

2021 入試対策  
2次数学ランドマーク

# 複素数

理系

1998 - 2020

---

外林 康治 編著

電送数学舎

---

# 複素数

## 【問題一覧】

---

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 複素平面上で  $z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ),  $z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$ ,  $z_2 = -\frac{1}{z_0}$

を表す点をそれぞれ  $P_0, P_1, P_2$  とする。

- (1)  $z_1$  を極形式で表せ。
- (2)  $z_2$  を極形式で表せ。
- (3) 原点  $O, P_0, P_1, P_2$  の 4 点が同一円周上にあるときの  $z_0$  の値を求めよ。

[1998 岡山大]

2 平面上において、7 点  $A, P, Q, R, S, R', S'$  を下図のようにとる。ただし、

$$AP = a, PQ = b$$

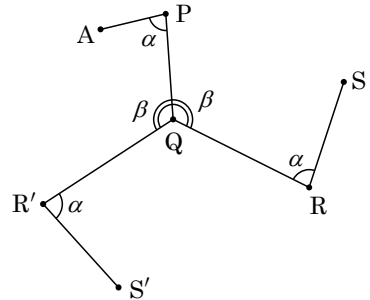
$$QR = QR' = c, RS = R'S' = d$$

$$\angle APQ = \angle SRQ = \angle S'R'Q = \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

$$\angle RQP = \angle PQR' = \beta \quad (0 \leq \beta \leq \pi)$$

である。このとき、 $AS^2 - AS'^2$  を  $\sin\alpha, \sin\beta$  および  $a, b, c, d$  を用いて表せ。

[1998 大阪大]



3  $p$  を 0 でない実数とし、2 次方程式  $x^2 - px + 5p = 0$  を考える。

- (1)  $x^2 - px + 5p = 0$  の解  $\alpha, \beta$  が  $\alpha^5 + \beta^5 = p^5$  を満たすとする。このときの  $p$  の値を求めよ。
- (2)  $x^2 - px + 5p = 0$  が虚数解をもち、その 5 乗が実数になるとする。このときの  $p$  の値を求めよ。

[1999 東北大]

4 2 つの複素数  $\alpha, \beta$  が、条件  $\alpha^2 + \beta^2 = -\alpha\beta$ ,  $|\alpha + \beta| = 3$  を満たしているとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\frac{\beta}{\alpha}$  の偏角  $\theta$  を求めよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$  とする。
- (2)  $\alpha$  の絶対値を求めよ。
- (3) 複素数平面上で、 $\alpha, \beta, \alpha + \beta, -i\alpha, i\beta$  の表す 5 つの点を頂点とする五角形の面積を求めよ。

[1999 岡山大]

5  $\alpha, \beta$  は  $|\alpha + \beta| < 2$  を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 x^2 - (|\alpha| + |\beta|)x + 1$$

の  $0 \leq x \leq 1$  における最小値を求めよ。

[2000 東北大]

6 複素数  $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$  と、それに共役な複素数  $\bar{z}$  に対し、 $\alpha = z + \bar{z}$  とする。

- (1)  $\alpha$  は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。
- (2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち、そのいずれも有理数ではないことを示せ。
- (3) 有理数を係数とする 2 次方程式で、 $\alpha$  を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

[2000 九州大]

7 原点を  $O$  とする複素数平面上で、 $0$  でない複素数  $z, w$  の表す点をそれぞれ  $P(z), Q(w)$  とする。 $z$  に対して  $w$  を、 $O$  を始点とする半直線  $OP(z)$  上に  $Q(w)$  があり、 $|w| = \frac{2}{|z|}$  を満たすようにとる。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $w = \frac{2}{z}$  を示せ。
- (2)  $\pm 2, \pm 2i$  の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点  $P(z)$  が動く。このとき、 $Q(w) = P(z)$  となる  $z$  を求めよ。
- (3)  $P(z)$  が(2)の正方形の周上を動くとき、点  $Q(w)$  の描く図形を求めて図示せよ。

[2000 岡山大]

