２０２１ 入試対策

２次数学ランドマーク

図形と式

文系＋理系

１９９８ － ２０２０

外林 康治　編著

電送数学舎

図 形 と 式

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 座標平面において，2 点 P，Q をそれぞれ直線 $x=-1$，$x=2$ 上の点とし，直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき，2 点 P，Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。 ［1998 千葉大］

2 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点 $(a,\ b)$ の集合を式で表し，図示せよ。

$$x-y<0,\ \ x+y<2,\ \ ax+by<1$$

［1998 北海道大・理］

3 c を $c>\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。［1999 東京大・文］

4 曲線 $y=x^2$ の点 $(a,\ a^2)$ での接線を l とする。l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。 ［1999 東北大・理］

5 次の問いに答えよ。

(1) 点 $(1,\ 0)$ を通って傾きが -4 の直線と，関数 $y=x^2-4x$ のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2) 2 つの関数 $y=x^2-4x$，$y=k(x-a)$ のグラフが，どんな k の値に対しても $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

［2000 神戸大・文］

6 xy 平面内の領域 $-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$ において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。 ［2000 東京大・文］

7 放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P，Q が存在するような a の範囲を求めよ。 ［2001 一橋大］

8 実数 t に対して，xy 平面上の直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は，t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2) t が $t\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。 ［2002 神戸大・文］

9　$a,\ b$ を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\ 3x+y \geqq b,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。　[2003 東京大・文]

10　xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

$\triangle$PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。　[2004 東京大]

11　不等式 $y \leqq -(x-1)^2$ の表す領域を A_1，不等式 $y \leqq -(x+1)^2$ の表す領域を A_2 とする。A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また，不等式 $y \geqq (x-a)^2+b$ の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=0$，$b=-1$ とするとき, A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(2)　A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を $a,\ b$ で表せ。

(3)　A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき点$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。　[2005 金沢大・文]

12　a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\ g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して，2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。　[2005 一橋大]

13 θを$0 \leqq \theta < 2\pi$を満たす実数とする。時刻tにおける座標が

$$x = t\cos\theta,\ \ y = 1 - t^2 + t\sin\theta$$

で与えられるような動点$\mathrm{P}(x,\ y)$を考える。tが実数全体を動くとき，点Pが描く曲線をCとする。Cがx軸の$x \geqq 0$の部分と交わる点をQとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$のとき，Qのx座標を求めよ。

(2) θが変化すると曲線Cも変化する。θが$0 \leqq \theta < 2\pi$の範囲を変化するとき，Cが通過する範囲をxy平面上に図示せよ。

(3) θが変化すると点Qも変化する。Qのx座標が最大となるようなθ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$について$\tan\theta$の値を求めよ。 [2005 大阪大・理]

14 座標平面上に3点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$を考える。平面上の直線lに関して点Aと対称な点が線分OB上にあるとき，直線lをピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点$\mathrm{P}(p,\ q)$を通るピッタリ直線lがあるとし，lに関してAと対称な点を$\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 6)$とするとき，p，q，tの間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が2本通る点$\mathrm{P}(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形OABも書いておくこと。

(3) 点$\mathrm{P}(p,\ q)$を通る2本のピッタリ直線が直交するような点$\mathrm{P}(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006 名古屋大・理]

15 座標平面上の2点P，Qが，曲線$y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$上を自由に動くとき，線分PQを$1:2$に内分する点Rが動く範囲をDとする。ただし，$\mathrm{P} = \mathrm{Q}$のときは$\mathrm{R} = \mathrm{P}$とする。

(1) aを$-1 \leqq a \leqq 1$を満たす実数とするとき，点$(a,\ b)$がDに属するためのbの条件をaを用いて表せ。

(2) Dを図示せよ。 [2007 東京大・理]

16 aを正の実数とする。点$(x,\ y)$が，不等式$x^2 \leqq y \leqq x$の定める領域を動くとき，つねに$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$となる。$a$の値の範囲を求めよ。 [2008 一橋大]

17　(1)　任意の角 θ に対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角 α，β に対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。　［2009 一橋大］

18　座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(x,\ y)$ を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3)　3 つの角 $\angle\mathrm{CAB}$, $\angle\mathrm{ABC}$, $\angle\mathrm{BCA}$ をそれぞれ α，β，γ とし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4)　x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。［2009 広島大・理］

19　a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が，3 条件

(i)　$p>0, q>0$　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

［2010 千葉大・理］

20　実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。　［2011 東北大・理］

$\boxed{21}$　以下の問いに答えよ。

(1)　t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2)　a を $a \geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

$$ax+(2-a)y \geqq 2,\quad y \geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3)　a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。［2011 神戸大・理］

$\boxed{22}$　座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1)　l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2)　l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3)　l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。　［2012 神戸大］

