２０２１ 入試対策
２次数学ランドマーク

確　　率

文系＋理系

１９９８ － ２０２０

外林 康治　編著

電送数学舎

確　　率

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 A, B の二人があるゲームを独立にくり返し行う。1 回ごとのゲームで A, B の勝つ確率はそれぞれ $\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{3}$ であるとする。（ただし，このゲームは A と B が対戦するゲームである）

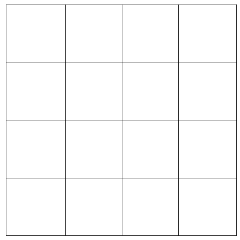
(1) 先に 3 回勝った者を優勝とするとき, A の優勝する確率 p を求めよ。

(2) 一方の勝った回数が他方の勝った回数より 2 回多くなった時点で勝った回数の多い者を優勝とするとき, $2n$ 回目までに A の優勝する確率 q_n を求めよ。

(3) p と q_n の大小を比較せよ。

［1998 一橋大］

2 一辺の長さが 4 の正方形の紙の表を，図のように一辺の長さが 1 のマス目 16 個に区切る。その紙を 2 枚用意し，A と B の 2 人に渡す。A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと，両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても，塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし，2 枚の紙を重ね合わせるときには，それぞれの紙を回転させてもよいが，紙の四隅は合わせることとする。



［1999 大阪大・理］

3 箱 A，箱 B のそれぞれに赤玉が 1 個，白玉が 3 個，合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤玉が 1 個，白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。

［1999 一橋大］

4 1 個のサイコロを n 回投げる。

(1) $n \geqq 2$ のとき，1 の目が少なくとも 1 回出て，かつ 2 の目も少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき，1 の目が少なくとも 2 回出て，かつ 2 の目が少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

［2000 一橋大］

5 半径 1 の円周上に，$4n$ 個の点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} が，反時計回りに等間隔に並んでいるとする。ただし，n は自然数である。

(1) 線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ。

(2) 点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} のうちの相異なる 3 点を頂点にもつ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ。

［2001 大阪大・理］

6 コインを投げる試行の結果によって, 数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし, 上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち, $a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。 ［2001 東京大・文］

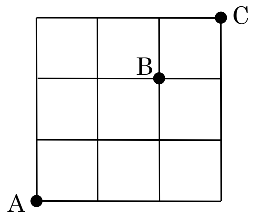
7 箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う。このとき, はじめから j 回目 $(j=1,\ \cdots,\ k)$ までに取り出したカードの番号の和を X_j とし, $X_1,\ \cdots,\ X_k$ のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする。

(1) $N \geqq 3$ のとき $P_N(1)$, $P_N(2)$, $P_N(3)$ を N で表せ。

(2) $P_3(4)$, $P_3(5)$ を求めよ。

(3) $k \leqq N$ のとき, $P_N(k)$ を N と k で表せ。 ［2001 東京工大］

8 右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し, サイコロを繰り返し振り, 次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画, 2 の目が出たら右に 1 区画, 3 の目が出たら上に 1 区画進み, その他の場合はそのまま動かない。ただし, 右端で 1 または 2 の目が出たとき, あるいは上端で 3 の目が出たときは, 動かない。また, 右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは, 右端まで進んで止まる。



n を 8 以上の自然数とする。A 地点から出発し, サイコロを n 回振るとき, ちょうど 6 回目に, B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり, n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし, サイコロのどの目が出るのも, 同様に確からしいものとする。 ［2002 東北大・理］

9 1が書かれたカードが2枚, 2が書かれたカードが2枚, …, nが書かれたカードが2枚の合計$2n$枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1枚ずつ左から順に並べる。このとき, カードに書かれている数の列を, a_1, a_2, …, a_{2n}とする。$a_k \geqq a_{k+1}$ $(1 \leqq k < 2n)$となる最小のkをXとする。

(1) $X=1$となる確率を求めよ。

(2) $X=n$となる確率を求めよ。

(3) mは$1 \leqq m < n$を満たす整数とする。$X \geqq m$となる確率を求めよ。 ［2003 一橋大］

10 さいころを振り, 出た目の数で17を割った余りをX_1とする。ただし, 1で割った余りは0である。

さらにさいころを振り, 出た目の数でX_1を割った余りをX_2とする。以下同様にして, X_nが決まればさいころを振り, 出た目の数でX_nを割った余りをX_{n+1}とする。

このようにして, X_n, $n=1$, 2, …を定める。

(1) $X_3=0$となる確率を求めよ。

(2) 各nに対し, $X_n=5$となる確率を求めよ。

(3) 各nに対し, $X_n=1$となる確率を求めよ。

注意：さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする。 ［2003 東京大・文］

11 サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし, 8をゴールとしてちょうど8の位置へ移動したときにゲームを終了し, 8をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば, 7の位置で3が出た場合, 8から2戻って6へ移動する。なお, サイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて, サイコロをn回投げ終えたときに8へ移動してゲームを終了する確率をp_nとおく。

