２０２１ 入試対策

２次数学ランドマーク

整数と数列

文系＋理系

１９９８ － ２０２０

外林 康治　編著

電送数学舎

整数と数列

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1　正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく。

正の整数の組 $(a,\ b)$ は，条件

$$0<a-r(a)<\frac{4}{3}r(b) \qquad 0<b-r(b)<\frac{4}{3}r(ab)$$

をみたすとする。

(1)　$a-r(a)$ と $r(b)$ を求めよ。

(2)　a と b を求めよ。　［1998 一橋大］

2　次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\ \ \frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k a_{n+2-k}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

［1998 北海道大・理］

3　正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし, $a<b$ とする。　［1999 大阪大・文］

4　p,q は素数で, $p<q$ とする。

(1)　$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2,\ q=3$ のときに限ることを示せ。　［1999 一橋大］

5　0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする。たとえば, $C(12578)=78,\ C(6)=6$ である。n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

(1)　$x,\ y$ が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ ならば，$C(x)=C(y)$ であることを示せ。

(2)　$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ。　［1999 京都大・文］

6　どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても，$x=3m+5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。　［2000 大阪大・理］

7 次の問いに答えよ。

(1) 整数 $n \geqq 3$ に対して，${}_n\mathrm{C}_3 = \sum_{k=3}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2$ が成り立つことを示せ。

(2) 整数 $k \geqq 3$ に対して，$x+y+z=k$ を満たす自然数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ であることを示せ。

(3) 整数 $m \geqq 0$ に対して，$x+y+z \leqq m$ を満たす負でない整数 $x,\ y,\ z$ の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を, (1), (2)を用いて求めよ。 ［2000 金沢大・理］

8 実数 $x_1,\ \cdots,\ x_n\ (n \geqq 3)$ が条件 $x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} > 0\ (2 \leqq k \leqq n-1)$ を満たすとし，$x_1,\ \cdots,\ x_n$ の最小値を m とする。このとき，$x_l = m$ となる $l\,(1 \leqq l \leqq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ。 ［2000 京都大・文］

9 数列 $\{a_n\}$ において，各項 a_n が $a_n \geqq 0$ をみたし，かつ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ が成り立つとする。さらに各 n に対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n),\quad c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく。

(1) すべての n に対し不等式 $b_n \geqq c_n$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2) ある n について $b_{n+1} = c_{n+1}$ が成り立てば，$b_n = c_n$ となることを示せ。

(3) $b_3 = \frac{1}{2}$ となるとき，$c_3 = \frac{1}{2}$ であることを示せ。また $b_3 = \frac{1}{2}$ となる数列 $\{a_n\}$ は全部で何種類あるかを求めよ。 ［2001 大阪大・理］

10 n を 2 以上の整数とする。実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ に対し，$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，不等式 $-1 < S - a_k < 1$ が成り立っているとする。

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つことを示せ。

［2001 京都大・文］

11 4 個の整数 1, a, b, c は $1 < a < b < c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。 ［2002 京都大・文］

12 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3$は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数のとき，$\log_2 n$が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。

[2002 千葉大・理]

13 pは3以上の素数であり, x, yは$0 \leqq x \leqq p$, $0 \leqq y \leqq p$を満たす整数であるとする。このときx^2を $2p$ で割った余りと，y^2を $2p$ で割った余りが等しければ，$x = y$であることを示せ。

[2003 京都大・文]

14 素数 p, q に対して，$a_n = p^n - 4(-q)^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって整数a_nを定める。ただし，$p > 2q$とする。

(1) a_1とa_2が1より大きい公約数mをもつならば，$m = 3$であることを示せ。

(2) a_nがすべて3の倍数であるようなp, qのうちで積pqが最小となるものを求めよ。

[2004 大阪大・理]

15 n, a, bを0以上の整数とする。a, bを未知数とする方程式

$$(*) \quad a^2 + b^2 = 2^n$$

を考える。

(1) $n \geqq 2$とする。a, bが方程式(＊)を満たすならば，a, bはともに偶数であることを証明せよ。（ただし, 0は偶数に含める。）

(2) 0以上の整数nに対して，方程式(＊)を満たす0以上の整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。

[2004 京都大・文]

16 3以上9999以下の奇数 a で，$a^2 - a$が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

[2005 東京大]

17 2以上の自然数 n に対し，n と$n^2 + 2$がともに素数になるのは$n = 3$の場合に限ることを示せ。

[2006 京都大・理]

18 次の条件を満たす組$(x,\ y,\ z)$を考える。

条件(A)：x, y, zは正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$および$x \leqq y \leqq z$を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$で，$y \leqq 3$となるものをすべて求めよ。

(2) 組$(a,\ b,\ c)$が条件(A)を満たすとする。このとき，組$(b,\ c,\ z)$が条件(A)を満たすようなzが存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$は，無数に存在することを示せ。 ［2006 東京大・理］

19 pを3以上の素数とする。4個の整数a, b, c, dが次の3条件

$$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき，a, b, c, dをpを用いて表せ。 ［2007 京都大］

20 n と k を正の整数とし，$P(x)$を次数が n 以上の整式とする。整式$(1+x)^k P(x)$のn次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$のn次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。 ［2007 東京大・理］

21 以下の問いに答えよ。

(1) xを有理数とする。$7x^2$が整数ならば，xは整数であることを示せ。

(2) $a,\ b$を整数とする。a^2-7b^2が4の倍数ならば，aとbはともに偶数であることを示せ。

(3) rは整数，sは有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$が整数ならば，$s$は整数であることを示せ。