8 複素数平面上の点  $z$  を考える。

- (1) 実数  $a, c$  と複素数  $b$  が  $|b|^2 - ac > 0$  を満たすとき、 $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  を満たす点  $z$  は  $a \neq 0$  のとき、どのような図形を描くか。ただし、 $\bar{z}$  は  $z$  に共役な複素数を表す。
- (2)  $0$  でない複素数  $d$  に対して、 $dz(\bar{z}+1) = \bar{d}\bar{z}(z+1)$  を満たす点  $z$  はどのような図形を描くか。

[2001 九州大]

9 複素数平面上の点  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  を

$$a_1 = 1, a_2 = i, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

により定め、 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) とおく。ただし、 $i$  は虚数単位である。

- (1) 3 点  $b_1, b_2, b_3$  を通る円  $C$  の中心と半径を求めよ。
- (2) すべての点  $b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) は円  $C$  の周上にあることを示せ。

[2001 東京大]

**10** 次の問いに答えよ。ただし、偏角 $\theta$ は、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えるものとする。

- (1)  $|z+i|=|z-i|$ を満たす複素数 $z$ は、実数に限ることを示せ。
- (2) 複素数平面上で $z$ が実軸上を動くとき、複素数 $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ の動く範囲を求めよ。
- (3)  $z$ を未知数とする方程式 $(z+i)^9=(z-i)^9$ のすべての解 $z$ について $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ を求めよ。 [2002 名古屋大]

**11**  $a$ を実数とし、 $z$ を複素数とする。複素数平面上で、 $a$ 、 $z$ 、 $z^2$ 、 $z^3$ が表す4点があるひし形の4頂点になるとする。ただし、 $a$ と $z^2$ が表す頂点是对角線上にあるとする。このような $a$ と $z$ の値をすべて求めよ。 [2003 千葉大]

**12** 次の問いに答えよ。ただし、 $i$ は虚数単位とする。

- (1) 複素数 $z$ に対し、 $w = \frac{z-i}{z+i}$ とする。 $z$ が実軸上を動くとき、複素数平面上で $w$ を表す点が描く図形を求めよ。
- (2) 複素数 $z$ とその共役複素数 $\bar{z}$ に対し、 $w_1 = \frac{z-i}{z+i}$ 、 $w_2 = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$ とする。 $z \neq \pm i$ のとき、複素数平面上で $w_1$ を表す点を $P$ 、 $w_2$ を表す点を $Q$ とする。 $P$ 、 $Q$ と原点 $O$ が同一直線上にあることを示せ。 [2003 神戸大]

**13**  $O$ を原点とする複素数平面上で $6$ を表す点を $A$ 、 $7+7i$ を表す点を $B$ とする。ただし、 $i$ は虚数単位である。正の実数 $t$ に対し、 $\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 $P$ をとる。

- (1)  $\angle APB$ を求めよ。
- (2) 線分 $OP$ の長さが最大になる $t$ を求めよ。 [2003 東京大]

**14** 複素数 $\alpha$ 、 $\beta$ は $|\alpha-1|=1$ 、 $|\beta-i|=1$ を満たす。

- (1)  $\alpha+\beta$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。
- (2)  $(\alpha-1)(\beta-1)$ が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。 [2003 一橋大]

**15** 複素数平面上に異なる3点 $z$ 、 $z^2$ 、 $z^3$ がある。

- (1)  $z$ 、 $z^2$ 、 $z^3$ が同一直線上にあるような $z$ をすべて求めよ。
- (2)  $z$ 、 $z^2$ 、 $z^3$ が二等辺三角形の頂点になるような $z$ の全体を複素数平面上に図示せよ。また、 $z$ 、 $z^2$ 、 $z^3$ が正三角形の頂点になるような $z$ をすべて求めよ。

[2004 一橋大]

**16**  $\alpha$  は絶対値 1 の複素数とし、複素数  $z$  に対して、 $w = \frac{\overline{\alpha z} - 2}{2z - \alpha}$  とおく。ただし  $\overline{\alpha}$

は  $\alpha$  の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で、 $z$  が原点と点  $\alpha$  を通る直線上（ただし、点  $\frac{\alpha}{2}$  を除く）を動くとき、 $w$  の表す点は原点と点  $\overline{\alpha}$  を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で、 $z$  が不等式  $|z| > 1$  を満たすとき、複素数  $w$  を表す点はどのような図形上を動くか。 [2005 千葉大]

