(x^2 - ax)\,dx + 2\int_a^1 (x^2 - ax)\,dx$$

$$= -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^a + 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

$$= -\frac{2}{3}a^3 + a^3 + \frac{2}{3}(1 - a^3) - a(1 - a^2) = \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}$$

(ii) $a \geqq 1$ のとき

$$F(a) = 2\int_0^1 -(x^2 - ax)\,dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + a$$

(3) (2)より，$0 < a < 1$ のとき，

$$F'(a) = 2a^2 - 1$$

すると，$F(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$F'(a)$		$-$	0	$+$	
$F(a)$	$\frac{2}{3}$	↘		↗	$\frac{1}{3}$

また，$a \geqq 1$ のとき，$F(a) \geqq F(1) = \frac{1}{3}$ なので，$F(a)$ の最小値は，

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2})$$

［解 説］

(1)のグラフを参考にし，場合分けをして積分計算を行います。

$\boxed{12}$ ［2006 名古屋大・文］

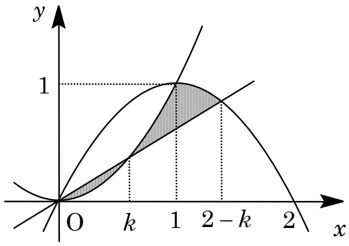
(1) $D: y \geqq x^2$，$y \leqq kx$，$E: y \leqq x^2$，$y \geqq kx$，$F: y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$ より，これらの 3 つの領域の境界線は，$y = x^2$ ……①，$y = kx$ ……②，$y = -x^2+2x$ ……③ である。

①と②の交点は，$x^2 = kx$ より，$x = 0,\ k$

①と③の交点は，$x^2 = -x^2+2x$ より，$x = 0,\ 1$

②と③の交点は，$kx = -x^2+2x$ より，

$x = 0,\ 2-k$



これより，領域 $D \cup (E \cap F)$ を図示すると，右図の網点部となり，その面積 $m(k)$ は，

$$m(k) = \int_0^{2-k}(-x^2+2x-kx)\,dx - \int_0^1(-x^2+2x-x^2)\,dx + 2\int_0^k(kx-x^2)\,dx$$

$$= -\int_0^{2-k}x(x-2+k)\,dx + 2\int_0^1 x(x-1)\,dx - 2\int_0^k x(x-k)\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^3 + 2\cdot\frac{1}{6}k^3 = \frac{1}{6}(k^3+6k^2-12k+6)$$

$$= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1$$

(2) (1)より，$m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k) = 0$ とすると，$k = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leqq k \leqq 1$ より，$m(k)$ の値の変化は右表のようになり，$k = -2+2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

k	0	$\cdots$	$-2+2\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$m'(k)$		$-$	0	$+$	
$m(k)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$k^3+6k^2-12k+6$ を k^2+4k-4 で割ると，

$k^3+6k^2-12k+6 = (k^2+4k-4)(k+2) - 16k + 14$

これより，最小値 $m(-2+2\sqrt{2})$ は，

$$m(-2+2\sqrt{2}) = \frac{1}{6}\left\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\right\} = \frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

［解 説］

名大では 1999 年に続き，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式の適用パズルが出題されました。ただ，本年の問題は，ひねりが加わっています。

$\boxed{13}$　　［2007 名古屋大・理］

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ より，

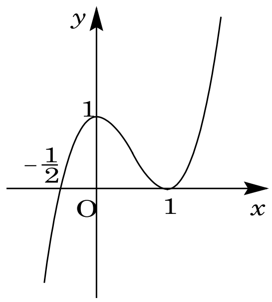
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

すると，$f(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

また，$f(x)=(2x+1)(x-1)^2$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は，$x=-\dfrac{1}{2}$，1 である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　(1)より，方程式 $f(x)=a$ は，$0<a<1$ のとき 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもち，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha+\gamma=\dfrac{3}{2}-\beta$

②に代入して，$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)=-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)$

さて，$l=\gamma-\alpha$ より，

$$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2+4\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}$$

よって，$l=\sqrt{-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}}$

(3)　(2)より，$l=\sqrt{-3\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+3}$ となり，$0<\beta<1$ から，

$$\frac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}$$

［解　説］

解 α，γ と β の関係をとらえるために，解と係数の関係に着目することがポイントとなっています。見かけよりスパイスの効いている１題です。

14 ［2007 大阪大・文］

(1) $C: y=x^2$ と $l: y=x+k$ の共有点の x 座標は,

$$x^2=x+k,\ x^2-x-k=0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より, $(*)$の異なる 2 つの実数解が, ともに $-2<x<2$ に存在するので,

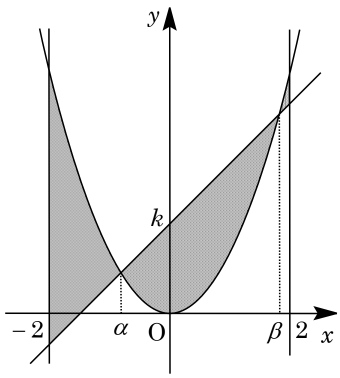
$$D=1+4k>0,\ k>-\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$f(x)=x^2-x-k$ として,

$$f(2)=4-2-k>0,\ k<2\cdots\cdots\cdots②$$

$$f(-2)=4+2-k>0,\ k<6\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より, $-\frac{1}{4}<k<2$



(2) $(*)$より, $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$ となり, この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。

すると, 求める 3 つの部分の面積の和 S は,

$$S=\int_{-2}^{\alpha}(x^2-x-k)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx+\int_{\beta}^{2}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^2-x-k)\,dx-2\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx$$

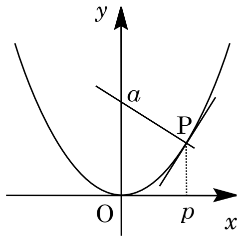
$$=2\int_{0}^{2}(x^2-k)\,dx-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^2+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{16}{3}-4k+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+4k}\right)^3$$

［解 説］

積分計算がポイントです。計算を迅速にかつ正確に遂行するためには, 上記のような工夫が必要になります。

$\boxed{15}$ ［2008 九州大・文］



(1) $C: y=x^2$ より，$y'=2x$ となり，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方向ベクトル，すなわち法線の法線ベクトルの成分は，$(1,\ 2p)$ と表せる。

これより, P における法線の方程式は,

$$(x-p)+2p(y-p^2)=0$$

$$x+2py-p-2p^3=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2) ①が点$(0,\ a)$を通る条件は，$2pa-p-2p^3=0 \cdots\cdots\cdots ②$

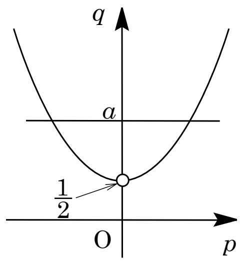
ここで, ②の異なる実数解 p の個数が, 点$(0,\ a)$を通る法線の本数に一致することより,

(i) $p=0$ のとき

②は任意の実数 a で成立する。

(ii) $p\neq 0$ のとき

②より，$2a-1-2p^2=0$，$a=p^2+\dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ③$



さて，$p\neq 0$ のもとで，③の異なる実数解 p の個数は，直線 $q=a$ と $q=p^2+\dfrac{1}{2}$ のグラフの共有点の個数に一致する。

すると，右図より，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき p は 2 個存在し，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき p は存在しない。

(i)(ii)より，題意の法線の本数は，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき 3 本，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき 1 本である。

［解 説］

法線の本数についての基本的な問題です。ただし，$a=\dfrac{1}{2}$ の場合は要注意です。