［2008 千葉大］

22 pを素数，nを正の整数とするとき，$(p^n)!$はpで何回割り切れるか。

［2009 京都大・文］

23 t を実数として，数列 a_1，a_2，$\cdots$を

$$a_1=1,\ a_2=2t,\ a_{n+1}=2ta_n-a_{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $t\geqq 1$ ならば, $0<a_1<a_2<a_3<\cdots$となることを示せ。

(2) $t\leqq -1$ ならば, $0<|a_1|<|a_2|<|a_3|<\cdots$となることを示せ。

(3) $-1<t<1$ ならば，$t=\cos\theta$ となる θ を用いて,

$$a_n=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n\geqq 1)$$

となることを示せ。 [2009 神戸大・理]

24 4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち,

$$A=\{4k+1 \mid k\text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2) 0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ。

(3) m, n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4) m, n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。 [2010 広島大・理]

25 a, b は $a\geqq b>0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2+ax+b=0,\ y^2+by+a=0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1) $a=b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2) $a>b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

[2011 名古屋大・理]

26 すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し,

$$a_n=p+qn+rn^2,\ b_n=p+qn+rn^2+sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば, $2r$ は整数である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q+r+s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。 [2012 千葉大・医]

27 4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。 [2013 大阪大・理]

28 n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1) a と b は整数であることを示せ。

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 [2013 京都大・文]

29 n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 [2013 京都大・理]

30 次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。[2014 九州大]

31 $a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

[2014 一橋大]

32 r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，$\cdots$に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。 [2014 東京大・理]

33 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3) p, q を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす p, q の組をすべて求めよ。

[2015 九州大・理]

34 a, b, c, d, e を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

[2015 京都大・理]

35 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1=1,\quad p_2=2,\quad p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2) すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1=1,\quad q_2=1,\quad q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ。

[2015 東京大・理]

36 x, y を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

[2016 北海道大・文]

37 以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=3^{x_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

[2016 東京大・文]

38 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。 [2016 九州大]

39 以下の問いに答えよ。

(1) 6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。 [2016 東北大・理]

40 素数 p, q を用いて，$p^q + q^p$ と表される素数をすべて求めよ。 [2016 京都大・理]

41 正の整数 n に対して，その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) k を正の整数，p を 3 以上の素数とするとき，$s(2^k p)$ を求めよ。

(2) $s(2016)$ を求めよ。

(3) 2016 の正の約数 n で，$s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ。

[2016 名古屋大・文]

42 $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n = p^n + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。 [2017 東京大]

43 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とするとき，2^n を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 自然数 m は，2 進法で 101 が 6 回連続する表示 $101101101101101101_{(2)}$ をもつとする。m を 7 で割った余りを求めよ。 [2018 九州大・文]

44 整数 a, b は等式 $3^a - 2^b = 1$ ……①を満たしているとする。

(1) a, b はともに正となることを示せ。

(2) $b>1$ ならば，a は偶数であることを示せ。

(3) ①を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべてあげよ。 [2018 東北大・理]

45 次の問いに答えよ。

(1) $2^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。

(2) $n^n - 1$ が 3 で割り切れるような自然数 n をすべて求めよ。 [2019 信州大・医]

46 正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく，それを 10 進法で表すと，小数第 1 位は 0 であり，第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1) このような n の中で最小のものを求めよ。

(2) このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

[2019 名古屋大・理]

47 p を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_2 = p^2,\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ。 [2019 一橋大]

48 xy 平面において $x,\ y$ がともに整数となる点 $(x,\ y)$ を格子点という。正の整数 n に対して，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x + y \leqq n$ で定まる領域を D とする。4 つの頂点がすべて D に含まれる格子点であり，x 軸と平行な辺をもつ長方形の数を $R(n)$ とする。また，そのなかで特に 1 つの辺が x 軸上にある長方形の数を $S(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $R(3)$ と $R(4)$ を求めよ。

(2) $S(n)$ を求めよ。

(3) $R(n)$ を求めよ。

(4) $R(n) = 1001$ となる n を求めよ。 [2020 名古屋大・文]

整数と数列

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 一橋大]

$0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$ ………① $0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ ………②とする。

(1) $0\leqq r(b)\leqq 7$ から，$0\leqq\dfrac{4}{3}r(b)\leqq\dfrac{28}{3}<10$

①より，$0<a-r(a)<10$

また，$a-r(a)$ が 8 の倍数となることを考えあわせて，$a-r(a)=8$ ………③

すると，①より $8<\dfrac{4}{3}r(b)$ となり，$6<r(b)$

$0\leqq r(b)\leqq 7$ から，$r(b)=7$

(2) (1)と同様にして，②より，$b-r(b)=8$ ………④，$r(ab)=7$ ………⑤

④より，$b=r(b)+8=15$

⑤より，$r(15a)=7$

よって，$15a=8k+7$ （k は自然数）となり，

$15(a-1)=8(k-1)$

15 と 8 は互いに素より，$a-1$ は 8 の倍数

l を整数として，$a-1=8l$，$a=8l+1$

すなわち，$r(a)=1$

③より，$a=r(a)+8=9$

［解 説］

不等式の処理が難しそうですが，(1)(2)とも誘導が丁寧についているため，見かけほどではありません。なお，(2)の後半の式変形は，不定方程式の解を求める常套手段の一つです。

２ ［1998 北海道大・理］

条件より，$\dfrac{2^n}{n!}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}=a_1a_{n+1}+a_2a_n+a_3a_{n-1}+\cdots+a_{n+1}a_1$ ………（＊）