(1) p_2を求めよ。

(2) p_3を求めよ。

(3) 4以上のすべてのnに対してp_nを求めよ。 ［2004 名古屋大・理］

12 片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。 ［2004 東京大・理］

13 1 から 6 の番号のつけられた 6 個の箱に，それぞれ 3 枚ずつの皿が重ねて置かれている。白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ 1 個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする。2 つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない。2 つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿 1 枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す。

(1) サイコロを 3 回振るとき，皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなる確率を求めよ。

(2) サイコロを 3 回振るとき，皿が 3 枚の箱が 2 個，5 枚の箱，4 枚の箱，2 枚の箱，1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率を求めよ。 ［2005 東北大・文］

14 1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし，$n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする。この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号を大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ。 ［2005 京都大・文］

15 先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n \geqq 2$ とする。各車両を赤色，青色，黄色のいずれか 1 色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。 ［2005 京都大・理］

16 コンピュータの画面に，記号〇と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号〇が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号〇が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) P_3 を p で表せ。

(3) $n \geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。 [2006 東京大・文]

17 正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n \geqq 1)$ で表す。$q_n = p_n(1) + p_n(6)$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ とおく。

(1) q_1，q_2 を求めよ。

(2) q_n を q_{n-1} で表し，q_n を求めよ。

(3) $p_n(1)$ を求めよ。 [2006 名古屋大・文]

18 数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1，a_2，…，a_n を考える。

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし，$j = 1,\ 2,\ 3$ とする。

(i) $A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ。

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ で表し，$A_n(3)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。 [2007 北海道大・文]

19 表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R) ① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率を求めよ。

(2) (1)で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

［2007 東京大］

20 白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき, 次の操作(A)を考える。

(A) 手もちの 4 枚の中から 1 枚を, 等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し, それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは, 白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1), (2)に答えよ。

(1) 操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2) 操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

［2008 東京大・文］

21 n 枚のカードを積んだ山があり, 各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geqq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では, 一番上のカードを取り, 山の一番上にもどすか, あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。n 回の試行を終えたとき, 最初一番下にあったカード(番号 n)が山の一番上にきている確率を求めよ。

［2009 京都大・理］

22 はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える。この操作を n 回($n=1, 2, 3, \cdots$)くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれa_n, b_n, c_nとおく。

(1) a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2を求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}をa_n, b_n, c_nで表せ。

(3) n が奇数ならば$a_n=b_n>c_n$が成り立ち, n が偶数ならば$a_n>b_n=c_n$が成り立つことを示せ。

(4) b_nを求めよ。 ［2010 名古屋大・文］

23 数字の 2 を書いた玉が 1 個, 数字の 1 を書いた玉が 3 個, 数字の 0 を書いた玉が 4 個あり, これら合計 8 個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて, この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し, 取り出した玉は袋に戻さないものとする。

(1) 玉を 2 度取り出すとき, 取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ。

(2) 玉を 4 度取り出すとき, 取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ。

(3) 玉を 8 度取り出すとき, 次の条件が満たされる確率を求めよ。
条件：すべての$n=1, 2, \cdots, 8$に対して, 1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。 ［2011 名古屋大・文］

24 $k+1$ 個 ($k\geqq1$) の部屋A_0, A_1, A_2, $\cdots$, A_kがある。千葉君はある部屋から, その部屋以外の部屋を等しい確率$\dfrac{1}{k}$で 1 つ選び, そこへ移動する。最初, 部屋A_0にいた千葉君が, n 回 ($n\geqq1$) 部屋を移動した後に部屋A_1にいる確率を求めよ。

［2011 千葉大・理］

25 AとBの2人が, 1個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1回目はAが投げる。

1, 2, 3の目が出たら, 次の回には同じ人が投げる。

4, 5の目が出たら, 次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら, 投げた人を勝ちとし, それ以降は投げない。

(1) n回目にAがサイコロを投げる確率a_nを求めよ。

(2) ちょうどn回目のサイコロ投げでAが勝つ確率p_nを求めよ。

(3) n回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率q_nを求めよ。 [2011 一橋大]

26 さいころをn回$(n \geqq 2)$投げ, k回目$(1 \leqq k \leqq n)$に出る目をX_kとする。

(1) 積X_1X_2が18以下である確率を求めよ。

(2) 積$X_1X_2 \cdots X_n$が偶数である確率を求めよ。

(3) 積$X_1X_2 \cdots X_n$が4の倍数である確率を求めよ。

(4) 積$X_1X_2 \cdots X_n$を3で割ったときの余りが1である確率を求めよ。

[2012 千葉大・医]

27 nを2以上の整数とする。1からnまでの整数が1つずつ書かれているn枚のカードがある。ただし, 異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。このn枚のカードから, 1枚のカードを無作為に取り出して, 書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を3回繰り返し, 取り出したカードに書かれた整数の最小値をX, 最大値をYとする。次の問いに答えよ。ただし, jとkは正の整数で, $j+k \leqq n$を満たすとする。また, sは$n-1$以下の正の整数とする。

