

2021 入試対策
2次数学ランダムマーク

図形と計量

文系+理系

1998 - 2020

外林 康治 編著

電送数学舎

図形と計量

【問題一覧】

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 xyz 空間に 3 点 $A(1, 0, 0)$, $B(-1, 0, 0)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$ をとる。△ABC を 1 つの面とし、 $z \geq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる。さらに△ABD を 1 つの面とし、点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる。

(1) 点 E の座標を求めよ。

(2) 正四面体 ABDE の $y \leq 0$ の部分の体積を求めよ。 [1998 東京大・文]

2 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし、高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C, 底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1) 直円錐の展開図を用いて、 l の長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して、線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。 $\angle AOQ = \theta$ とし CP^2 を $\sin \theta$ で表せ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし、A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ の範囲で $\frac{OS^2}{OR^2}$ の最大値を求めよ。 [1999 九州大]

3 四面体 OAPQ において、 $|\overrightarrow{OA}| = 1$, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OQ}$ で、 $\angle PAQ = 30^\circ$ である。

(1) △APQ の面積 S を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{OP}|$ のとりうる範囲を求めよ。

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ。 [2001 一橋大]

4 原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき、この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。 [2001 岡山大・理]

5 頂点が z 軸上にあり、底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が、原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1) 円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2) 円錐の体積の最小値を求めよ。 [2002 一橋大]

6 四角形 ABCD が、半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で、辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき、残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。 [2006 東京大・文]

7 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に, それぞれ点 P, Q, R, S を, $\angle APB = \angle QPC$, $\angle PQC = \angle RQD$, $\angle QRD = \angle SRA$ となるようにとる。ただし, 点 P, Q, R, S は, どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。
 (2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。 $f(t)$ の最大値を求めよ。 [2006 大阪大・理]

8 方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円 C を考える。

- (1) 点 A $(-\sqrt{2}, 0)$ と O $(0, 0)$ を通り中心の座標が $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ および $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$ である 2 つの円は, どちらも円 C に接することを示せ。
 (2) 点 P が円 C 上を動くとき, $\cos \angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。

[2007 北海道大・文]

9 地球上の北緯 60° 東経 135° の地点を A, 北緯 60° 東経 75° の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1, R_2 を考える。 R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。 R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。 R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとす, 飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば, 三角関数表を用いよ。

注: 大円とは, 球を球の中心を通る平面で切ったとき, その切り口にできる円のことである。

[2008 京都大・理]

10 平面上で, 鋭角三角形 $\triangle OAB$ を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を $\triangle OBC$, $\triangle OBC$ を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を $\triangle OCD$, $\triangle OCD$ を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を $\triangle ODE$ とする。 $\triangle OAB$ と $\triangle OBE$ の面積比が 2 : 3 のとき, $\sin \angle AOB$ の値を求めよ。

[2009 京都大・文]

11 xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり、線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は $(1, 2)$ で、線分 OA と OD の長さは等しく、四角形 $ABCD$ は円に内接している。 $\angle AOD = \theta$ とおき、点 C の x 座標を a 、四角形 $ABCD$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また、線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。
- (2) S を a と θ を用いた式で表せ。
- (3) $\theta = \frac{\pi}{6}$ とし、 $20 \leq S \leq 40$ とするとき、 a のとりうる値の最大値を求めよ。

[2011 神戸大・文]

12 平面上の 4 点 O, A, B, C が、 $OA = 4$ 、 $OB = 3$ 、 $OC = 2$ 、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$ を満たすとき、 $\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ。

[2013 一橋大]

13 鋭角三角形 $\triangle ABC$ について、 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の大きさを、それぞれ A, B, C とする。 $\triangle ABC$ の重心を G 、外心を O とし、外接円の半径を R とする。

- (1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を、それぞれ AD, OE とする。このとき、 $AD = 2R \sin B \sin C$ 、 $OE = R \cos A$ を証明せよ。
- (2) G と O が一致するならば、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ。
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとし、さらに OG が BC と平行であるとする。このとき、 $AD = 3OE$ 、 $\tan B \tan C = 3$ を証明せよ。

[2014 九州大・文]

14 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

- (a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である。
- (b) 半径 1 の円が内接する。ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

[2015 京都大]