$n=1$のとき，$2=a_1a_2+a_2a_1$で，$a_1=1$から$a_2=1$

$n=2$のとき，$2=a_1a_3+{a_2}^2+a_3a_1$で，$a_1=a_2=1$から$a_3=\dfrac{1}{2}$

$n=3$のとき，$\dfrac{4}{3}=a_1a_4+a_2a_3+a_3a_2+a_4a_1$で，$a_1=a_2=1$，$a_3=\dfrac{1}{2}$から $a_4=\dfrac{1}{6}$

$n=4$のとき，$\dfrac{2}{3}=a_1a_5+a_2a_4+{a_3}^2+a_4a_2+a_5a_1$で，$a_1=a_2=1$，$a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_4=\dfrac{1}{6}$から，$a_5=\dfrac{1}{24}$

これより，$a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$と推測でき，これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=\dfrac{1}{0!}=1$で成立。

(ii)　$n\leqq l$のとき　$a_k=\dfrac{1}{(k-1)!}$　$(1\leqq k\leqq l)$と仮定する。

(＊)に$n=l$を代入すると，

$$\frac{2^l}{l!}=\sum_{k=1}^{l+1}a_ka_{l+2-k}=a_1a_{l+1}+\sum_{k=2}^{l}a_ka_{l+2-k}+a_{l+1}a_1$$

$$=2a_{l+1}+\sum_{k=2}^{l}\frac{1}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{(l+1-k)!}=2a_{l+1}+\frac{1}{l!}\sum_{k=2}^{l}\frac{l!}{(k-1)!(l+1-k)!}$$

$$=2a_{l+1}+\frac{1}{l!}\sum_{k=2}^{l}{}_l\mathrm{C}_{k-1}=2a_{l+1}+\frac{1}{l!}\sum_{k=1}^{l-1}{}_l\mathrm{C}_k$$

$$=2a_{l+1}+\frac{1}{l!}\left(\sum_{k=0}^{l}{}_l\mathrm{C}_k-{}_l\mathrm{C}_0-{}_l\mathrm{C}_l\right)=2a_{l+1}+\frac{1}{l!}\left\{(1+1)^l-2\right\}$$

$$=2a_{l+1}+\frac{1}{l!}(2^l-2)$$

よって，$2a_{l+1}-\dfrac{2}{l!}=0$，$a_{l+1}=\dfrac{1}{l!}$

$n=l+1$のときも成立する。

(i)(ii)よりすべての自然数nで$a_n=\dfrac{1}{(n-1)!}$

［解 説］

推測をして，その後，数学的帰納法で証明という問題です。帰納法は標準タイプではなく，いわゆる強化型ですが，これは前半の具体的な計算からわかります。

3 ［1999 大阪大・文］

a 以上 b 以下の整数の総和は $\dfrac{a+b}{2}(b-a+1)$ なので，条件より，

$$\frac{a+b}{2}(b-a+1)=500,\ \ (a+b)(b-a+1)=1000$$

$1\leqq a<b$ より，$2\leqq b-a+1<a+b$ ………(＊)

また，$(b-a+1)+(a+b)=2b+1$ で，和が奇数となることより，$b-a+1$ と $a+b$ の偶奇は一致しない。

以上より，$1000=2^3\cdot 5^3$ なので，(＊)を満たし 1000 を一方が偶数，他方が奇数の 2 つの数の積として表すと，

$$(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3),\ (5^2,\ 2^3\cdot 5),\ (5,\ 2^3\cdot 5^2)$$

(i) $(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3)$ のとき

$b-a=7,\ a+b=125$ より，$(a,\ b)=(59,\ 66)$

(ii) $(b-a+1,\ a+b)=(5^2,\ 2^3\cdot 5)$ のとき

$b-a=24,\ a+b=40$ より，$(a,\ b)=(8,\ 32)$

(iii) $(b-a+1,\ a+b)=(5,\ 2^3\cdot 5^2)$ のとき

$b-a=4,\ a+b=200$ より，$(a,\ b)=(98,\ 102)$

［解 説］

1000 の正の約数は，全部で 16 個になりますが，一つ一つチェックしていくのはたいへんです。条件に適する候補を絞ることについては，$a+b$ と $b-a+1$ の和が奇数となることに注目してみました。

4 ［1999 一橋大］

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ より，$\dfrac{p+q}{pq}=\dfrac{1}{r}$，$(p+q)r=pq$ ………①

ここで，$p+q$ と pq が 2 以上の公約数 m をもつとすると，a，b を自然数として，$p+q=ma$，$pq=mb$ と表される。すると，この式をまとめて $p(ma-p)=mb$ より $p^2=m(ap-b)$，$q(ma-q)=mb$ より $q^2=m(aq-b)$ となり，p^2 と q^2 は 2 以上の公約数 m をもつ。これは，p，q が素数ということに反する。よって，$p+q$ と pq は互いに素である。

すると，①より r が pq の倍数となるので，k を整数として $r=kpq$ と表せる。

①に代入して $(p+q)k=1$ ………②

p，q は $p<q$ を満たす素数なので，$p+q\geqq 2+3=5$ となり，②を満たす整数 k は存在しない。

よって，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しない。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ より，$\dfrac{q-p}{pq}=\dfrac{1}{r}$，$(q-p)r=pq$ ………③