(1) $X \geqq j$かつ$Y \leqq j+k$となる確率を求めよ。

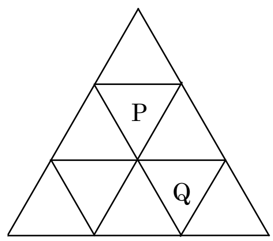
(2) $X=j$かつ$Y=j+k$となる確率を求めよ。

(3) $Y-X=s$となる確率を$P(s)$とする。$P(s)$を求めよ。

(4) nが偶数のとき, $P(s)$を最大にするsを求めよ。 [2012 名古屋大]

28 図のように, 正三角形を9つの部屋に辺で区切り, 部屋P, Qを定める。1つの球が部屋Pを出発し, 1秒ごとに, そのままその部屋にとどまることなく, 辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球がn秒後に部屋Qにある確率を求めよ。

[2012 東京大]



29 サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1) s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2) s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3) s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。 ［2013 一橋大］

30 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。 ［2014 東北大］

31 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases}\text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する}\\ \text{石が点}\,k\ (k=2,\ 3,\ 4)\,\text{にあるならば，確率}\,\dfrac{1}{2}\,\text{で点}\,k-1\,\text{に，確率}\,\dfrac{1}{2}\,\text{で点}\,k+1\,\text{に}\\ \text{移動する}\\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で点 4 に移動する}\end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。また，石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$) にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回 ($n\geqq 1$) 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。 ［2015 名古屋大・理］

32 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って, AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B, 5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

［2015 東京大・文］

33 n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2) 1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3) $n=5$のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

［2016 信州大・医］

34 A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a) 1 試合目で A と B が対戦する。

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

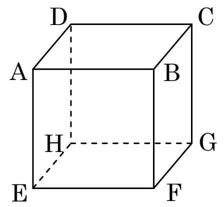
(1) ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3) m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

［2016 東京大・文］

35 右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

［2017 名古屋大・文］

36 n を 2 以上, a を 1 以上の整数とする。箱の中に, 1 から n までの番号札がそれぞれ 1 枚ずつ, 合計 n 枚入っている。この箱から, 1 枚の札を無作為に取り出して元に戻す, という試行を a 回繰り返す。ちょうど a 回目の試行でそれまでに取り出した札に書かれた数の和がはじめて n 以上となる確率を $p(a)$ とする。

(1) $p(1)$ と $p(n)$ を求めよ。

(2) $p(2)$ を求めよ。

(3) n が 3 以上の整数のとき $p(3)$ を求めよ。 [2018 東北大・理]

37 1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし, 積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。 [2018 九州大・理]

38 コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって, これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A, B, C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚, 箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚, 箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚, 箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき, 次の問いに答えよ。

(1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A, B, C いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。

(3) 試行の後に箱 A を開けるとちょうど 2 枚のコインが入っていた。このとき箱 B にコインがちょうど 2 枚入っている確率を求めよ。 [2019 千葉大・理]

39 縦 4 個, 横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく。このマス目の横の並びを行といい, 縦の並びを列という。どの行にも, どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ。右図はこのような入れ方の 1 例である。

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

[2020 京都大]

40 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い，出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。

(1) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。

(2) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。

(3) X_1，X_2，$\cdots$，X_n の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

［2020 北海道大・理］

確　　率

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 一橋大]

(1) A の勝つ確率, 負ける確率はそれぞれ$\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$である。

(i) 3 回目で A が優勝するときは, A が 3 連勝より, その確率は$\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

(ii) 4 回目で A が優勝するときは, 3 回目までに A が 2 勝 1 敗で 4 回目に A が勝つときで, その確率は${}_3C_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$

(iii) 5 回目で A が優勝するときは, 4 回目までに A が 2 勝 2 敗で 5 回目に A が勝つときで, その確率は${}_4C_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{16}{81}$

(i)(ii)(iii)より, $p=\dfrac{8}{27}+\dfrac{8}{27}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{64}{81}$

(2) A が m 回目に優勝するとしたとき, それまでに A が勝った回数, 負けた回数をそれぞれ a, b とすると, $a+b=m$, $a-b=2$ となる。

これより, $a=\dfrac{m+2}{2}$, $b=\dfrac{m-2}{2}$ となり, m は偶数である。

まず, 2 回試合をして, A が 1 勝 1 敗の確率は, ${}_2C_1\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{9}$ となる。

$k\geqq 2$ として $2k$ 回目に A が優勝するのは, A が $2(k-1)$ 回目まで 1 勝 1 敗のパターンを続け, その後 2 連勝する場合である。

この確率は, $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{k-1}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\left(\dfrac{4}{9}\right)^k$ となり, これは $k=1$ でも成り立つ。

よって, $q_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{4}{9}\right)^k=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{4}{5}\left\{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right\}$

(3) $q_n-p=\dfrac{4}{5}\left\{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right\}-\dfrac{64}{81}=\dfrac{4}{5}\left\{\dfrac{1}{81}-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right\}$ となり,

$$q_n>p \iff \frac{1}{81}>\left(\frac{4}{9}\right)^n \iff \frac{1}{9^2}\left(\frac{9}{4}\right)^n>1$$

$$q_n<p \iff \frac{1}{81}<\left(\frac{4}{9}\right)^n \iff \frac{1}{9^2}\left(\frac{9}{4}\right)^n<1$$