15 $t > 0$ を実数とする。座標平面において、3 点 $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
- (2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。 t が(1)で求めた範囲を動くとき、三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

[2015 東北大]

16 四面体 $OABC$ が次の条件を満たすならば、それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし、四面体のある頂点の対面とは、その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016 京大・理]

17 α は $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、四角形 $ABCD$ に関する次の 2 つの条件を考える。

(i) 四角形 $ABCD$ は半径 1 の円に内接する。

(ii) $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで、4 辺の長さの積 $k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$ が最大となるものについて、 k の値を求めよ。 [2018 京大・理]

18 三角形 ABC の内接円の半径を r 、外接円の半径を R とし、 $h = \frac{r}{R}$ とする。また、

$\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ とおく。

(1) $h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。 [2018 東北大・理]

19 三角形 ABC は $AB + AC = 2BC$ を満たしている。また、角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 $AD = 15$ である。さらに、三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \angle BAD$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また、 $A = \angle BAC$ とするとき、 $\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。 [2019 千葉大・理]

- 20** (1) $h > 0$ とする。座標平面上の点 $O(0, 0)$, 点 $P(h, s)$, 点 $Q(h, t)$ に対して、三角形 OPQ の面積を S とする。ただし、 $s < t$ とする。三角形 OPQ の辺 OP , OQ , PQ の長さをそれぞれ p, q, r とするとき、不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成立するときの s, t の値を求めよ。

- (2) 四面体 $ABCD$ の表面積を T , 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし、辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ l, m, n とする。このとき、不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成立するのは四面体 $ABCD$ がどのような四面体のときか答えよ。

[2019 東京工大]

- 21** 平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき、それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle PQR$ で表す。また、 P, Q, R が同一直線上にあるときは、 $\triangle PQR = 0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし、 $\triangle ABC = 1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leq 3$$

を満たしながら動くとき、 X の動きうる範囲の面積を求めよ。

[2020 東京大・理]

図形と計量

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 東京大・文]

(1) $\triangle ABC$ の重心 $G_1(0, \frac{1}{3}\sqrt{3}, 0)$

$$DG_1 = \sqrt{OD^2 - OG_1^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

よって、 $D(0, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{6})$ となる。

すると、 $\triangle ABD$ の重心 $G_2(0, \frac{1}{9}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{6})$

$\overrightarrow{G_2E} = -\overrightarrow{G_2C}$ から、

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{G_2C}$$

$$= (0, \frac{1}{9}\sqrt{3}, \frac{2}{9}\sqrt{6}) - (0, \frac{8}{9}\sqrt{3}, -\frac{2}{9}\sqrt{6}) = (0, -\frac{7}{9}\sqrt{3}, \frac{4}{9}\sqrt{6})$$

以上より、 $E(0, -\frac{7}{9}\sqrt{3}, \frac{4}{9}\sqrt{6})$

(2) 線分 DE と z 軸との交点を F とすると、

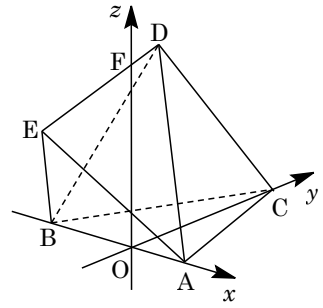
$$EF : FD = \frac{7}{9}\sqrt{3} : \frac{1}{3}\sqrt{3} = 7 : 3$$

正四面体 $ABDE$ の体積を V_0 とすると、

$$V_0 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ\right) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

求める正四面体 $ABDE$ の $y \leq 0$ の部分の体積 V は、

$$V = \frac{7}{10}V_0 = \frac{7}{15}\sqrt{2}$$



[解説]

合同な正四面体を 2 つ合わせた立体についての設問です。(1)の E の座標を求めるにはいろいろな方法がありますが、 $\triangle AED$ の重心に注目するのが、計算量が一番少なくてすむでしょう。(2)も体積ということで一瞬構えてしまいますが、内容的には簡単です。

2

[1999 九州大]

- (1) 母線 AC の長さは $\sqrt{1+3} = 2$ となるので、側面の展開図の中心角を φ とすると、

$$2\pi \cdot 1 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} \text{ より, } \varphi = 180^\circ$$