(1)と同様にして，$q-p$ と pq は互いに素であるので，③より r が pq の倍数となり，l を整数として $r=lpq$ と表せる。

③に代入して $(q-p)l=1$ ………④

④より $q-p$ は 1 の約数となり，$p<q$ より $q-p=1$

これより，p，q の一方が偶数，他方が奇数となるが，偶数の素数は 2 しかないので，$p=2$，$q=3$ となる。このとき $r=6$ となり適する。

よって，$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは，$p=2$，$q=3$ のときに限る。

［解 説］

大小関係からとりうる値の範囲を絞り込んでいくことをまず考えました。ところがそれではうまく証明できなかったので，p，q が素数という条件をもとに考え直しました。

5 ［1999 京都大・文］

(1) $C(x)$はxを 100 で割った余りなので，$C(nx)=C(ny)$より，$nx-ny$は 100 の倍数となる。すると, kを整数として,

$$n(x-y)=100k$$

nは 2 でも 5 でも割り切れない正の整数なので, nと$100=2^2\cdot 5^2$は互いに素である。

よって，$x-y$が 100 の倍数となり，$C(x)=C(y)$が成立する。

(2) (1)の命題の対偶をとると,

$$C(x)\neq C(y)\text{ ならば，}C(nx)\neq C(ny)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$C(x)=r_x$，$C(y)=r_y$とおくと, p, qを 0 以上の整数として,

$$x=100p+r_x,\ \ y=100q+r_y$$

$$nx=100np+nr_x,\ \ ny=100nq+nr_y$$

命題①は整数r_x，r_y（$0\leqq r_x\leqq 99$，$0\leqq r_y\leqq 99$）に対し,

$$r_x\neq r_y\text{ ならば，}C(nr_x)\neq C(nr_y)\cdots\cdots\cdots②$$

すると，命題②より$C(0)$，$C(n)$，$C(2n)$，$C(3n)$, ……，$C(99n)$はすべて異なり，しかも題意から 0, 1, 2, 3, ……, 99 のいずれかである。

よって，$C(nx)=1$となる 0 以上の整数xが存在する。

［解 説］

整数a, bが互いに素であるとき，$ax+by=1$を満たす整数x, yが存在するという定理がありますが，(2)はこの定理の具体的な場合の証明となっています。しかし，上の解の論法は，たとえ(1)の誘導がついたとしても，参考書などで類題を経験しておかないと無理でしょう。

6 [2000 大阪大・理]

まず, 8 以上の整数 x は, 0 以上の整数 m, n を用いて, $x=3m+5n$ の形に表せることを示す。

$n=0$ のとき $x=3m$ となり, $m\geqq 0$ より x は 3 以上の 3 の倍数をすべて表すことができる。

$n=1$ のとき $x=3m+5=3(m+1)+2$ となり, $m+1\geqq 1$ より x は 3 で割った余りが 2 となる 5 以上の整数をすべて表すことができる。

$n=2$ のとき $x=3m+10=3(m+3)+1$ となり, $m+3\geqq 3$ より x は 3 で割った余りが 1 となる 10 以上の整数をすべて表すことができる。

以上より, 8 以上の整数 x は, $x=3m+5n$ の形に表せる。

さて, $(m,\ n)=(1,\ 1)$ で $x=8$ となるので, 8 より小さい自然数 x が $x=3m+5n$ の形に表せるのは, $(m,\ n)=(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ 1)$ の場合だけであり, 順に $x=3,\ 6,\ 5$ となる。

すると, 0 以上の整数 m, n を用いて, $x=3m+5n$ とは表すことができない自然数 x は 1, 2, 4, 7 だけである。

[解 説]

いきなり 8 以上の整数がすべて $3m+5n$ の形で表せることがわかったわけではありません。m, n に 0 以上の整数を具体的にあてはめて推測をしました。ただ, 3 と 5 が互いに素なので, 整数 m, n を用いて $3m+5n$ の形で, 任意の整数が表せるということは, 基本の 1 つです。

7 ［2000 金沢大・理］

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$ より，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}={}_{n}\mathrm{C}_{r}-{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$ となるので, $n\geqq 4$ のとき,

$$\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_{2}={}_{2}\mathrm{C}_{2}+\sum_{k=4}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{3}+\sum_{k=4}^{n}({}_{k}\mathrm{C}_{3}-{}_{k-1}\mathrm{C}_{3})={}_{n}\mathrm{C}_{3}$$

また，$n=3$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=3}^{3}{}_{k-1}\mathrm{C}_{2}={}_{2}\mathrm{C}_{2}={}_{3}\mathrm{C}_{3}$ より成り立つ。

以上より, $n\geqq 3$ で，$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_{2}={}_{n}\mathrm{C}_{3}$

(2) k 個の球を 1 列に並べ, その球の間の $k-1$ か所から 2 か所選んで仕切りを入れる。左側の仕切りの左側にある球の個数を x, 2 つの仕切りの間にある球の個数を y, 右側の仕切りの右側にある球の個数を z とすると,

$$x+y+z=k\ (x\geqq 1,\ \ y\geqq 1,\ \ z\geqq 1)\ \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, 仕切りの入れ方 1 通りに対して, ①を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$は 1 通り決まり, その個数は,

$${}_{k-1}\mathrm{C}_{2}=\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$$

(3) 整数 k を $0\leqq k\leqq m$ とし，$x+y+z=k\ (x\geqq 0,\ \ y\geqq 0,\ \ z\geqq 0)\cdots\cdots$②を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$に対して，$a=x+1,\ \ b=y+1,\ \ c=z+1$とおくと,

$$a+b+c=k+3\ (a\geqq 1,\ \ b\geqq 1,\ \ c\geqq 1)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