$\boxed{23}$　s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s, t が $s \geqq 0, t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2)　$x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。$s,\ t$ が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。　［2012 東北大・理］

$\boxed{24}$　$a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1)　a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2)　$b-a \geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3)　斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

［2013 神戸大・文］

25 座標平面上の 2 点 $A(0,\ 1)$ $B(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

［2013 広島大・理］

26 座標平面の原点を O で表す。線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

［2014 東京大・理］

27 座標平面上の原点を O とする。点 $A(a,\ 0)$，点 $B(0,\ b)$ および点 C が，$OC = 1$，$AB = BC = CA$ を満たしながら動く。

(1) $s = a^2 + b^2$，$t = ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

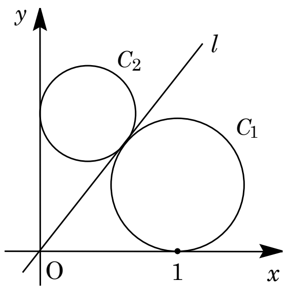
［2015 一橋大］

28 l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。



円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。

［2015 東京大・文］

29 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある。 ［2015 東京大・文］

30 座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。 ［2016 東京大・文］

31 a, b を実数とする。$y=\left|x^2-4\right|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。 ［2017 東北大・理］

32 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

［2018 広島大・理］

33 xy 平面における 2 つの放物線 $C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。 ［2018 東北大・理］

34 θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。

［2018 信州大・医］

35 放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。 ［2018 東京大・文］

36 座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{APB}$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 ［2019 熊本大・医］

37 O を原点とする座標平面を考える。不等式 $|x|+|y| \leqq 1$ が表す領域を D とする。また，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く範囲を E とする。

(1) D, E をそれぞれ図示せよ。

(2) a, b を実数とし，不等式 $|x-a|+|y-b| \leqq 1$ が表す領域を F とする。点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を満たす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。 ［2019 東京大・文］

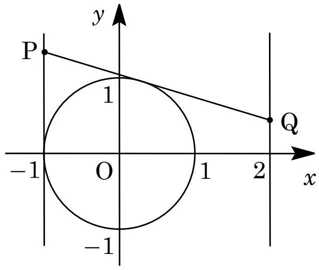
38 x の 2 次関数で，そのグラフが $y=x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし，2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう。 ［2020 京都大・文］

図形と式

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 千葉大]



$P(-1,\ a)$, $Q(2,\ b)$ とする。

$\overrightarrow{PQ}=(3,\ b-a)$ から，直線 PQ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a-b,\ 3)$ とおくことができる。

直線 PQ の方程式は,

$$(a-b)(x+1)+3(y-a)=0$$

$$(a-b)x+3y-2a-b=0$$

直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するので,

$$\frac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2+9}}=1,\quad |-2a-b|=\sqrt{(a-b)^2+9}$$

両辺 2 乗して，$(2a+b)^2=(a-b)^2+9$, $(2a+b+a-b)(2a+b-a+b)=9$

$$a(a+2b)=3$$

a, b は整数より, a は 3 の約数となり，$a=\pm1,\ \pm3$

$a=1$ のとき $a+2b=3$ から，$b=1$ となる。よって，$P(-1,\ 1)$, $Q(2,\ 1)$

$a=-1$ のとき $a+2b=-3$ から，$b=-1$ となる。よって，$P(-1,\ -1)$, $Q(2,\ -1)$

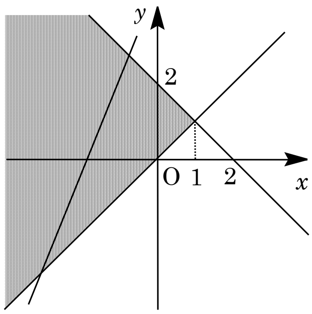
$a=3$ のとき $a+2b=1$ から，$b=-1$ となる。よって，$P(-1,\ 3)$, $Q(2,\ -1)$

$a=-3$ のとき $a+2b=-1$ から，$b=1$ となる。よって，$P(-1,\ -3)$, $Q(2,\ 1)$

［解 説］

円と直線が接する条件を整理すると，約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単に P, Q の座標が求まってしまいます。

2 [1998 北海道大・理]



条件より，$x-y<0$………①，$x+y<2$………②

$ax+by<1$………③

①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③に$(x,\ y)=(0,\ 0)$を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，直線$ax+by=1$……④を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線$x-y=0$と④との交点は，

$$(a+b)x=1,\quad x=\frac{1}{a+b}\quad (a\neq -b)$$

また，直線$x+y=2$と④との交点は，

$$ax+b(2-x)=1,\quad x=\frac{1-2b}{a-b}\quad (a\neq b)$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{a+b}<0\ \cdots\cdots⑤\text{かつ}\ \frac{1-2b}{a-b}<1\ \cdots\cdots⑥$$