ここで, $\dfrac{1}{9^2}\left(\dfrac{9}{4}\right)^5=\dfrac{9^3}{4^5}=\dfrac{729}{1024}<1$, $\dfrac{1}{9^2}\left(\dfrac{9}{4}\right)^6=\dfrac{9^4}{4^6}=\dfrac{6561}{4096}>1$

よって, $n\leqq 5$ のとき $q_n<p$, $n\geqq 6$ のとき $q_n>p$

［解 説］

設問(1)と(2)の題意の違いを整理してから, 計算にとりかからないとミスをしてしまいます。そのような意味で, 重要題です。

$\boxed{2}$　　［1999 大阪大・理］

2 枚の紙を表を上にして重ね合わせたとき，16 個のマス目のうち重なるマス目には同じ番号を書いてみると，右図のようになる。これより，どの番号も 4 つのマス目に書かれていることがわかる。

2	3	4	2
4	1	1	3
3	1	1	4
2	4	3	2

ここで，A が塗りつぶしたマス目の状態について場合分けをして，A と B が塗りつぶしたマス目がどれも重ならない確率を求める。

(i)　A が同じ番号を 2 つ塗りつぶしたとき

A が選ぶ番号は ${}_4C_1$ 通りで，B は A が選んだ番号以外の番号の書かれている 12 個のマス目から 2 つ選んで塗ればよいので，

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{16}C_2}\times\frac{{}_{12}C_2}{{}_{16}C_2}\times{}_4C_1=\frac{1}{20}\times\frac{11}{20}\times4=\frac{11}{100}$$

(ii)　A が異なる番号を 2 つ塗りつぶしたとき

A が選ぶ番号は ${}_4C_2$ 通りで，B は A が選んだ番号以外の番号の書かれている 8 個のマス目から 2 つ選んで塗ればよいので，

$$\frac{{}_4C_1\times{}_4C_1}{{}_{16}C_2}\times\frac{{}_8C_2}{{}_{16}C_2}\times{}_4C_2=\frac{2}{15}\times\frac{7}{30}\times6=\frac{14}{75}$$

以上より，求める確率は，$\dfrac{11}{100}+\dfrac{14}{75}=\dfrac{89}{300}$

［解　説］

難問風の問題設定にドキッとします。しかし，まん中の 4 つは同じというように考えていけば，結論までのプロセスが次第に見えてきます。

３　　　　[1999 一橋大]

箱Aに入っている赤玉の個数を a, 白玉の個数を b とすると, 次の場合がある。

$$(a,\ b)=(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2)$$

また, 題意の試行を n 回繰り返した後に, $(a,\ b)=(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2)$ となる確率をそれぞれ q_n, p_n, r_n とおく。

すると, $p_0=1$ で, $p_n+q_n+r_n=1$ ………①

次に, $n+1$ 回後に $(a,\ b)=(1,\ 3)$ となるのは, 次の3つの場合がある。

(i) n 回後に $(a,\ b)=(0,\ 4)$ のとき

Aから白, Bから赤をとって交換する場合で, その確率は $1\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ となる。

(ii) n 回後に $(a,\ b)=(1,\ 3)$ のとき

Aから赤, Bから赤をとって交換するか, またはAから白, Bから白をとって交換する場合で, その確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{8}$ となる。

(iii) n 回後に $(a,\ b)=(2,\ 2)$ のとき

Aから赤, Bから白をとって交換する場合で, その確率は $\dfrac{2}{4}\times 1=\dfrac{1}{2}$ となる。

(i)(ii)(iii)より, $p_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{5}{8}p_n+\dfrac{1}{2}r_n$ ………②

すると①②より, $p_{n+1}=\dfrac{5}{8}p_n+\dfrac{1}{2}(1-p_n)=\dfrac{1}{8}p_n+\dfrac{1}{2}$

$$p_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)$$

よって, $p_n-\dfrac{4}{7}=\left(p_0-\dfrac{4}{7}\right)\left(\dfrac{1}{8}\right)^n=\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$ より, $p_n=\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$

［解 説］

確率と漸化式の融合問題です。この分野は頻出です。

4 ［2000 一橋大］

(1) 1 の目が少なくとも 1 回出る事象を A, 2 の目が少なくとも 1 回出る事象を B とすると，$\overline{A}$ は 1 の目が 1 回も出ない事象，$\overline{B}$ は 2 の目が 1 回も出ない事象，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は 1 と 2 の目がともに 1 回も出ない事象を表す。

$$P(\overline{A})=P(\overline{B})=\left(\frac{5}{6}\right)^n,\ P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1 の目が少なくとも 1 回出て，かつ 2 の目も少なくとも 1 回出る事象は $A\cap B$ となるので，求める確率は，

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-\left\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right\}\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