③を満たす整数の組$(a,\ b,\ c)$は, (2)より ${}_{k+2}\mathrm{C}_{2}$ 通りとなるので, ②を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$の個数は ${}_{k+2}\mathrm{C}_{2}$ である。

すると，$x+y+z\leqq m\ (x\geqq 0,\ \ y\geqq 0,\ \ z\geqq 0)$ を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$の個数は, (1)を用いて,

$$\sum_{k=0}^{m}{}_{k+2}\mathrm{C}_{2}=\sum_{k=3}^{m+3}{}_{k-1}\mathrm{C}_{2}={}_{m+3}\mathrm{C}_{3}=\frac{1}{6}(m+3)(m+2)(m+1)$$

［解 説］

(3)の条件を満たす四面体の内部または面上の格子点の個数を求めることが本問のねらいです。(1)と(2)がそれを導くためのうまい誘導となっています。

８ ［2000 京都大・文］

$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$ より，$x_k-x_{k-1}<x_{k+1}-x_k$

ここで，$y_k=x_{k+1}-x_k$ とおくと，$y_{k-1}<y_k$ となり，$2\leqq k\leqq n-1$ から，

$$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$$

(i)　$y_1>0$ のとき

$0<y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$ より，$x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_1 である。

(ii)　$y_{n-1}\leqq 0$ のとき

$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}\leqq 0$ より，$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_{n-2}>x_{n-1}\geqq x_n$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_n，または x_n と x_{n-1} である。

(iii)　$y_1\leqq 0$ かつ $y_{n-1}>0$ のとき

$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_i\leqq 0<y_{i+1}<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$ となる i $(1\leqq i\leqq n-2)$ が存在する。

$$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_i\geqq x_{i+1}<x_{i+2}<\cdots\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n$$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_{i+1}，または x_{i+1} と x_i である。

(i)(ii)(iii)より，$x_l=m$ となる l の個数は 1 または 2 である。

［解 説］

与えられた不等式の意味は，階差数列が単調増加する漸化式というものです。この階差数列 $\{y_n\}$ の符号で，もとの数列 $\{x_n\}$ の増減の様子が把握できます。

9　　[2001 大阪大・理]

(1) (i)　$n=1$ のとき　$b_1=c_1=1-a_1$ より，$b_1\geqq c_1$ は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$b_k\geqq c_k$ と仮定すると，$b_k-c_k\geqq 0$

$$b_{k+1}-c_{k+1}=(1-a_{k+1})b_k-(c_k-a_{k+1})\geqq a_{k+1}(1-b_k)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$a_n\geqq 0$ かつ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ より，$0\leqq a_n\leqq\dfrac{1}{2}$ となるので，$\dfrac{1}{2}\leqq 1-a_n\leqq 1$

よって，$b_k=(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)\leqq 1$ から，$a_{k+1}(1-b_k)\geqq 0\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$b_{k+1}-c_{k+1}\geqq 0$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対し，不等式 $b_n\geqq c_n$ が成り立つ。

(2)　条件より，ある n に対して，$b_{n+1}-c_{n+1}=(b_n-c_n)+a_{n+1}(1-b_n)=0$

ここで，②より $a_{n+1}(1-b_n)\geqq 0$ なので，$b_n-c_n\leqq 0$

ところが, (1)より $b_n-c_n\geqq 0$ なので，$b_n-c_n=0$ となる。

(3)　$c_3=1-(a_1+a_2+a_3)$ で，$0\leqq a_1+a_2+a_3\leqq\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{2}\leqq c_3\leqq 1$

ところが，$b_3=\dfrac{1}{2}$ のとき, (1)より $c_3\leqq\dfrac{1}{2}$ となるので，$c_3=\dfrac{1}{2}$ である。

さて，$b_3=(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots③$，$c_3=1-(a_1+a_2+a_3)=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots④$

③より，$1-(a_1+a_2+a_3)+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)-a_1a_2a_3=\dfrac{1}{2}$

④を代入して，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots⑤$

また, (2)より $b_3=c_3=\dfrac{1}{2}$ のとき，$b_2=c_2$ なので,

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)，\ a_1a_2=0\cdots\cdots\cdots⑥$$

(i)　$a_1=0$ のとき　⑤より $a_2a_3=0$

$a_2=0$ のとき③より $a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_3=0$ のとき③より $a_2=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$a_1\neq 0$ のとき　⑥より $a_2=0$ で, ⑤より $a_3a_1=0$ なので $a_3=0$

このとき, ③より $a_1=\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)$, $\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

すると，このいずれの組も，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ から $n\geqq 4$ において $a_n=0$ となるので，求める数列 $\{a_n\}$ は全部で 3 種類存在する。

[解　説]

思考がなめらかに流れていくように，設問に工夫がいろいろ施されています。

10 ［2001 京都大・文］

条件より，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ ……①，$-1 < S - a_k < 1$ ($k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$) ……②

まず，$a_n \geqq 2$ と仮定する。

②において $k = 1$ のとき，$-1 < S - a_1 < 1$ なので，$-1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n < 1$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < 1 - a_n \leqq -1 \ \cdots\cdots\cdots③$$

①より $a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，③から $a_2 < 0$ となり，①から $a_1 \leqq a_2 < 0$

すると，③より $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < -1$ なので，

$$S - a_n < -1$$

これは②において $k = n$ のときに反するので，$a_n < 2$ となる。

次に $a_1 \leqq -2$ と仮定する。

②において $k = n$ のとき，$-1 < S - a_n < 1$ なので，$-1 < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < 1$

$$1 \leqq -1 - a_1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ \cdots\cdots\cdots④$$