**17**  $t$  を実数とするとき、2次方程式  $z^2 + tz + t = 0$  について、次の問いに答えよ。

(1) この2次方程式が異なる2つの虚数解をもつような  $t$  の範囲と、そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1)の虚数解のうち、その虚部が正のものを  $z(t)$  で表す。 $t$  が(1)で求めた範囲を動くとき、複素数平面上で点  $z(t)$  が描く図形  $C$  を求め、図示せよ。

(3) 複素数平面上で、点  $z$  が(2)の図形  $C$  上を動くとき、 $w = \frac{iz}{z+1}$  で表される点  $w$  が描く図形を求め、図示せよ。 [2005 九州大]

**18**  $\alpha$  を実数でない複素数とし、 $\beta$  を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし、複素数  $w$  に対してその共役複素数を  $\overline{w}$  で表す。

(1) 複素数平面上で、関係式  $\alpha \overline{z} + \overline{\alpha z} = |z|^2$  を満たす複素数  $z$  の描く図形を  $C$  とする。このとき、 $C$  は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で、 $(z - \alpha)(\beta - \overline{\alpha})$  が純虚数となる複素数  $z$  の描く図形を  $L$  とする。 $L$  は(1)で定めた  $C$  と2つの共有点をもつことを示せ。また、その2点を  $P, Q$  とするとき、線分  $PQ$  の長さを  $\alpha$  と  $\overline{\alpha}$  を用いて表せ。

(3)  $\beta$  の表す複素数平面上の点を  $R$  とする。(2)で定めた点  $P, Q$  と点  $R$  を頂点とする三角形が正三角形であるとき、 $\beta$  を  $\alpha$  と  $\overline{\alpha}$  を用いて表せ。 [2015 筑波大]

**19** 多項式  $P(x)$  を、 $P(x) = \frac{(x+i)^7 - (x-i)^7}{2i}$  により定める。ただし、 $i$  は虚数単位

とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $P(x) = a_0x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$  とするとき、係数  $a_0, \dots, a_7$  をすべて求めよ。

(2)  $0 < \theta < \pi$  に対して、 $P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$  が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めた  $a_1, a_3, a_5, a_7$  を用いて、多項式  $Q(x) = a_1x^3 + a_3x^2 + a_5x + a_7$  を考える。 $\theta = \frac{\pi}{7}$  とし、 $k = 1, 2, 3$  について、 $x_k = \frac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$  とおく。このとき、

$Q(x_k) = 0$  が成り立つことを示し、 $x_1 + x_2 + x_3$  の値を求めよ。 [2016 東北大]

**20**  $z$  を複素数とする。複素数平面上の 3 点  $A(1), B(z), C(z^2)$  が鋭角三角形をなすような  $z$  の範囲を求め、図示せよ。 [2016 東京大]

**21**  $\alpha, \beta, \gamma$  を複素数とし、 $\bar{z}z + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \dots\dots (*)$  を満たす複素数  $z$  を考える。以下の問いに答えよ。

(1)  $z$  は、 $(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0$  を満たすことを示せ。

(2)  $|\alpha| = |\beta| \neq 0$  を仮定し、また  $\gamma$  は負の実数であると仮定する。このとき、 $(*)$  を満たす  $z$  がちょうど 2 個あるための必要十分条件を  $\alpha, \beta$  を用いて表せ。

[2017 東北大]

**22**  $w$  を 0 でない複素数、 $x, y$  を  $w + \frac{1}{w} = x + yi$  を満たす実数とする。

(1) 実数  $R$  は  $R > 1$  を満たす定数とする。 $w$  が絶対値  $R$  の複素数全体を動くとき、 $xy$  平面上の点  $(x, y)$  の軌跡を求めよ。

(2) 実数  $\alpha$  は  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  を満たす定数とする。 $w$  が偏角  $\alpha$  の複素数全体を動くとき、 $xy$  平面上の点  $(x, y)$  の軌跡を求めよ。 [2017 京大]