線分 AB は底面の直径なので、 $\angle ACB = 90^\circ$

よって、 l の長さは展開図で $AB = 2\sqrt{2}$ となる。

- (2) 弧 AQ の長さは、底面では $2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\theta}{360^\circ}$ であるが、側面の展

開図では $2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\angle ACQ}{360^\circ}$ と表せるので、 $\angle ACQ = \frac{\theta}{2}$

$\triangle APC$ に正弦定理を適用すると、 $\angle CAP = 45^\circ$ から、

$$\frac{CP}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin\left(135^\circ - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$CP = \frac{2 \sin 45^\circ}{\sin\left(135^\circ - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{よって, } CP^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{4}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{4}{1 + \sin \theta}$$

- (3) $\triangle COQ$ について考えると、 $\frac{OR}{OQ} = \frac{CP}{CQ}$ から、

$$OR = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{1 + \sin \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \theta}} \text{ より, } OR^2 = \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

次に底面について、 $OS = OA \cos \theta = \cos \theta$ より $OS^2 = \cos^2 \theta$

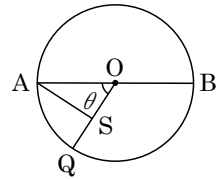
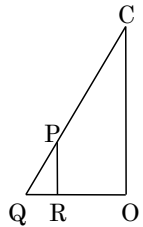
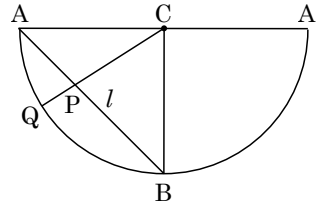
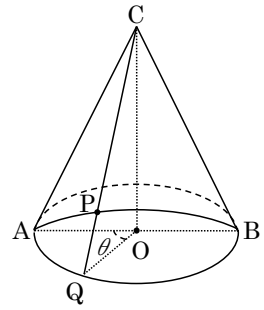
$$\text{よって, } \frac{OS^2}{OR^2} = \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) = (1 - \sin^2 \theta)(1 + \sin \theta)$$

$\sin \theta = t$ とおくと、 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ より $0 < t \leq 1$

このとき、 $f(t) = (1 - t^2)(1 + t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2t(1+t) + (1-t^2) \\ &= -(3t-1)(t+1) \end{aligned}$$

$f(t)$ は $t = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{32}{27}$ をとる。すなわち $\frac{OS^2}{OR^2}$ の最大値は $\frac{32}{27}$ である。



t	0	...	$\frac{1}{3}$...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	

[解説]

断面図や展開図を書かないと、位置関係がとらえきれない問題です。

3

[2001 一橋大]

(1) $|\overrightarrow{OP}| = p$, $|\overrightarrow{OQ}| = q$ とおくと、条件より、

$$AP = \sqrt{p^2 + 1}, \quad AQ = \sqrt{q^2 + 1}, \quad PQ = \sqrt{p^2 + q^2}$$

ここで、 $\triangle APQ$ に余弦定理を適用して、

$$p^2 + q^2 = (p^2 + 1) + (q^2 + 1) - 2\sqrt{p^2 + 1}\sqrt{q^2 + 1} \cos 30^\circ$$

$$\sqrt{p^2 + 1}\sqrt{q^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{より, } S = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1} \sqrt{q^2 + 1} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(2) $\textcircled{1}$ より、 $(p^2 + 1)(q^2 + 1) = \frac{4}{3}$, $q^2 = \frac{4}{3(p^2 + 1)} - 1 = \frac{1 - 3p^2}{3(p^2 + 1)} \dots\dots\dots \textcircled{2}$ $q > 0$ より $q^2 > 0$ なので、 $1 - 3p^2 > 0$ $p > 0$ と合わせて、 $0 < p < \frac{1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots \textcircled{3}$ (3) $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p\right) \cdot q = \frac{1}{6} pq$ となるので、

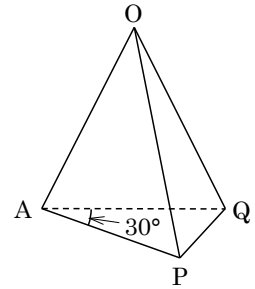
$$\textcircled{2} \text{より, } p^2 q^2 = \frac{p^2 - 3p^4}{3(p^2 + 1)} = -p^2 + \frac{4}{3} + \frac{-4}{3p^2 + 3} = -\left(p^2 + 1 + \frac{4}{3p^2 + 3}\right) + \frac{7}{3}$$