①より $a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，④から $a_{n-1} > 0$ となり，①から $0 < a_{n-1} \leqq a_n$

すると，④より $1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ なので，

$$S - a_1 > 1$$

これは②において $k = 1$ のときに反するので，$a_1 > -2$ となる。

以上より，①から，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つ。

［解 説］

京大らしい証明問題です。$n = 2$ の場合は明らかですが，$n = 3$ や $n = 4$ の場合を考えていくと，論証の道筋が見えてきます。

11 ［2002 京都大・文］

$1<a<b<c$ より，$1+a<1+b<1+c<a+c<b+c$ となる。しかも，$1+b<a+b$，$a+b<a+c$ である。すると，$1+a$ から $b+c$ までの整数の大小関係には，次の 3 つの場合がある。

(i) $1+c<a+b$ のとき

この場合，$1+a<1+b<1+c<a+b<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$……①，$1+c=1+a+2$……②，$a+b=1+a+3$……③

$a+c=1+a+4$……④，$b+c=1+a+5$……⑤

③より $b=4$，④より $c=5$ となり，①に代入して $a=3$

この値は②，⑤を満たす。

(ii) $1+c=a+b$ のとき

この場合，$1+a<1+b<1+c=a+b<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$……⑥，$1+c=1+a+2$……⑦，$a+b=1+a+2$……⑧

$a+c=1+a+3$……⑨，$b+c=1+a+4$……⑩

⑧より $b=3$，⑨より $c=4$ となり，⑥に代入して $a=2$

この値は⑦，⑩を満たす。

(iii) $a+b<1+c$ のとき

この場合，$1+a<1+b<a+b<1+c<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$……⑪，$a+b=1+a+2$……⑫，$1+c=1+a+3$……⑬

$a+c=1+a+4$……⑭，$b+c=1+a+5$……⑮

⑫より $b=3$，⑭より $c=5$ となり，⑪に代入して $a=2$

この値は⑬，⑮を満たす。

(i)(ii)(iii)より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5)$

［解 説］

1, a, b, c の中から 2 個とりだして作った 6 個の整数のうち，$a+b$ の大小関係だけが決定しません。この点に気付くのがポイントです。

12 ［2002 千葉大・理］

(1)　$\log_2 3$が有理数であると仮定すると, p, q を互いに素な自然数として,

$$\log_2 3 = \frac{q}{p},\ \ 2^{\frac{q}{p}} = 3,\ \ 2^q = 3^p \cdots\cdots\cdots①$$

p, q は自然数なので, ①は左辺が偶数, 右辺が奇数となり, 成立しない。

よって, $\log_2 3$は無理数である。

(2)　まず, $n = 1$のとき$\log_2 1 = 0$となり, $\log_2 n$は整数である。

$n \geqq 2$ で$\log_2 n$が有理数のとき, p, q を互いに素な自然数として,

$$\log_2 n = \frac{q}{p},\ \ 2^{\frac{q}{p}} = n,\ \ 2^q = n^p$$

ここで, m を正の奇数とし, l を 0 以上の整数として, $n = m\cdot 2^l$ とおくと,

$$2^q = (m\cdot 2^l)^p = m^p\cdot 2^{lp},\ \ 2^{q-lp} = m^p \cdots\cdots\cdots②$$

p は自然数なので, ②の右辺は奇数となり, 左辺も奇数となる。

よって, $q - lp = 0$, $q = lp \cdots\cdots\cdots③$

p, q は自然数なので, ③から l も自然数となる。

すると, $\dfrac{q}{p} = l$ より $\log_2 n = l$ となり, $\log_2 n$ が整数でない有理数となることはない。

［解 説］

(1)は基本的ですが, (2)では$n = m\cdot 2^l$ とおくことがすべてです。このような設定を自分でしなくてはいけないところが難しさの原因です。

13 ［2003 京都大・文］

x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しいので, k を整数として,

$$x^2-y^2=2pk\ ,\ \ (x+y)(x-y)=2pk\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

よって, p が素数より，$x+y$ または $x-y$ は p の倍数となる。

また, $0\leqq x\leqq p$, $0\leqq y\leqq p$ より，$0\leqq x+y\leqq 2p$，$-p\leqq x-y\leqq p$ である。

(i)　$x+y$ が p の倍数であるとき

$x+y=0$ のとき，$x=y=0$ である。

$x+y=p$ のとき，$(*)$より $x-y=2k$ である。ここで，p は 3 以上の素数なので $x+y$ は奇数であり，また $x-y$ は偶数である。ところが，一般的に $x+y$ と $x-y$ の偶奇は一致するので，この場合は不適である。

$x+y=2p$ のとき，$x=y=p$ である。

(ii)　$x-y$ が p の倍数であるとき

$x-y=-p$ のとき, $(*)$より $x+y=-2k$ である。すると，$x-y$ は奇数，$x+y$ は偶数となり，不適である。

$x-y=0$ のとき，$x=y$ である。

$x-y=p$ のとき，$(*)$より $x+y=2k$ である。すると，$x-y$ は奇数，$x+y$ は偶数となり，不適である。

(i)(ii)より，いずれの場合も $x=y$ である。

［解 説］

京大に特徴的な整数問題，今年もまた出ました。

14 [2004 大阪大・理]