**23** 複素数平面上の原点以外の点  $z$  に対して、 $w = \frac{1}{z}$  とする。

(1)  $\alpha$  を 0 でない複素数とし、点  $\alpha$  と原点  $O$  を結ぶ線分の垂直二等分線を  $L$  とする。点  $z$  が直線  $L$  上を動くとき、点  $w$  の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち、虚部が正であるものを  $\beta$  とする。点  $\beta$  と点  $\beta^2$  を結ぶ線分上を点  $z$  が動くときの点  $w$  の軌跡を求め、複素数平面上に図示せよ。 [2017 東京大]

**24** 複素数平面上に3点  $O, A, B$  を頂点とする  $\triangle OAB$  がある。ただし、 $O$  は原点とする。 $\triangle OAB$  の外心を  $P$  とする。3点  $A, B, P$  が表す複素数を、それぞれ  $\alpha, \beta, z$  とするとき、 $\alpha\beta = z$  が成り立つとする。

- (1) 複素数  $\alpha$  の満たすべき条件を求め、点  $A(\alpha)$  が描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (2) 点  $P(z)$  の存在範囲を求め、複素数平面上に図示せよ。 [2017 北海道大]

**25**  $\alpha$  を複素数とする。等式  $\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$  を満たす複素数  $z$  をすべて求めよ。ただし、 $i$  は虚数単位である。 [2018 九州大]

**26** 複素数平面上で  $|z+i| - |z-i| = 1$  を満たす点  $z$  の全体を  $H$  とおく。以下の問いに答えよ。ただし、複素数の偏角  $\theta$  の範囲は  $0 \leq \theta < 2\pi$  とする。

- (1)  $H$  の点  $z$  に対して、 $z$  の偏角  $\theta_1$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2)  $H$  の点  $z$  に対して  $w = \frac{1}{z}$  とする。 $w$  の絶対値  $r_2$  と偏角  $\theta_2$  のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 [2018 熊本大]

**27** 複素数  $\alpha$  に対して、複素数平面上の3点  $O(0), A(\alpha), B(\alpha^2)$  を考える。次の条件(I), (II), (III)をすべて満たす複素数  $\alpha$  全体の集合を  $S$  とする。

- (I)  $\alpha$  は実数でも純虚数でもない。
- (II)  $|\alpha| > 1$  である。
- (III) 三角形  $OAB$  は直角三角形である。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha$  が  $S$  に属するとき、 $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$  であることを示せ。
- (2) 集合  $S$  を複素数平面上に図示せよ。
- (3)  $x, y$  を  $\alpha^2 = x + yi$  を満たす実数とする。 $\alpha$  が  $S$  を動くとき、 $xy$  平面上の点  $(x, y)$  の軌跡を求め、図示せよ。 [2018 筑波大]

**28**  $|z|^2 + 3 = 2(z + \bar{z})$  を満たす複素数  $z$  全体の集合を  $A$  とする。ただし  $\bar{z}$  は  $z$  の共役複素数である。

- (1) 集合  $A$  を複素数平面上に図示せよ。
- (2)  $A$  の要素  $z$  の偏角を  $\theta$  とする。ただし  $-\pi < \theta \leq \pi$  とする。 $z$  が  $A$  を動くとき、 $\theta$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3)  $z^{60}$  が正の実数となる  $A$  の要素  $z$  の個数を求めよ。 [2019 筑波大]



**29** 複素数平面上の異なる3点  $A, B, C$  を複素数  $\alpha, \beta, \gamma$  で表す。ここで  $A, B, C$  は同一直線上にないと仮定する。

(1)  $\triangle ABC$  が正三角形となる必要十分条件は、 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$  であることを示せ。

(2)  $\triangle ABC$  が正三角形のとき、 $\triangle ABC$  の外接円上に点  $P$  を任意にとる。このとき、 $AP^2 + BP^2 + CP^2$  および  $AP^4 + BP^4 + CP^4$  を外接円の半径  $R$  を用いて表せ。ただし2点  $X, Y$  に対し、 $XY$  とは線分  $XY$  の長さを表す。 [2020 東京工大]

---

# 複素数

## 【解答例と解説】

---

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 岡山大]

$$(1) \quad z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{4} z_0 = \frac{1}{2} \{ \cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ) \} \cdot 2(\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$= \cos(\theta - 60^\circ) + i \sin(\theta - 60^\circ)$$

$$(2) \quad z_2 = -\frac{1}{z_0} = \frac{\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ}{2(\cos\theta + i \sin\theta)} = \frac{1}{2} \{ \cos(180^\circ - \theta) + i \sin(180^\circ - \theta) \}$$

$$(3) \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{ より, } \theta - 60^\circ < \theta < 180^\circ - \theta$$