ここで、相加平均と相乗平均の関係から、

$$p^2 + 1 + \frac{4}{3p^2 + 3} \geq 2\sqrt{(p^2 + 1) \cdot \frac{4}{3p^2 + 3}} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

等号が成立するのは、 $p^2 + 1 = \frac{4}{3p^2 + 3}$, $(p^2 + 1)^2 = \frac{4}{3}$, すなわち $p^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ のときであるが、この値は $\textcircled{3}$ を満たす。すると、 $p^2 q^2 \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{3} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{3}$ となり、

$$pq \leq \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{7 - 2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$

以上より、 V の最大値は $\frac{1}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{3} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{18}$ である。

[解説]

最大・最小問題に分数式が絡んでくると、相加平均・相乗平均の出番です。というのも、微分は範囲外ですので。

4

[2001 岡山大・理]

正三角形 ABC に対して $A(\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと、対称性から $0 \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ の場合だけを考えても一般性を失わない。

(i) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$\triangle OAD$ において、 $\angle ADO = \pi - \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{6}\pi - \theta$

$$\frac{OD}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)}$$

$$OD = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta}$$

$\triangle OAE$ において、 $\angle OEA = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{3}\pi + \theta$ より、

$$\frac{OE}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \theta\right)}, \quad OE = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \theta\right)} = \frac{1}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta}$$

$\triangle ABC$ の第1象限にある部分の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OD \sin \theta + \frac{1}{2} OE \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sqrt{3} \sin^2 \theta + 4 \sin \theta \cos \theta + \sqrt{3} \cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} \sin 2\theta + 1}{2 \sin 2\theta + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4(2 \sin 2\theta + \sqrt{3})} \end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ なので、 $0 \leq \sin 2\theta \leq 1$ となる。

よって、 $\sin 2\theta = 1$ のとき最大値 $S = \frac{\sqrt{3} + 1}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ 、 $\sin 2\theta = 0$ のとき最小値

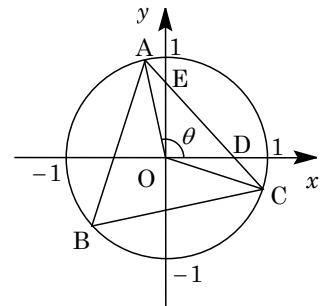
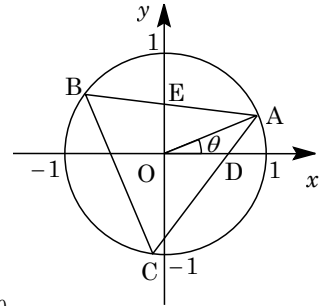
$S = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ をとる。

(ii) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ のとき

$\triangle OCD$ において、 $\angle ODC = \pi - \frac{\pi}{6} - \left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right) = \frac{\pi}{6} + \theta$

$$\frac{OD}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)}$$

$$OD = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta}$$



$\triangle OAE$ において、 $\angle OEA = \pi - \frac{\pi}{6} - (\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{3}\pi - \theta$ より、

$$\frac{OE}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin(\frac{4}{3}\pi - \theta)}, \quad OE = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\sin(\frac{4}{3}\pi - \theta)} = \frac{1}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta}$$

$\triangle ABC$ の第 1 象限にある部分の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OD \cdot OE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - 4 \sin \theta \cos \theta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin 2\theta + \sqrt{3} \cos 2\theta} \\ &= -\frac{1}{4 \sin(2\theta + \frac{\pi}{3})} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{2}{3}\pi$ より $\frac{4}{3}\pi \leq 2\theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5}{3}\pi$ なので、 $-1 \leq \sin(2\theta + \frac{\pi}{3}) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

よって、 $\sin(2\theta + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $S = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 、 $\sin(2\theta + \frac{\pi}{3}) = -1$ のとき最小値 $S = \frac{1}{4}$ をとる。

(i)(ii)より、 S は最大値 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 、最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

[解説]