⑤より，$a+b<0$，$b<-a$………⑦

⑥より，$(1-2b)(a-b)<(a-b)^2$となり，

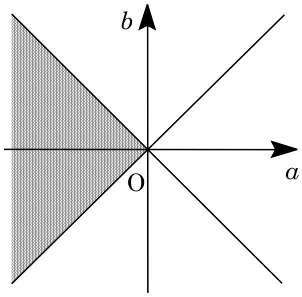
$(a-b)(a-b-1+2b)>0$

$(a-b)(a+b-1)>0$

⑦から$a+b-1<0$なので，$a-b<0$，$b>a$………⑦

⑥⑦より，$a<b<-a$

点$(a,\ b)$の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

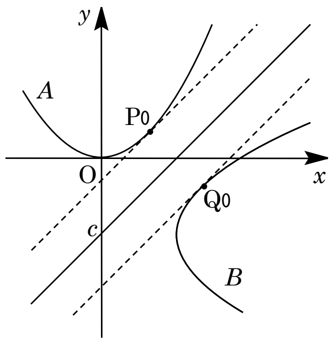


［解 説］

③の領域については，直線④を境界とし，原点を含むか否かで決定しました。また，直線④と直線$y=x$および$y=-x+2$との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。

3 ［1999 東京大・文］

放物線 A と，A と線対称な放物線 B に，対称軸 $y=x-c$ に平行な直線を引き，放物線 A との接点を P_0，放物線 B との接点を Q_0 としたとき，線分 P_0Q_0 は対称軸と直交する。



すると，線分 PQ の長さの最小値は線分 P_0Q_0 の長さとなる。

ここで，放物線 $A: y=x^2$ ……①と対称軸に平行な直線 $y=x+k$ ……②が接するとき，①②より，

$$x^2-x-k=0 \cdots\cdots\cdots③$$

判別式 $D=1+4k=0$ より，$k=-\dfrac{1}{4}$

このとき，接点は③から $x=\dfrac{1}{2}$，①から $y=\dfrac{1}{4}$

よって，$P_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

点 P_0 と点 Q_0 は対称軸 $y=x-c$ に関して対称なので，線分 PQ の長さの最小値 P_0Q_0 は点 $P_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と対称軸 $x-y-c=0$ との距離の 2 倍となるので，

$$P_0Q_0=2\cdot\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-c\right|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-c\right|=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$$

［解 説］

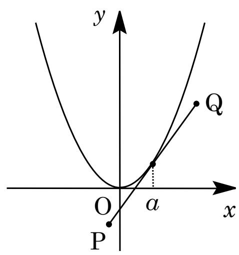
本問は求値問題ですので,, 直観に依存した解で記述しています。

４ ［1999 東北大・理］

$y=x^2$ より，$y'=2x$

点 $(a,\ a^2)$ での接線は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

よって，線分 PQ は，$y=2ax-a^2\ (a-1\leqq x\leqq a+1)$ ………①



a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は，明らかに y 軸対称となる。

さて，①において $x=t\ (t\geqq 0)$ 上での通過領域を考えると，

$$y=2at-a^2=-(a-t)^2+t^2\ (t-1\leqq a\leqq t+1)\ \text{………②}$$

そこで，②式を $y=f(a)$ とおき，a が $-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲を動くとき，y の値のとりうる範囲を求める。

ここで，$y=f(a)$ のグラフの軸が $a=t$ なので，t の値で場合分けをする。

(i) $t>2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は存在しない。

(ii) $1<t\leqq 2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲には，$y=f(a)$ の軸は存在しないので，$f(a)$ は単調増加となる。

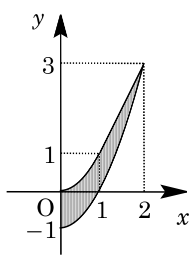
$f(t-1)\leqq y\leqq f(1)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq 2t-1$

(iii) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲に $y=f(a)$ の軸は存在し，しかも $t-1<\dfrac{(t-1)+1}{2}\leqq t\leqq 1$ なので，

$f(t-1)\leqq y\leqq f(t)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq t^2$

(i)(ii)(iii)より，$x\geqq 0$ で線分 PQ の通過領域を図示すると，右図のようになる。



求める面積を S とおくと，

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\left\{x^2-(x^2-1)\right\}dx+\int_1^2\left\{2x-1-(x^2-1)\right\}dx$$
$$=\int_0^1 dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx=\frac{5}{3}$$

よって，$S=\dfrac{10}{3}$

［解 説］

x を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし，本問では２点 P，Q だけの軌跡を求めて，直観的に考えることも可能です。

5 [2000 神戸大・文]