(2) 1 の目が少なくとも 2 回出る事象を C とすると，$\overline{C}$ は 1 の目が 1 回も出ないかまたは 1 回だけ出る事象を表す。

$$P(\overline{C})=\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

また，$\overline{C}\cap\overline{B}$ は 2 の目が 1 回も出なくて, 1 の目が 1 回も出ないかまたは 1 回だけ出る事象を表す。

$$P(\overline{C}\cap\overline{B})=\left(\frac{2}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

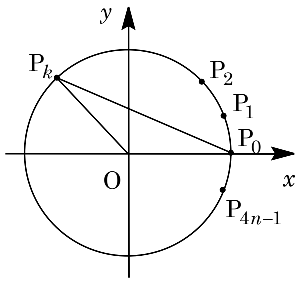
1 の目が少なくとも 2 回出て，かつ 2 の目が少なくとも 1 回出る事象は $C\cap B$ となるので, (1)と同様にして，求める確率は,

$$\begin{aligned}P(C\cap B)&=1-\left\{P(\overline{C})+P(\overline{B})-P(\overline{C}\cap\overline{B})\right\}\\&=1-\left(1+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n\\&=1-\left(2+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

［解 説］

(1)は余事象を考えて，関係 $P(A\cap B)=1-\left\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right\}$ を利用する頻出題です。(2)もまた, (1)とは独立に，この関係を用いました。(1)を誘導として設けた出題者の善意を無視してしまいましたが……。

5 ［2001 大阪大・理］



(1) $\angle P_0OP_k=\dfrac{2\pi}{4n}k=\dfrac{\pi}{2n}k$ であり，条件より $P_0P_k \geqq \sqrt{2}$

なので $P_0P_k{}^2 \geqq 2$

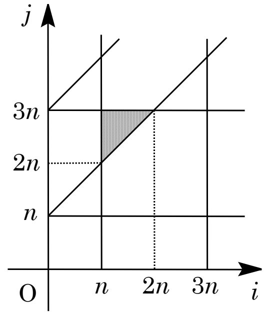
$\triangle P_0OP_k$ に余弦定理を適用して，

$$1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2n}k \geqq 2$$

$\cos\dfrac{\pi}{2n}k \leqq 0$ より，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2n}k \leqq \dfrac{3\pi}{2}$

よって，$n \leqq k \leqq 3n$

(2) P_0 を 1 つの頂点とする三角形を考え，他の頂点を P_i，P_j $(i<j)$ とおくと，



$P_0P_i \geqq \sqrt{2}$ から，$n \leqq i \leqq 3n$ ………①

$P_iP_j \geqq \sqrt{2}$ から，$i+n \leqq j \leqq i+3n$ ………②

$P_jP_0 \geqq \sqrt{2}$ から，$4n-3n \leqq j \leqq 4n-n$

$n \leqq j \leqq 3n$ ………③

①②③を満たす領域は右図のようになり，この領域内の $(i,\ j)$ の組の個数は，

$$\sum_{i=n}^{2n}\{3n-(i+n)+1\}=\sum_{i=n}^{2n}(2n-i+1)=\sum_{i=1}^{n+1}i$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

P_1 を 1 つの頂点とする三角形，P_2 を 1 つの頂点とする三角形，……，P_{4n-1} を 1 つの頂点とする三角形についても同数となり，また条件を満たす三角形を重複して 3 回数えていることより，求める個数 $g(n)$ は，

$$g(n)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot4n\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}n(n+1)(n+2)$$

［解 説］

(2)は格子点の個数を対応させて数えました。よく見かける頻出題です。

６ ［2001 東京大・文］

(1) 最初, 2 点 A, B はともに原点にあるので, n 回の試行の後, 2 点 A, B の距離は 1 以下である。すなわち, $a=b$ または $a=b\pm1$ となる。

ここで, n 回の試行の後, $a=b$ であるとき, $n+1$ 回目に投げたコインが表, 裏のいずれでも $a\neq b$ となる。

また, n 回の試行の後, $a=b+1$ であるとき, $n+1$ 回目に投げたコインが裏のとき $a=b$ となり, n 回の試行の後, $a=b-1$ であるとき, $n+1$ 回目に投げたコインが表のとき $a=b$ となる。

条件より, n 回の試行の後 $a=b$ となる場合の数が X_n, $a\neq b$ となる場合の数が 2^n-X_n より,

$$X_{n+1}=2^n-X_n$$

(2) 1 回目の試行の後, A, B の位置は $(a,\ b)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ より $X_1=0$ となる。

(1)より, $X_{n+1}-\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}=-\left(X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n\right)$

$$X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n=\left(X_1-\frac{1}{3}\cdot2^1\right)(-1)^{n-1}=-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}=\frac{2}{3}(-1)^n$$

よって, $X_n=\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot2^n$

［解 説］

コインの表裏がどんな出方をしても, A, B の距離の差は, つねに 1 以下です。この点を見つけるのがポイントとなっています。

7 ［2001 東京工大］

(1) カードを１回取り出したとき，番号が１である確率は，$P_N(1)=\dfrac{1}{N}$

カードを２回取り出したとき，その番号が１回目が２，１回目と２回目の和が２である確率は，$P_N(2)=\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{N^2}=\dfrac{N+1}{N^2}$