よくありそうな問題です。内容的には正弦定理の応用ですが、意外に奥が深いという感じがします。

5

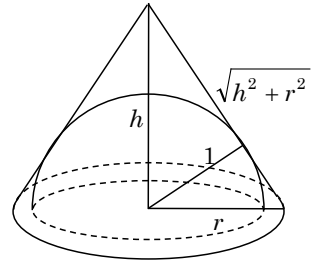
[2002 一橋大]

- (1) 円錐の底面の半径を r 、高さを h とすると、母線の長さは $\sqrt{h^2 + r^2}$ となる。

このとき、右図の断面に注目して、

$$1 : r = h : \sqrt{h^2 + r^2}, \quad \sqrt{h^2 + r^2} = rh$$

$$h^2 + r^2 = r^2 h^2, \quad r^2 = \frac{h^2}{h^2 - 1}$$



ここで、円錐の表面積を S とすると、

$$S = \pi r^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi r^2 + \pi^2 h = \pi(1+h)r^2$$

$$= \pi(1+h) \cdot \frac{h^2}{h^2 - 1} = \pi \cdot \frac{h^2}{h-1} = \pi \cdot \frac{1}{\frac{1}{h} - \frac{1}{h^2}}$$

ここで、 $\frac{1}{h} = t$ とおくと、 $h > 1$ より $0 < t < 1$ となり、さらに $f(t) = t - t^2$ とすると、

$$S = \frac{\pi}{f(t)} \text{ である。}$$

$$f(t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \text{ より、} S \geq 4\pi \text{ となり、} S \text{ の最小値は } 4\pi \text{ である。}$$

- (2) 円錐の体積を V とすると、

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{h^3}{h^2 - 1} = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{1}{\frac{1}{h} - \frac{1}{h^3}}$$

$$(1) \text{ と同様にして、} g(t) = t - t^3 \text{ とおくと、} V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{g(t)}$$

$$g'(t) = 1 - 3t^2$$

右表より、 $g(t) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ となる。これより、

$$V \geq \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \text{ となり、} V \text{ の最小値は } \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \text{ である。}$$

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

[解説]

S の最小値は相加平均と相乗平均の関係を用いて求められましたが、 V の最小値についてはうまくいきません。そこで、考え直して作ったのが上の解です。

6

[2006 東京大・文]

△BCDにおいて、正弦定理より、

$$\frac{BD}{\sin C} = 2 \times \frac{65}{8}, \quad BD = \frac{65}{4} \sin C \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、余弦定理より、

$$\begin{aligned} BD^2 &= 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos C \\ &= 2 \cdot 13^2 (1 - \cos C) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より}, \quad \frac{65^2}{4^2} \sin^2 C = 2 \cdot 13^2 (1 - \cos C)$$

$$5^2 \cdot 13^2 (1 + \cos C)(1 - \cos C) = 2 \cdot 13^2 \cdot 4^2 (1 - \cos C)$$

$$1 - \cos C > 0 \text{より}, \quad 25(1 + \cos C) = 32, \quad \cos C = \frac{7}{25} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より}, \quad BD^2 = 2 \times 13^2 \times \frac{18}{25}, \quad BD = \frac{6 \times 13}{5} = \frac{78}{5}$$

ここで、 $AB = x$ 、 $DA = y$ とおくと、条件より、

$$x + y = 44 - 13 \times 2, \quad x + y = 18 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

△ABDに余弦定理を適用して、 $\frac{78^2}{25} = x^2 + y^2 - 2xy \cos(180^\circ - C)$

$$\frac{6^2 \times 13^2}{25} = (x + y)^2 - 2xy + 2xy \cos C$$

$$\textcircled{3} \text{より}, \quad \frac{6^2 \times 13^2}{25} = (x + y)^2 - \frac{36}{25} xy, \quad 6^2 \times 13^2 = 25(x + y)^2 - 36xy \cdots \cdots \textcircled{5}$$

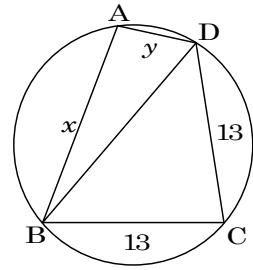
$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{より}, \quad 36xy = -6^2 \times 13^2 + 5^2 \times 18^2, \quad 36xy = (78 + 90)(-78 + 90)$$

$$xy = \frac{168 \times 12}{36} = 56 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