(1) 点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線は，$y=-4(x-1)$………①

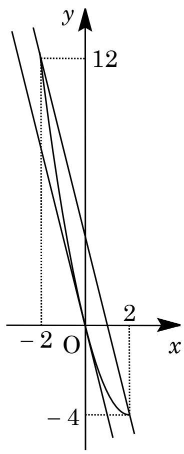
①と$y=x^2-4x$……②の共有点は,

$-4(x-1)=x^2-4x$，$x^2-4=0$，$x=\pm 2$

$x=2$のとき，①より$y=-4$なので，共有点$(2,\ -4)$

$x=-2$のとき，①より$y=12$なので，共有点$(-2,\ 12)$

(2) ②より，$y=(x-2)^2-4$となり，$-2\leqq x\leqq 2$の範囲でグラフを書くと，右図の曲線のようになる。



また，$y=k(x-a)$は点$(a,\ 0)$を通って傾きがkの直線を表し，$k=-4$，$a=1$のとき，(1)より②と$(2,\ -4)$，$(-2,\ 12)$で交わる。

よって，$a=1$のときは，右図より，どんなkの値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも1つの共有点をもつ。

また，②より$y'=2x-4$なので，$x=0$で$y'=-4$から原点における②の接線は$y=-4x$となる。そして，$a=0$のときは，どんなkの値に対しても原点が共有点となる。

さて，$a<0$, $1<a$のときは，$k=-4$とすると$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で共有点をもたない。

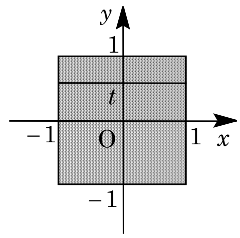
さらに，$0<a<1$のとき，$k\leqq -4$では$a<x<2$で，$k\geqq -4$では$-2<x<a$で少なくとも1つの共有点をもつ。

以上より，どんなkの値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも1つの共有点をもつ条件は，$0\leqq a\leqq 1$である。

［解 説］

(2)は最初, yを消去して方程式の解の配置で考えました。しかし，かなり複雑なので，方針を変更してグラフを書くと，(1)が大きなヒントとなっていることがわかりました。

6 ［2000 東京大・文］



$P=1-ax-by-axy$ とおき，まず y の値を固定し，$y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ において, P の最小値を求める。

$$P=1-ax-bt-axt=-a(1+t)x+1-bt$$

$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，$1+t\geqq 0$ となるので,

(i) $-a\geqq 0$ $(a\leqq 0)$ のとき，$x=-1$ で P は最小となる。

このとき，$P=a(1+t)+1-bt=(a-b)t+a+1$

(i-i) $a-b\geqq 0$ $(b\leqq a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=-(a-b)+a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i-ii) $a-b<0$ $(b>a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=(a-b)+a+1=2a-b+1$ をとるので，条件より，$2a-b+1>0$

(ii) $-a<0$ $(a>0)$ のとき，$x=1$ で P は最小となる。

このとき，$P=-a(1+t)+1-bt=-(a+b)t-a+1$

(ii-i) $a+b\geqq 0$ $(b\geqq -a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=-(a+b)-a+1=-2a-b+1$ をとるので，条件より，$-2a-b+1>0$

(ii-ii) $a+b<0$ $(b<-a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=(a+b)-a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i)(ii)をまとめると，

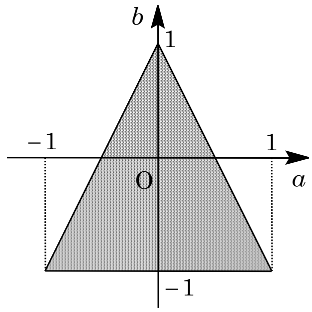
$a\leqq 0$ かつ $b\leqq a$ のとき，$b>-1$

$a\leqq 0$ かつ $b>a$ のとき，$b<2a+1$

$a>0$ かつ $b\geqq -a$ のとき，$b<-2a+1$

$a>0$ かつ $b<-a$ のとき，$b>-1$

この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲は右図の網点部になる。ただし，境界は含まない。

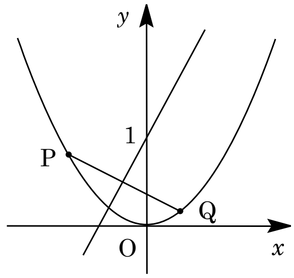


［解 説］

今年もまた出ましたという感のある 1 文字固定の最大・最小問題です。しかし，対象が 1 次関数のため，そんなに複雑ではありません。

７ ［2001 一橋大］

$p \neq q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ と直線 $y = ax + 1$ が直交することより，