$\angle P_0 O P_1 = \theta - (\theta - 60^\circ) = 60^\circ$  で,  $O P_0 = 2$ ,  $O P_1 = 1$  から,

$$\angle O P_1 P_0 = 90^\circ$$

よって,  $O P_0$  は円の直径となり,  $\angle O P_2 P_0 = 90^\circ$

ここで,  $\angle P_0 O P_2 = (180^\circ - \theta) - \theta = 180^\circ - 2\theta$  で,  $O P_0 = 2$ ,

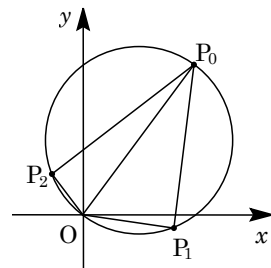
$O P_2 = \frac{1}{2}$  から,

$$\cos(180^\circ - 2\theta) = \frac{O P_2}{O P_0} = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって, } \cos 2\theta = -\frac{1}{4}, \quad 2 \cos^2 \theta - 1 = -\frac{1}{4}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{以上より, } z_0 = 2 \left( \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{10}}{4} i \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} i$$



### [解説]

(3)では、最初は一般的に4点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが、たいへんな計算が待ち構えていました。そこで、これは何か特別な事情があると推測したところ、やはりその通りでした。この発見がポイントです。

2

[1998 大阪大]

Q を原点とし, QP を実軸の正の部分とする複素数平面を設定する。

また,  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,  $w = \cos \beta + i \sin \beta$  とおく。

すると, 点 P を表す複素数は  $b$  となり, 点 A を表す複素数は,

$$b + (0 - b) \cdot \frac{a}{b} \{ \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \} = b - a\bar{z}$$

点 R, R' を表す複素数は, それぞれ  $c\bar{w}$ ,  $cw$  となる。

点 S を表す複素数は,

$$c\bar{w} + (0 - c\bar{w}) \cdot \frac{d}{c} \{ \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \} = c\bar{w} - d\bar{w}\bar{z} = \bar{w}(c - d\bar{z})$$

点 S' を表す複素数は,

$$cw + (0 - cw) \cdot \frac{d}{c} \{ \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \} = cw - dw\bar{z} = w(c - d\bar{z})$$

ここで  $b - a\bar{z} = u$ ,  $c - d\bar{z} = v$  とおくと,  $A(u)$ ,  $S(\bar{w}v)$ ,  $S'(wv)$  となる。

$$\begin{aligned} AS^2 - AS'^2 &= |\bar{w}v - u|^2 - |wv - u|^2 \\ &= (\bar{w}v - u)(w\bar{v} - \bar{u}) - (wv - u)(\bar{w}\bar{v} - \bar{u}) \\ &= -\bar{w}\bar{u}v - wu\bar{v} + w\bar{u}v + \bar{w}u\bar{v} = (\bar{u}v - u\bar{v})(w - \bar{w}) \end{aligned}$$

そこで,  $\bar{u}v - u\bar{v} = (b - a\bar{z})(c - d\bar{z}) - (b - a\bar{z})(c - dz)$

$$\begin{aligned} &= -bd\bar{z} - acz + bdz + ac\bar{z} \\ &= (bd - ac)(z - \bar{z}) = (bd - ac) \cdot 2i \sin \alpha \end{aligned}$$

また,  $w - \bar{w} = 2i \sin \beta$  より,

$$AS^2 - AS'^2 = (bd - ac)(4i^2) \sin \alpha \sin \beta = 4(ac - bd) \sin \alpha \sin \beta$$

### [解 説]

いろいろな方針が考えられますが, 上の解では複素数平面を利用してみました。それさえ決まれば, 計算を簡略化するための置き換えを適当に行っていくと, 結論を導くことはさほど困難ではありません。

3

[1999 東北大]

(1)  $x^2 - px + 5p = 0$  の解が  $\alpha, \beta$  より,  $\alpha + \beta = p, \alpha\beta = 5p$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 10p$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = p^3 - 15p^2$$