④⑥より、 x, y は方程式 $t^2 - 18t + 56 = 0$ の2つの解となるので、

$$(t - 4)(t - 14) = 0, \quad t = 4, 14$$

よって、 $(AB, DA) = (4, 14), (14, 4)$



[解説]

センター試験でよく見かける構図の問題ですが、いろいろな考え方が浮かび、方針の決めにくい良問です。また、計算にも工夫が必要です。

7

[2006 大阪大・理]

- (1) 右図のように、正方形 $ABCD$ を辺 BC , CD , DA に関して、順に折り返していく。すると、条件より、折れ線 $APQRS$ は1本の直線になる。

さて、点 S が辺 AB 上にあるとき、点 P , Q , R は、それぞれ辺 BC , CD , DA 上に存在する。

ここで、点 S が点 A と一致するとき $BP=1$ 、点 S が点 B と一致するとき $BP=\frac{2}{3}$ となり、求める条件は、

$BP=t$ から $\frac{2}{3}<t<1$ である。

- (2) まず、 $\angle BAP=\theta$ とおくと、 $\tan\theta=t$ となる。

そこで、 $\angle CQP=\angle DQR=\angle ASR=\theta$ から、

$$CP=1-t, \quad CQ=\frac{1-t}{\tan\theta}=\frac{1-t}{t}$$

$$DQ=1-\frac{1-t}{t}=\frac{2t-1}{t}, \quad DR=\frac{2t-1}{t}\tan\theta=2t-1, \quad AR=1-(2t-1)=2-2t$$

$$\text{これより、}\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot t=\frac{t}{2}, \quad \triangle PCQ=\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1-t}{t}=\frac{(1-t)^2}{2t}$$

$$\triangle QDR=\frac{1}{2}(2t-1)\cdot\frac{2t-1}{t}=\frac{(2t-1)^2}{2t}$$

また、 RS と AP の交点を T とするとき、 $\angle TAS=\angle TSA=\theta$ から、 $\triangle TAS$ は二等辺三角形となり、 T から AR への垂線の長さは、 AS の $\frac{1}{2}$ であるので、

$$AS=\frac{2-2t}{\tan\theta}=\frac{2-2t}{t}, \quad \triangle RAT=\frac{1}{2}(2-2t)\cdot\frac{2-2t}{2t}=\frac{(1-t)^2}{t}$$

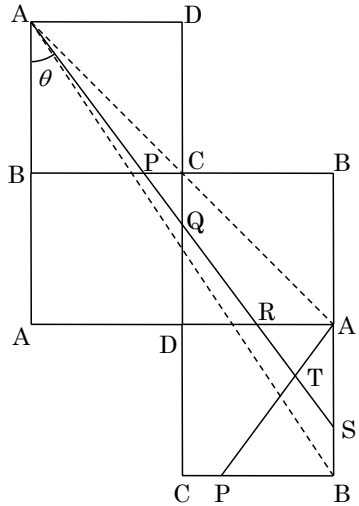
したがって、四角形 $PQRT$ の面積 $f(t)$ は、

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - \frac{t}{2} - \frac{(1-t)^2}{2t} - \frac{(2t-1)^2}{2t} - \frac{(1-t)^2}{t} = 1 - \frac{t^2 + 3(1-t)^2 + (2t-1)^2}{2t} \\ &= 1 - \frac{4t^2 - 5t + 2}{t} = \frac{-4t^2 + 6t - 2}{t} = 6 - \left(4t + \frac{2}{t}\right) \end{aligned}$$

ここで、相加平均と相乗平均の関係より、 $4t + \frac{2}{t} \geq 2\sqrt{4t \cdot \frac{2}{t}} = 4\sqrt{2}$

等号成立は $4t = \frac{2}{t}$ のときであり、 $\frac{2}{3} < t < 1$ から $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ の場合となる。

以上より、 $f(t)$ の最大値は $6 - 4\sqrt{2}$ である。



[解 説]

有名な反射の問題です。上の解のように折り返しを利用するのが常套手段です。なお、平行四辺形 $PQRT$ の面積は、まわりの三角形を除く方針で計算しています。