(1) $a_1=p+4q$, $a_2=p^2-4q^2$ の公約数を m とし，整数 b_1，b_2 に対し，$a_1=mb_1$，$a_2=mb_2$ とすると，

$$p+4q=mb_1\cdots\cdots\cdots①,\ \ p^2-4q^2=mb_2\cdots\cdots\cdots②$$

①より $p=mb_1-4q$，②に代入して $(mb_1-4q)^2-4q^2=mb_2$

$$12q^2=m(b_2-b_1{}^2+8b_1q)\cdots\cdots\cdots③$$

さて，素数 p，q は $p>2q$ を満たすので，p は 5 以上の奇数である。これより，$p+4q$ は奇数となり，①より m は奇数である。

さらに，③より m は $12q^2=2^2\times3\times q^2$ の約数であるので，$m>1$ であれば，奇数 m の値として，$m=3$，q，q^2，$3q$，$3q^2$ $(q\neq2)$ が考えられる。

ところが，$m=q$，q^2，$3q$，$3q^2$ のときは，①より p は q の倍数となり，不適である。

以上より，$m>1$ であれば，$m=3$ である。

(2) まず，$a_1=(p+q)+3q$ から，a_1 が 3 の倍数であるためには，$p+q$ が 3 の倍数であることが必要である。

逆に，$p+q$ が 3 の倍数とき，任意の n に対して，

$$a_n=p^n-4(-q)^n=p^n-(3+1)(-q)^n=p^n-(-q)^n-3(-q)^n$$
$$=(p+q)\{p^{n-1}+p^{n-2}(-q)+\cdots+(-q)^{n-1}\}-3(-q)^n$$

これより，a_n はすべて 3 の倍数となるので，a_n が 3 の倍数である条件と，$p+q$ が 3 の倍数である条件は等しい。

さて，素数 p, q は $p>2q$ を満たすので，$p\geqq5, q\geqq2$ である。

そこで，$q=2$ のときを考えると，$p+q$ が 3 の倍数となる最小の素数 p は 7 であり，このとき $pq=14$ となる。

また，$q\geqq3$ のときは $p\geqq7$ から $pq\geqq21$ となり，これより積 pq が最小となる p，q は，$p=7$，$q=2$ である。

［解 説］

(2)において，a_2 についても，$a_2=p^2-q^2-3q^2=(p+q)(p-q)-3q^2$ と変形し，3 の倍数となる条件を考えています。

$\boxed{15}$ ［2004 京都大・文］

(1) $a^2+b^2=2^n$ ……①に対して，$n \geqq 2$ のとき 2^n は 4 以上の偶数なので，a^2，b^2 はともに偶数か，またはともに奇数である。

よって，a, b はともに偶数であるか，またはともに奇数である。

ここで，a，b がともに奇数であると仮定する。すなわち，k，l を自然数として，$a=2k-1$，$b=2l-1$ とおくと，

$$a^2+b^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2=2\{2k(k-1)+2l(l-1)+1\}$$

①より，$2k(k-1)+2l(l-1)+1=2^{n-1}$ ………②

②は左辺が奇数，また $n \geqq 2$ より右辺が偶数となり，成立しない。よって，a，b がともに奇数という場合はない。

以上より，$n \geqq 2$ で①が成立するとき，a, b はともに偶数である。

(2) (i) $n=0$ のとき ①より $a^2+b^2=1$ なので，$(a,\ b)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$

(ii) $n=1$ のとき ①より $a^2+b^2=2$ なので，$(a,\ b)=(1,\ 1)$

(iii) $n \geqq 2$ のとき (1)より a, b はともに偶数である。

そこで，a_1，b_1 を 0 以上の整数として，$a=2a_1$，$b=2b_1$ とおくと，①より，

$$4{a_1}^2+4{b_1}^2=2^n,\quad {a_1}^2+{b_1}^2=2^{n-2}$$

$n-2 \geqq 2$ のときは，a_2，b_2 を 0 以上の整数として，$a_1=2a_2$，$b_1=2b_2$ とおき，

$$4{a_2}^2+4{b_2}^2=2^{n-2},\quad {a_2}^2+{b_2}^2=2^{n-4}$$

この操作をくり返すと考え，n が偶数のときと奇数のときに場合分けをする。

(iii-i) $n=2m$ $(m \geqq 1)$ のとき ①より $a^2+b^2=2^{2m}$ なので，

$${a_1}^2+{b_1}^2=2^{2(m-1)},\quad {a_2}^2+{b_2}^2=2^{2(m-2)},\quad \cdots\cdots,\quad {a_m}^2+{b_m}^2=2^{2(m-m)}=1$$

(i)より，$(a_m,\ b_m)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$

よって，$(a,\ b)=(2^m,\ 0)$，$(0,\ 2^m)=\left(2^{\frac{n}{2}},\ 0\right)$，$\left(0,\ 2^{\frac{n}{2}}\right)$

(iii-ii) $n=2m+1$ $(m \geqq 1)$ のとき ①より $a^2+b^2=2^{2m+1}$ なので，

$${a_1}^2+{b_1}^2=2^{2(m-1)+1},\quad {a_2}^2+{b_2}^2=2^{2(m-2)+1},\quad \cdots\cdots,\quad {a_m}^2+{b_m}^2=2^{2(m-m)+1}=2$$

(ii)より，$(a_m,\ b_m)=(1,\ 1)$

よって，$(a,\ b)=(2^m,\ 2^m)=\left(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$

以上まとめると，n が偶数のとき $(a,\ b)=\left(2^{\frac{n}{2}},\ 0\right)$，$\left(0,\ 2^{\frac{n}{2}}\right)$，$n$ が奇数のとき $(a,\ b)=\left(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$ である。