すると,  $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$

$$= (p^2 - 10p)(p^3 - 15p^2) - 25p^3$$

$$= p^5 - 25p^4 + 125p^3$$

条件より,  $\alpha^5 + \beta^5 = p^5$  なので,  $25p^4 - 125p^3 = 0$

$p \neq 0$  より,  $p = 5$

(2)  $x^2 - px + 5p = 0$  が虚数解をもつので,

$$D = p^2 - 20p < 0, \quad 0 < p < 20 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

このとき, 虚数解を  $\alpha, \bar{\alpha}$  とすると,  $\alpha + \bar{\alpha} = p, \alpha\bar{\alpha} = 5p$

条件より,  $\alpha^5$  が実数なので,  $\alpha^5 = \bar{\alpha}^5$

$$(\alpha - \bar{\alpha})(\alpha^4 + \alpha^3\bar{\alpha} + \alpha^2\bar{\alpha}^2 + \alpha\bar{\alpha}^3 + \bar{\alpha}^4) = 0$$

$\alpha$  は虚数なので  $\alpha \neq \bar{\alpha}$  から,  $\alpha^4 + \alpha^3\bar{\alpha} + \alpha^2\bar{\alpha}^2 + \alpha\bar{\alpha}^3 + \bar{\alpha}^4 = 0$

$$\alpha^4 + \bar{\alpha}^4 + \alpha\bar{\alpha}(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) + (\alpha\bar{\alpha})^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

ここで, (1)より  $\alpha^2 + \bar{\alpha}^2 = p^2 - 10p$

$$\alpha^4 + \bar{\alpha}^4 = (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2)^2 - 2\alpha^2\bar{\alpha}^2 = (p^2 - 10p)^2 - 50p^2 = p^4 - 20p^3 + 50p^2$$

②より,  $p^4 - 20p^3 + 50p^2 + 5p(p^2 - 10p) + 25p^2 = 0$

$$p^4 - 15p^3 + 25p^2 = 0$$

$p \neq 0$  より,  $p^2 - 15p + 25 = 0$

よって,  $p = \frac{15 \pm 5\sqrt{5}}{2}$  (この値はともに①を満たす)

### [解説]

解と係数の関係を利用する問題です。(1), (2)とも頻出題です。

4

[1999 岡山大]

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = -\alpha\beta \text{ で } \alpha \neq 0 \text{ より, } 1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 0$$

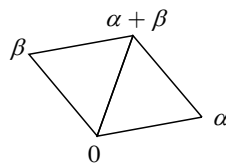
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos(\pm 120^\circ) + i \sin(\pm 120^\circ)$$

$\frac{\beta}{\alpha}$  の偏角  $\theta$  は  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$  より,  $\theta = 120^\circ, 240^\circ$

$$(2) \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 1 \text{ より, } \frac{|\beta|}{|\alpha|} = 1, |\alpha| = |\beta|$$

すると, 4点  $0, \alpha, \alpha + \beta, \beta$  を結ぶ四角形はひし形となり, しかも(1)より, 3点  $0, \alpha, \alpha + \beta$  を結ぶ三角形は正三角形となる。

条件より  $|\alpha + \beta| = 3$  なので,  $|\alpha| = |\beta| = 3$

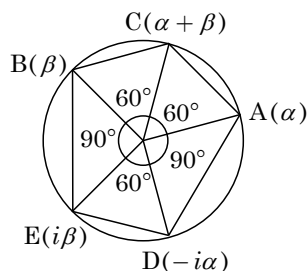


(3) 点  $-i\alpha$  は点  $\alpha$  を原点まわりに  $-90^\circ$  回転した点, 点  $i\beta$  は点  $\beta$  を原点まわりに  $90^\circ$  回転した点である。

(i)  $\theta = 120^\circ$  のとき

5点  $\alpha, \beta, \alpha + \beta, -i\alpha, i\beta$  は右図のような位置関係にあり,  $\angle BOE = \angle AOD = 90^\circ, \angle EOD = 60^\circ$  より, 五角形 ACBED の面積は,