カードを３回取り出したとき，その番号が１回目が３，１回目と２回目の和が３，１回目と２回目と３回目の和が３である確率は，

$$P_N(3)=\frac{1}{N}+\frac{2}{N^2}+\frac{1}{N^3}=\frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(2) １，２，３の３枚のカードを１枚取り出して戻すという試行を４回行ったとき，２回目までの和が４となる組合せは$(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，３回目までの和が４となる組合せは$(1,\ 1,\ 2)$，４回目までの和が４となる組合せは$(1,\ 1,\ 1,\ 1)$なので，それらの順列を考えて，

$$P_3(4)=\frac{2+1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}=\frac{37}{81}$$

次に，同じ試行を５回行ったとき，２回目までの和が５となる組合せは$(2,\ 3)$，３回目までの和が５となる組合せは$(1,\ 1,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 2)$，４回目までの和が５となる組合せは$(1,\ 1,\ 1,\ 2)$，５回目までの和が５となる組合せは$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$なので，それらの順列を考えて，

$$P_3(5)=\frac{2}{3^2}+\frac{3+3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{1}{3^5}=\frac{121}{243}$$

(3) j回目に取り出したカードの番号をY_jとすると，$X_j=Y_1+Y_2+\cdots+Y_j$

ここで，N枚のカードから１枚取り出して戻すという試行をk回行ったとき，j回目$(j=1,\ \cdots,\ k)$までの和がkとなるのは，

$$Y_1+Y_2+\cdots+Y_j=k\ (1\leqq Y_1\leqq N,\ 1\leqq Y_2\leqq N,\ \cdots,\ 1\leqq Y_j\leqq N)$$

この方程式を満たす$(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_j)$は，$k\leqq N$より${}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}$通りなので，

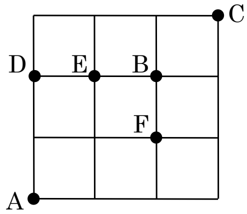
$$P_N(k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}}{N^j}=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0}{N}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{N^2}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2}{N^3}+\cdots+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}$$

$$=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0N^{k-1}+{}_{k-1}\mathrm{C}_1N^{k-2}+{}_{k-1}\mathrm{C}_2N^{k-3}+\cdots+{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}=\frac{(N+1)^{k-1}}{N^k}$$

［解 説］

(3)の具体例が(1)であり，(3)の条件である $k\leqq N$ が成り立たない場合の具体例が(2)という構成です。

8 ［2002 東北大・理］



6 回目に B 以外の地点から進んで B に止まるという条件より，6 回目では D→B, E→B, F→B のいずれかになる。

(i)　6 回目が D→B のとき

6 回目では 1 の目が出ることになり，その確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

すると，5 回目までに D に到達していることになり，A→D と進むには，3 の目が 2 回出て，4 か 5 か 6 の目が 3 回出ればよく，その確率は，

$\dfrac{5!}{2!3!}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{144}$ である。

(ii)　6 回目が E→B のとき

6 回目では 2 の目が出ることになり，その確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

すると, 5 回目までに E に到達していることになり, A→E と進むには, 2 の目が 1 回, 3 の目が 2 回出て，4 か 5 か 6 の目が 2 回出ればよく，その確率は，

$\dfrac{5!}{2!2!}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{144}$ である。

(iii) 6 回目が F→B のとき

6 回目では 3 の目が出ることになり，その確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

すると，5 回目までに F に到達していることになり，A→F と進むには次の 2 つの場合がある。1 つは, 1 の目が 1 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 3 回出るときで, その確率は $\dfrac{5!}{3!}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{72}$ である。もう 1 つは, 2 の目が 2 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 2 回出るときで，その確率は $\dfrac{5!}{2!2!}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{144}$ である。よって, 5 回目までに F に到達している確率は，$\dfrac{5}{72}+\dfrac{5}{144}=\dfrac{5}{48}$ である。

(i)(ii)(iii) より, 6 回目に B に到達する確率は,

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{144}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{144}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{48}=\frac{25}{864}\cdots\cdots\cdots①$$

次に, 7 回目以降に B→C と進むには, 7 回目から n 回目までに, 1 か 2 の目が少なくとも 1 回出て，しかも 3 の目が少なくとも 1 回出ればよい。

ここで，1 か 2 の目が少なくとも 1 回出るという事象を X，3 の目が少なくとも 1 回出るという事象を Y とおくと，それぞれ余事象の確率は，

$$P(\overline{X})=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6},\ P(\overline{Y})=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}$$

また，$\overline{X}\cap\overline{Y}$ は 4 か 5 か 6 の目だけ出るという事象を表すので，その確率は，

$$P(\overline{X}\cap\overline{Y})=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$$

$$
\begin{aligned}
P(X\cap Y) &= 1-P(\overline{X\cap Y}) = 1-P(\overline{X}\cup\overline{Y})\\
&= 1-\{P(\overline{X})+P(\overline{Y})-P(\overline{X}\cap\overline{Y})\}\\
&= 1-P(\overline{X})-P(\overline{Y})+P(\overline{X}\cap\overline{Y})\\
&= 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\cdots\cdots\cdots②
\end{aligned}
$$