$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} \cdot a = -1,\quad p + q = -\frac{1}{a} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，PQ の中点 $\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\right)$ が，直線 $y = ax + 1$ 上にあることより，

$$\frac{p^2 + q^2}{2} = a \cdot \frac{p+q}{2} + 1,\quad p^2 + q^2 = a(p+q) + 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①を②に代入すると，$p^2 + q^2 = 1 \cdots\cdots\cdots ③$

①③を満たす異なる p，q が存在する条件は，直線①と円③が 2 つの共有点を持つ条件に等しいので，

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}} < 1,\quad 1 < \sqrt{2}\,|a|$$

よって，$a < -\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}} < a$

［解 説］

線対称移動を題材にした問題です。後半の a の範囲を求めるところは，図をイメージしています。

8 ［2002 神戸大・文］

(1) $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ ……①より，$(1-t^2)x-2ty-1-t^2=0$ ……①′

円 C の中心を $(a,\ b)$，半径を r とすると，①′が接することより，

$$\frac{|(1-t^2)a-2tb-1-t^2|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r,\quad \frac{|(-a-1)t^2-2bt+a-1|}{\sqrt{1+2t^2+t^4}}=r$$

$$(-a-1)t^2-2bt+a-1=\pm r(1+t^2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②がどんな t に対しても成立する条件は,

$$-a-1=\pm r,\ -2b=0,\ a-1=\pm r$$

これより，$-a-1=a-1$ から $a=0$，また $b=0$ となり, $r>0$ から $r=1$ である。

よって，円 C の方程式は，$x^2+y^2=1$ である。

すると，①を $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x+\dfrac{-2t}{1+t^2}y=1$ と変形すると，接点の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$ となる。

(2) 接点を $(x,\ y)$ とおくと, (1)より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ……③，$y=\dfrac{-2t}{1+t^2}$ ……④

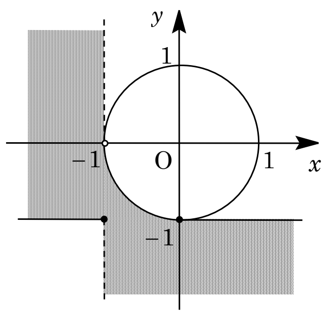
③より，$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ となり, $t\geqq 1$ で $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leqq 1$ より，$-1<x\leqq 0$ となる。

④より，$y=\dfrac{-2}{\frac{1}{t}+t}$ となり，$t\geqq 1$ で $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

（等号は $t=1$ のとき）より，$-1\leqq y<0$ である。

よって，接点は円 C 上の $-1<x\leqq 0$，$-1\leqq y<0$ の部分にある。

以上より，直線①の通過領域は右図の網点部となる。なお，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解 説］

直線の通過領域を求める有名問題です。(1)の誘導があるために，(2)はずいぶん解きやすくなっています。

9 ［2003 東京大・文］

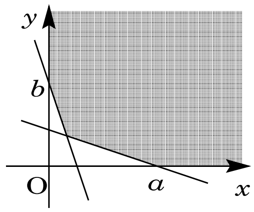
領域 $D: x+3y \geqq a$，$3x+y \geqq b$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ に対して，境界 $x+3y=a$ ……①，$3x+y=b$ ……②とおく。

すると，①と両軸との交点は $(a,\ 0)$ と $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$，②と両軸との交点は $\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$ と $(0,\ b)$ である。

(i)　$a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a \geqq \dfrac{b}{3},\ b \geqq \dfrac{a}{3}$ $\left(\dfrac{a}{3} \leqq b \leqq 3a\right)$ のとき

①と②の交点は，$x+3(b-3x)=a$，$x=\dfrac{-a+3b}{8}$

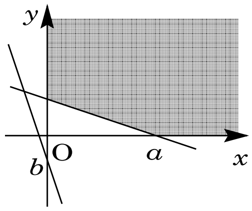
$$y=b-3\cdot\frac{-a+3b}{8}=\frac{3a-b}{8}$$



右図より，この交点 $\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{-a+3b}{8}+\frac{3a-b}{8}=\frac{a+b}{4}$$

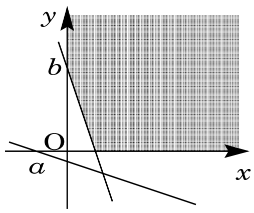
(ii)　$a \geqq 0,\ a \geqq \dfrac{b}{3},\ \dfrac{a}{3} \geqq b$ $\left(a \geqq 0,\ b \leqq \dfrac{a}{3}\right)$ のとき



右図より，点 $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{a}{3}$$

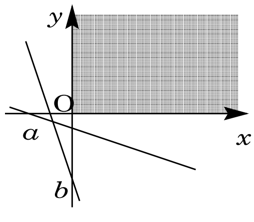
(iii)　$b \geqq 0,\ \dfrac{b}{3} \geqq a,\ b \geqq \dfrac{a}{3}$ $(b \geqq 0,\ b \geqq 3a)$ のとき