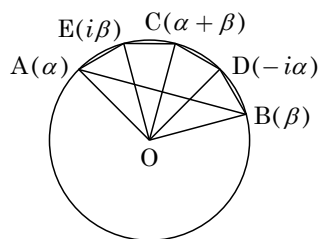
$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ\right) \times 3 + \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\right) \times 2 = 9 + \frac{27}{4}\sqrt{3}$$



(ii)  $\theta = 240^\circ$  のとき

5点  $\alpha, \beta, \alpha + \beta, -i\alpha, i\beta$  は右図のような位置関係にあり,  $\angle AOE = \angle COE = \angle COD = \angle BOD = 30^\circ$  より, 五角形 ABDCE の面積は,

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ\right) \times 4 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = 9 - \frac{9}{4}\sqrt{3}$$



### [解説]

複素数と図形に関する頻出問題です。(3)において, 位置関係の異なる2つの五角形を考えるのがポイントです。

5

[2000 東北大]

$|\alpha + \beta| = k$  ( $0 \leq k < 2$ ),  $|\alpha| + |\beta| = l$  とおくと,  $f(x) = \frac{1}{4}k^2x^2 - lx + 1$  となる。

(i)  $k = 0$  ( $|\alpha + \beta| = 0$ ) のとき

$f(x) = -lx + 1$  となり,  $l \geq 0$  なので,  $0 \leq x \leq 1$  における  $f(x)$  の最小値は,

$$f(1) = -l + 1 = -|\alpha| - |\beta| + 1$$

(ii)  $0 < k < 2$  ( $0 < |\alpha + \beta| < 2$ ) のとき

$$f(x) = \frac{1}{4}k^2 \left( x - \frac{2l}{k^2} \right)^2 - \frac{l^2}{k^2} + 1$$

ここで,  $\frac{2l}{k^2} - 1 = \frac{1}{k^2}(2l - k^2) = \frac{1}{k^2} \{ 2(|\alpha| + |\beta|) - |\alpha + \beta|^2 \}$

さて, 複素数  $\alpha, \beta$  に対して,  $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$  が成り立つので,

$$2(|\alpha| + |\beta|) - |\alpha + \beta|^2 \geq 2|\alpha + \beta| - |\alpha + \beta|^2 = 2k - k^2 = -(k-1)^2 + 1$$

$0 < k < 2$  において,  $-(k-1)^2 + 1 > 0$  なので,  $\frac{2l}{k^2} - 1 > 0$ ,  $\frac{2l}{k^2} > 1$

すると,  $0 \leq x \leq 1$  における  $f(x)$  の最小値は,

$$f(1) = \frac{1}{4}k^2 - l + 1 = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 - |\alpha| - |\beta| + 1$$

(i)(ii)より,  $f(x)$  の最小値は,  $f(1) = \frac{1}{4}|\alpha + \beta|^2 - |\alpha| - |\beta| + 1$

### [解説]

(ii)の場合をさらに分けて最小値を求めるのでは, 条件の  $|\alpha + \beta| < 2$  の意味が不明です。ここは  $|\alpha| + |\beta|$  と  $|\alpha + \beta|$  の関係がポイントとなりますが, その両者をつなぐのは, どう考えても三角不等式しかありません。なお, 昨年, 東大・理で, この不等式を利用する問題が出ています。

6

[2000 九州大]

$$(1) \alpha = z + \bar{z} = (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) + (\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ) = 2 \cos 20^\circ \text{ から, } \cos 20^\circ = \frac{\alpha}{2}$$

ここで,  $\cos 60^\circ = 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ$  より,

$$\frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{\alpha^3}{8} - 3 \cdot \frac{\alpha}{2}, \alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

よって,  $\alpha$  は 3 次方程式  $x^3 - 3x - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$  の解である。

$$(2) f(x) = x^3 - 3x - 1 \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f(-1) > 0, f(1) < 0 \text{ より, } f(x) = 0 \text{ は } 3$$

個の実数解をもつ。

$x$	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

ここで, この解が有理数であると仮定すると,  $p > 0$  で  $p$  と  $q$  を互いに素な整数として,  $x = \frac{q}{p}$  とおくことができる。

$$\textcircled{2} \text{ より, } \frac{q^3}{p^3} - 3 \cdot \frac{q}{p} - 1 = 0, q^3 - 3p^2q - p^3 = 0, q^3 = p^2(3q + p)$$