①②より, n 回目までに C 地点に到達する確率は,

$$
\frac{25}{864}\times P(X\cap Y)=\frac{25}{864}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\right\}
$$

［解 説］

A→B の確率を求めるのと B→C の確率を求めるには, 異なる方法が必要で, 1 つの問題の中に 2 つの問題が入っています。

9 ［2003 一橋大］

(1)　$X=1$ となるのは $a_1 \geqq a_2$ の場合で，a_3，…，a_{2n} は任意である。

(i)　$a_1 > a_2$ のとき

1 から n までの数から 2 つ選び，大きい方を a_1，小さい方を a_2 に対応させる。各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，このときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times 2^2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}$$

(ii)　$a_1 = a_2$ のとき

1 から n までの数から 1 つ選び，それを a_1，a_2 に対応させる。その数の書かれているカードは 2 枚あるので，このときの確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times 2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

(i)(ii)より，$X=1$ となる確率は，$\dfrac{n-1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{n}{2n-1}$ である。

(2)　$X=n$ となるのは $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n \geqq a_{n+1}$ の場合で，a_{n+2}，…，a_{2n} は任意である。このときは，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，…，$a_{n-1}=n-1$，$a_n=n$ の場合しかなく，しかも $a_n \geqq a_{n+1}$ はつねに成立する。

各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，$X=n$ となる確率は，

$$\frac{2^n}{{}_{2n}\mathrm{P}_n} = \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

(3)　$1 \leqq m < n$ を満たす整数に対して，$X \geqq m$ となるのは $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m$ の場合で，a_{m+1}，…，a_{2n} は任意である。

すると，1 から n までの数から m 個選び，小さい方から a_1，a_2，…，a_m を対応させる。各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので，$X \geqq m$ となる確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_m \times 2^m}{{}_{2n}\mathrm{P}_m} = \frac{\dfrac{n!}{(n-m)!m!}\cdot 2^m}{\dfrac{(2n)!}{(2n-m)!}} = \frac{2^m n!(2n-m)!}{(2n)!(n-m)!m!}$$

［解 説］

題意を読みとることができれば，有名な対応問題であることがわかります。このことは，(3)についても同様です。

10 ［2003 東京大・文］

(1) 17 を 1 から 6 までの数で割った余りが X_1 より，X_1 の各々の値に対する確率は右表のようになる。

X_1	0	1	2	5
確率	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

次に，X_n を 1 から 6 までの数で割った余りが X_{n+1} より，$X_n=0$ のとき，どんな場合も $X_{n+1}=0$ である。

$X_n=1$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\dfrac{1}{6}$，$X_{n+1}=1$ となる確率は $\dfrac{5}{6}$ である。

$X_n=2$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\dfrac{1}{3}$，$X_{n+1}=2$ となる確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

さらに，$X_n=5$ のとき，$X_{n+1}=0$ となる確率は $\dfrac{1}{3}$，$X_{n+1}=1$ となる確率は $\dfrac{1}{3}$，$X_{n+1}=2$ となる確率は $\dfrac{1}{6}$，$X_{n+1}=5$ となる確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

ここで，$X_n=0$，$X_n=1$，$X_n=2$，$X_n=5$ となる確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とおくと，$a_1=\dfrac{1}{6}$，$b_1=\dfrac{1}{3}$，$c_1=\dfrac{1}{3}$，$d_1=\dfrac{1}{6}$ であり，

$$a_2=a_1+\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{7}{18},\quad b_2=\frac{5}{6}b_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{1}{3}$$

$$c_2=\frac{2}{3}c_1+\frac{1}{6}d_1=\frac{1}{4},\quad d_2=\frac{1}{6}d_1=\frac{1}{36}$$

よって，$X_3=0$ となる確率は,

$$a_3=a_2+\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}c_2+\frac{1}{3}d_2=\frac{29}{54}$$

(2) (1)と同様にすると，$d_{n+1}=\dfrac{1}{6}d_n$ となり，$X_n=5$ となる確率は,

$$d_n=d_1\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3) (1)と同様にし, (2)の結果を用いると，$b_{n+1}=\dfrac{5}{6}b_n+\dfrac{1}{3}d_n=\dfrac{5}{6}b_n+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{5}{6}\left\{b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

$$b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(b_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{5}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$X_n=1$ となる確率は,

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

［解 説］

(1)で一般的に考えておくと, (2)と(3)は漸化式を解くだけで済みます。

$\boxed{11}$ ［2004 名古屋大・理］

(1) サイコロを 2 回投げて 8 に進むとき, 1 回目と 2 回目に出る数の組合せは,

$(2,\ 6),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3),\ (6,\ 2)$

よって，$p_2 = \dfrac{5}{6^2} = \dfrac{5}{36}$

(2) サイコロを 1 回投げて 8 に進む場合はないので，$p_1 = 0$ である。

また, サイコロを 2 回投げてゴールに移動していないとき, その位置を k とすると $2 \leqq k \leqq 7$ なので, 3 回目に $8-k$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-k$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_3 = (1-p_2)\times\frac{1}{6} = \frac{31}{36}\times\frac{1}{6} = \frac{31}{216}$$