右図より，点 $\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{b}{3}$$

(iv)　$a \leqq 0,\ b \leqq 0$ のとき



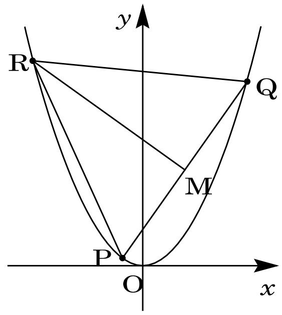
右図より，原点 $(0,\ 0)$ において，$x+y$ は最小となり，その最小値は，

$$x+y=0$$

［解 説］

場合分けの基準を確定するのに苦労します。2 つの境界線の交点の存在する位置だけでなく，それぞれの x 切片，y 切片の関係も考慮しなくてはいけません。なお，このように複雑になったときには，場合分けについて，ab 平面でチェックすると，ミスを防ぐことができます。

$\boxed{10}$ ［2004 東京大］



$p<q$ として，$P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2},\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$PQ=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ ………②

さて，線分 PQ の中点を M とすると，

$$M\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\right)$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，$p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$なので，

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\left(2-\frac{a^2}{3}\right)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$である。

ここで，$\triangle PQR$ は 1 辺の長さ a の正三角形より，

$$RM\perp PQ,\ RM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{OM}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので，

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp2a+a^2)$$

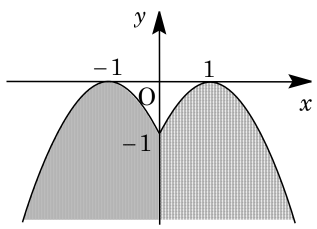
まとめると，$5a^2\mp18a=0$ となり，$a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

［解 説］

まず，回転を用いて考えましたが，計算がかなり複雑になってしまい，方向転換をした結果が上の解です。

11　　［2005 金沢大・文］

(1)　$A_1 : y \leqq -(x-1)^2$，$A_2 : y \leqq -(x+1)^2$ に対し，集合 $A = A_1 \cup A_2$ の表す領域は，右図の網点部となる。



さて，$B : y \geqq (x-a)^2 + b$ に対し，$a = 0$，$b = -1$ のときは，$B : y \geqq x^2 - 1$ である。

よって，$A \cap B$ の表す領域は，y 軸に関して対称となり，その面積 S は，

$$S = 2\int_0^1 \{ -(x-1)^2 - (x^2 - 1) \} dx = 2\int_0^1 (-2x^2 + 2x)\, dx = \frac{2}{3}$$

(2)　$A_1 \cap B \neq \phi$ であるとき，放物線 $y = -(x-1)^2$ と $y = (x-a)^2 + b$ は共有点をもち，

$$-(x-1)^2 = (x-a)^2 + b,\ \ 2x^2 - (2a+2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a+1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 + 2a - 1,\ \ b \leqq -\frac{1}{2}(a-1)^2 \cdots\cdots\cdots①$$

(3)　$A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ より，$A \cap B \neq \phi$ であることは，$A_1 \cap B \neq \phi$ または $A_2 \cap B \neq \phi$ であることと同値である。

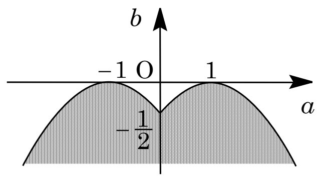
ここで，$A_2 \cap B \neq \phi$ という条件は，(2)と同様にして，

$$-(x+1)^2 = (x-a)^2 + b,\ \ 2x^2 - (2a-2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a-1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 - 2a - 1,\ \ b \leqq -\frac{1}{2}(a+1)^2 \cdots\cdots\cdots②$$

以上より，$A \cap B \neq \phi$ であるとき①または②が成立し，これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



［解　説］

集合と領域の融合問題です。(3)の題意は，少し把握しづらいですが，その点は，(2)の誘導によって少し緩和されています。

$\boxed{12}$ ［2005 一橋大］

(1) 放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつとき，$f(x)=g(x)$ は異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3},\ 3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①の判別式 $D/4=4a^2-3\left(\frac{5}{3}a^2-3\right)=-a^2+9>0$ から，$-3<a<3$ となる。

(2) $-3<a<3$ のとき，①の実数解は $x=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$ となる。これを $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，2 つの放物線によって囲まれる図形 C_a の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}-(x^2-3)\right\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{9-a^2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

(3) $y\leqq g(x)=-2(x-a)^2+\dfrac{a^2}{3}$ から，$y\leqq-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$

ここで，$h(a)=-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$ とおくと，$h(a)=-\dfrac{5}{3}\left(a-\dfrac{6}{5}x\right)^2+\dfrac{2}{5}x^2$