［解 説］

京大らしい整数問題です。(2)で，(1)の誘導が役に立ちます。

16 ［2005 東京大］

$a^2-a=a(a-1)$であり，条件より, aは奇数，$a-1$は偶数となる。

ここで, aと$a-1$の公約数をgとし, b, cを正の整数とすると,

$$a=gb\cdots\cdots\cdots①,\ a-1=gc\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$g(b-c)=1$

よって, gは1の正の約数から$g=1$となり, aと$a-1$は互いに素である。

さて，$10000=2^4\times5^4$なので，a^2-aが 10000 で割り切れるとき，偶数$a-1$は2^4という約数をもち, kを整数として,

$$a-1=2^4\times k\cdots\cdots\cdots③$$

すると, $3\leqq a\leqq 9999$より，$2\leqq 2^4\times k\leqq 9998$となり，$1\leqq k\leqq 624$である。

よって, kが5^4を約数としてもつことはない。

また, kが約数として，5^i $(i=1,\ 2,\ 3)$をもつと仮定すると, aはそれぞれ5^{4-i}という約数をもつことになり, aと$a-1$が互いに素であることに反する。

以上より, lを奇数として,

$$a=5^4\times l\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$5^4\times l-1=2^4\times k$，$625l-16k=1\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤を満たす1つの$(l,\ k)$は，$(l,\ k)=(1,\ 39)$なので,

$$625\times1-16\times39=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$625(l-1)-16(k-39)=0$，$625(l-1)=16(k-39)$

625と16は互いに素なので, nを整数として,

$$l-1=16n,\ l=16n+1$$

④から，$a=5^4(16n+1)=625(16n+1)$

そこで, $3\leqq a\leqq 9999$より, $0<16n+1<16$となり，$n=0$のみ満たされる。

よって，求めるaは，$a=625$である。

［解 説］

当然ですが, a と$a-1$は互いに素です。この事実と a の範囲に制限があることが, 本問を解くうえでのポイントとなっています。

17 ［2006 京都大・理］

(i)　$n=2$ のとき

$n^2+2=6$ となり，n^2+2 は素数ではない。

(ii)　$n=3$ のとき

$n^2+2=11$ となり, n と n^2+2 はともに素数である。

(iii)　$n\geqq 5$ のとき

n は素数なので，2 の倍数でなく，しかも 3 の倍数でもないことより，k を自然数として，$n=6k\pm 1$ と表すことができる。このとき，

$$n^2+2=(6k\pm 1)^2+2=36k^2\pm 12k+3=3(12k^2\pm 4k+1)$$

すると，$12k^2\pm 4k+1$ は整数なので，n^2+2 は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)～(iii)より, n と n^2+2 がともに素数になるのは，$n=3$ の場合のみである。

［解 説］

まず，$n=2$，3，5，7，11，13 として n^2+2 を計算したところ，n が 5 以上のとき，n^2+2 は 3 の倍数になると推測できました。これを，式を用いて確認した解です。

18 [2006 東京大・理]

(1) $x^2+y^2+z^2=xyz$ $(1\leqq x\leqq y\leqq z)$ ……①において, $y\leqq 3$ より, $y=1,\ 2,\ 3$

(i) $y=1$ のとき $x=1$ より, $1+1+z^2=z$, $z^2-z+2=0$

$D=1-8=-7<0$ より解なし。

(ii) $y=2$ のとき $x^2+4+z^2=2xz$, $z^2-2xz+x^2+4=0$

$x=1,\ 2$ のいずれの場合も, $D/4=x^2-(x^2+4)=-4<0$ より解なし。

(iii) $y=3$ のとき $x^2+9+z^2=3xz$, $z^2-3xz+x^2+9=0$

このとき, $1\leqq x\leqq 3$ かつ $D=9x^2-4(x^2+9)=5x^2-36\geqq 0$ から, $x=3$ となり,

$$z^2-9z+18=0,\ (z-3)(z-6)=0,\ z=3,\ 6$$

(i)～(iii)より, $(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6)$

(2) $(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$ が①を満たすので,

$$a^2+b^2+c^2=abc\quad(1\leqq a\leqq b\leqq c)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで, $z=-a+bc$ とすると, z は整数で,

$$b^2+c^2+z^2-bcz=b^2+c^2+(-a+bc)^2-bc(-a+bc)$$
$$=a^2+b^2+c^2-abc=0$$

(1)より, $b\geqq 3$ であり,

$$z-c=-a+bc-c=c(b-1)-a\geqq 2c-a=c+(c-a)>0$$

よって, $b^2+c^2+z^2=bcz$ $(1\leqq b\leqq c\leqq z)$ となる整数 z が存在する。

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を, 次の漸化式で定義する。

$$a_1=3,\ b_1=3,\ c_1=3$$
$$a_{n+1}=b_n,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=-a_n+b_nc_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

すると, (2)より, すべての自然数 n に対して,

$$a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2=a_nb_nc_n\quad(1\leqq a_n\leqq b_n\leqq c_n)$$

さらに, $c_{n+1}-c_n=-a_n+b_nc_n-c_n\geqq 2c_n-a_n>0$ から, すべての $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ は異なるので, ①を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は, 無数に存在する。

［解 説］

(1)と(2)の誘導によって, (3)の証明がスムーズに行えます。なお, (1)については, 最初, すべての場合をチェックしましたが, 解なしのケースがほとんどなので, 作り直した解です。また, (2)では, z を $z=-a+bc$ として設定していますが, これは②と $b^2+c^2+z^2=bcz$ の両辺の差をとって見つけています。