(3) (2)と同様に考えて，サイコロを n 回$(n \geqq 2)$投げてゴールに移動していないとき, その位置を l とすると $2 \leqq l \leqq 7$ なので，$n+1$ 回目に $8-l$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-l$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_{n+1} = (1-p_2-\cdots-p_{n-1}-p_n)\times\frac{1}{6}$$

これより，$1-6p_{n+1} = p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n \quad (n \geqq 2)$ ………①

$1-6p_n = p_2+\cdots+p_{n-1} \quad (n \geqq 3)$ ………②

①－②から，$p_n = -6p_{n+1}+6p_n$，$p_{n+1} = \dfrac{5}{6}p_n \quad (n \geqq 3)$

よって，$p_n = p_3\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3} = \dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$

［解 説］

サイコロを 2 回以上投げたとき, 0 や 1 に移動している可能性はありません。つまり, あと 1 回投げてゴールに進むことができるわけです。この状況の把握がポイントです。

$\boxed{12}$ ［2004 東京大・理］

(1) 正方形の 3 枚の板を，左から A, B, C とする。3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となるのは 3 つの場合があり，確率はそれぞれ次のようになる。

(i) A を 3 回裏返す場合 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

(ii) A を 1 回裏返し B を 2 回裏返す場合 ${}_3C_1\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

(iii) A を 1 回裏返し C を 2 回裏返す場合 ${}_3C_1\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{27}$ である。

(2) 3 枚の板の両端の色に注目して，n 回の操作の結果，A と C の板が「白・白」となる確率を p_n，「白・黒」または「黒・白」となる確率を q_n，「黒・黒」となる確率を r_n おく。このとき，$p_1=\dfrac{1}{3}$，$q_1=\dfrac{2}{3}$，$r_1=0$ である。

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\text{①},\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}r_n\cdots\cdots\text{②}$$

$p_n+q_n+r_n=1$ より，②から，$q_{n+1}=\dfrac{2}{3}(1-q_n)+\dfrac{1}{3}q_n=-\dfrac{1}{3}q_n+\dfrac{2}{3}$

$$q_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(q_n-\frac{1}{2}\right),\quad q_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって，$q_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots$③

①③より，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}=\dfrac{1}{3}p_n-\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{6}\cdots\cdots$④

④を満たす 1 つの数列を，α，β を定数として，$p_n=\alpha\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\beta$ とおくと，

$$\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\beta=\frac{1}{3}\left\{\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\beta\right\}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\cdots\cdots\text{⑤}$$

すると，$-\dfrac{1}{3}\alpha=\dfrac{1}{3}\alpha-\dfrac{1}{6}$，$\beta=\dfrac{1}{3}\beta+\dfrac{1}{6}$ より，$\alpha=\beta=\dfrac{1}{4}$ となる。

④⑤より，$p_{n+1}-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}\left\{p_n-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n-\dfrac{1}{4}\right\}$

$$p_n-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

以上より，求める両端が白の確率は，$p_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4}$

［解 説］

確率の計算に，漸化式を利用する頻出問題です。なお，漸化式の解き方の詳細については，「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

13　　［2005 東北大・文］

(1)　皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなるのは, 1 回目に異なる目, 2 回目に 1 回目に出た以外の異なる目が出て, さらに 3 回目に 1 回目, 2 回目に出た以外の異なる目が出ることより, その確率は,

$$\frac{{}_6P_2}{6^2}\times\frac{{}_4P_2}{6^2}\times\frac{{}_2P_2}{6^2}=\frac{5}{324}$$

(2)　まず, 皿が 1 番の箱に 5 枚, 2 番の箱に 4 枚, 3 番の箱に 2 枚, 4 番の箱に 1 枚, 5 番と 6 番の箱に 3 枚ずつとなるのは, 次の 2 つの場合がある。

(i)　サイコロの目が(白, 黒) = (1, 3), (1, 4), (2, 4) と出るとき

出る順序は $3!=6$ 通りより, この確率は,

$$\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times 6=\frac{6}{6^6}$$

(ii)　サイコロの目が(白, 黒) = (1, 4), (1, 4), (2, 3) と出るとき

出る順序は 3 通りより, この確率は,

$$\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times 3=\frac{3}{6^6}$$

すると, 皿が 3 枚の箱が 2 個, 5 枚の箱, 4 枚の箱, 2 枚の箱, 1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率は, 箱の番号と皿の枚数との対応を考えると,

$$\left(\frac{6}{6^6}+\frac{3}{6^6}\right)\times {}_6P_4=\frac{1}{2^2 6^4}\times 6\times 5\times 4\times 3=\frac{5}{72}$$

［解　説］

おもしろい確率の問題です。(2)では, イメージをはっきりさせるために, 具体例から考えました。どんな解法をとるにせよ, 注意深く, 疑い深く, 論を進める必要があります。