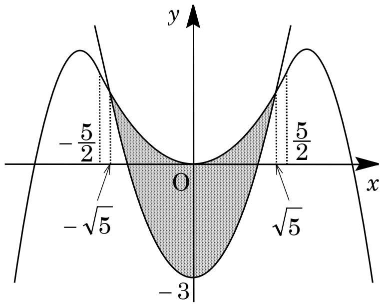
さて，$-3<a<3$ のとき，x を固定して，領域 $y\leqq g(x)$，すなわち $y\leqq h(a)$ の動く平面上の部分を考える。

(i) $\dfrac{6}{5}x\leqq-3\ \left(x\leqq-\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(-3)=-15-12x-2x^2$

(ii) $-3<\dfrac{6}{5}x<3\ \left(-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y\leqq h\left(\dfrac{6}{5}x\right)=\dfrac{2}{5}x^2$

(iii) $\dfrac{6}{5}x\geqq3\ \left(x\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(3)=-15+12x-2x^2$

(i)～(iii)の部分と，領域 $y\geqq f(x)$ を合わせると，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形が得られ，図示すると右図の網点部となる。



この面積は，

$$\int_{-\sqrt5}^{\sqrt5}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx$$

$$=-\frac{3}{5}\int_{-\sqrt5}^{\sqrt5}(x+\sqrt5)(x-\sqrt5)\,dx$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\sqrt5+\sqrt5)^3=4\sqrt5$$

［解 説］

(3)では，領域の動く部分を，x の値を固定して，y のとり得る値の範囲として求めました。そこまで，やることはなかったのですが。

$\boxed{13}$ ［2005 大阪大・理］

(1) 条件より，$x=t\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……①，$y=1-t^2+t\sin\dfrac{\pi}{4}=1-t^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……②

$y=0$ とすると，②から $1-t^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=0$ より，

$$\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0,\ (\sqrt{2}t+1)(t-\sqrt{2})=0$$

$x\geqq 0$ より $t\geqq 0$ なので，$t=\sqrt{2}$ となり，①から点 Q の x 座標は $x=1$ である。

(2) $x=t\cos\theta$ ……③，$y=1-t^2+t\sin\theta$ ……④に対して，

$t=0$ のとき，$(x,\ y)=(0,\ 1)$

$t\neq 0$ のとき，③④より $\cos\theta=\dfrac{x}{t}$，$\sin\theta=\dfrac{y-1+t^2}{t}$ から，

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y-1+t^2}{t}\right)^2=1,\ x^2+(y-1+t^2)^2=t^2 \text{ ………⑤}$$

⑤は $(x,\ y)=(0,\ 1)$ を満たしているので，$t=0$ のときも成り立つ。

さて，t が実数全体を動くとき，曲線⑤が通過する範囲は，⑤を t の方程式をしてみたとき，実数 t が存在する条件として求めることができる。

⑤から，$x^2+(y-1)^2+2(y-1)t^2+t^4=t^2$

$$t^4+(2y-3)t^2+x^2+(y-1)^2=0 \text{ ………⑥}$$

ここで，$u=t^2\geqq 0$ とおくと，⑥は $u^2+(2y-3)u+x^2+(y-1)^2=0$ ……⑦となり，2 次方程式⑦が，0 以上の解を少なくとも 1 つもつ条件となる。

そこで，$f(u)=u^2+(2y-3)u+x^2+(y-1)^2$ とおき，$f(0)=x^2+(y-1)^2\geqq 0$ に注意すると，

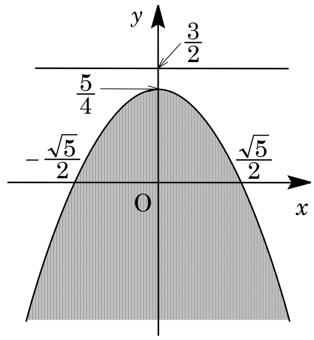
$$D=(2y-3)^2-4\{x^2+(y-1)^2\}\geqq 0 \text{ ………⑧}$$

$$u=-\frac{2y-3}{2}\geqq 0 \text{ ………⑨}$$

⑧から，$-4y-4x^2+5\geqq 0$，$y\leqq -x^2+\dfrac{5}{4}$

⑨から，$2y-3\leqq 0$，$y\leqq\dfrac{3}{2}$

以上まとめると，曲線 C が通過する範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(3) 点 Q の x 座標の最大値は，(2)より $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であり，③④より，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}=t\cos\theta \text{ ……⑩},\ 0=1-t^2+t\sin\theta \text{ ……⑪}$$

⑩より，$t=\dfrac{\sqrt{5}}{2\cos\theta}$ となり，⑪に代入すると，

$$1-\frac{5}{4\cos^2\theta}+\frac{\sqrt{5}\sin\theta}{2\cos\theta}=0,\ 1-\frac{5}{4}(1+\tan^2\theta)+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta=0$$

まとめると,

$$5\tan^2\theta - 2\sqrt{5}\tan\theta + 1 = 0,\ (\sqrt{5}\tan\theta - 1)^2 = 0$$

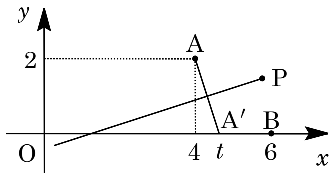
よって，$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である。

［解 説］

難易度が高いというわけではありませんが，それなりに時間のかかる問題です。(2)では，まずパラメータ θ を動かし，その後，パラメータ t を動かして通過領域を求めました。

14 　　[2006 名古屋大・理]

(1) ピッタリ直線 l は，線分 AA' の垂直二等分線より，



$PA=PA'$ となり，

$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2) ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点 $A'(t,\ 0)$ が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

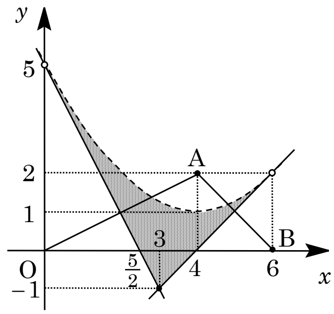
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③′

④より $q\geqq -2p+5$ ………④′，⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤′

さて，領域③′ の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③′ と領域④′ の境界線，領域③′ と領域⑤′ の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③′ ④′ ⑤′ より，点 $P(p,\ q)$ の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3) ①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，$A'_1(t_1,\ 0)$，$A'_2(t_2,\ 0)$ とする。

$$\overrightarrow{AA'_1}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{AA'_2}=(t_2-4,\ -2)$$

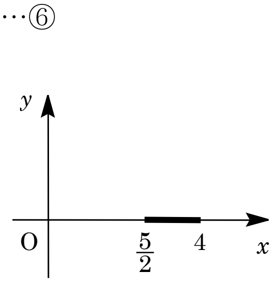
2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{AA'_1}\cdot\overrightarrow{AA'_2}=0$ となり，

$(t_1-4)(t_2-4)+4=0$，$t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0$ ………⑥

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$t_1+t_2=2p$，$t_1t_2=8p+4q-20$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$



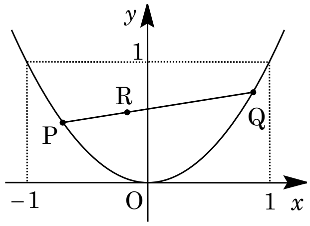
よって，$q=0$ となり，点 $P(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。

［解 説］

線対称を題材にした問題で，ひとひねりが加えられています。

15 [2007 東京大・理]

(1) $P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)$ とおき，線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R の動く範囲 D に点 $(a,\ b)$ が属することより，



$$a=\frac{2p+q}{3}\cdots\cdots\cdots①,\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q=3a-2p\cdots\cdots③$となり，②に代入すると，

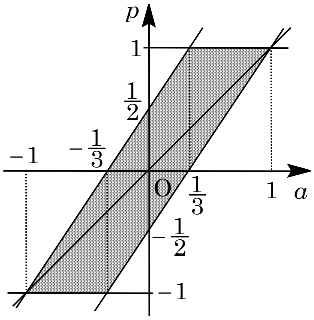
よって，$2p^2+(3a-2p)^2=3b$

$$b=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p)=2(p-a)^2+a^2$ とおき，$-1\leqq p\leqq 1\cdots\cdots④$，$-1\leqq q\leqq 1\cdots\cdots⑤$ のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$ となり，

$$\frac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\frac{3a+1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1\leqq a\leqq 1$から，$f(p)$は最小値$f(a)=a^2$をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\quad f(1)=3a^2-4a+2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより，aの値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると，

(i) $-1\leqq a\leqq -\frac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(-1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

(ii) $-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a-1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

(iii) $0\leqq a\leqq\frac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a+1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$のとき

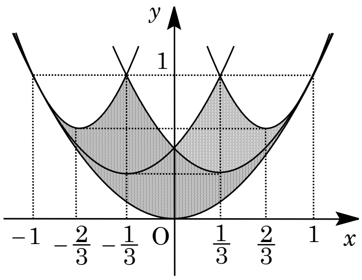
$f(a)\leqq f(p)\leqq f(1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2$

(2) $a<-1$，$1<a$のときは，右上図より，④⑥を満たすpは存在しない。

よって，(1)から，Dを表す不等式は，

$$x^2\leqq y\leqq 3x^2+4x+2\ \left(-1\leqq x\leqq -\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$
$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2\left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$



以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。

［解 説］

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。