$p^2$  は  $q^3$  の約数となるが,  $p$  と  $q$  は互いに素な整数なので,  $p = 1$  となる。すなわち,  $f(x) = 0$  の解はすべて整数となる。

ところが,  $f(-2) = -3 < 0$ ,  $f(-1) = 1 > 0$ ,  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = -3 < 0$ ,  $f(2) = 1 > 0$  より,  $f(x) = 0$  の解は  $-2 < x < -1$ ,  $-1 < x < 0$ ,  $1 < x < 2$  に 1 つずつあり, 整数解は存在しない。

したがって, 3 個の実数解は, いずれも有理数ではない。

$$(3) a, b \text{ を有理数として, } x = \alpha \text{ を解とする 2 次方程式を, 一般性を失うことなく } x^2 + ax + b = 0 \text{ とできるので, } \alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \text{ となる。}$$

ここで,  $x^3 - 3x - 1$  を  $x^2 + ax + b$  で割ると,

$$x^3 - 3x - 1 = (x^2 + ax + b)(x - a) + (a^2 - b - 3)x + (ab - 1) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$x = \alpha \text{ を } \textcircled{4} \text{ に代入すると, } \textcircled{1} \textcircled{3} \text{ より } (a^2 - b - 3)\alpha + (ab - 1) = 0$$

$$a, b \text{ は有理数, } \alpha \text{ は無理数なので, } a^2 - b - 3 = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}, ab - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}$  より  $b = a^2 - 3$  となり,  $\textcircled{6}$  に代入して  $a^3 - 3a - 1 = 0$  となるが, この方程式の解は  $\textcircled{2}$  より有理数でない。よって,  $\textcircled{3}$  は成立しない。

以上より, 有理数を係数とする 2 次方程式で,  $\alpha$  を解とするものは存在しない。

### [解 説]

さまざまな分野の融合したおもしろい問題です。



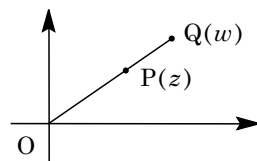
7

[2000 岡山大]

- (1) 半直線
- $OP(z)$
- 上に点
- $Q(w)$
- があるので,
- $k > 0$
- として
- $w = kz$
- より,
- $|w| = k|z|$

$$\text{条件より, } |w| = \frac{2}{|z|} \text{ なので, } k|z| = \frac{2}{|z|}, \quad k = \frac{2}{|z|^2}$$

$$\text{よって, } w = \frac{2}{|z|^2}z = \frac{2}{zz}z = \frac{2}{z}$$

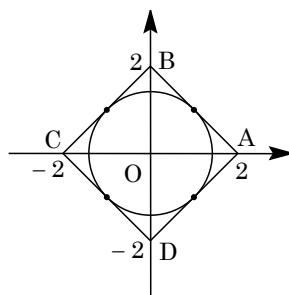


- (2)
- $w = z$
- とすると, (1)より,
- $z = \frac{2}{|z|^2}z$

$$z \neq 0 \text{ より, } |z|^2 = 2, \quad |z| = \sqrt{2}$$

よって, 点  $P(z)$  は原点を中心とする半径  $\sqrt{2}$  の円周上にあり,  $\pm 2, \pm 2i$  の表す 4 点を頂点とする正方形との共有点を求めると,

$$z = 1 \pm i, \quad -1 \pm i$$



- (3) まず, 点
- $P(z)$
- が線分
- $AB$
- 上を動くとき,

$$|z| = |z - (2 + 2i)| \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad |z| \leq 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(1) \text{より, } w = \frac{2}{z} \text{ なので, } \bar{z} = \frac{2}{w} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{より, } |\bar{z}| = |\overline{z - (2 + 2i)}|, \quad |\bar{z}| = |\bar{z} - (2 - 2i)|$$

$$\textcircled{3} \text{を代入して, } \left| \frac{2}{w} \right| = \left| \frac{2}{w} - (2 - 2i) \right|, \quad \frac{2}{|w|} = \frac{2|1 - (1 - i)w|}{|w|}$$

$$\left| (1 - i) \left( w - \frac{1}{1 - i} \right) \right| = 1, \quad \sqrt{2} \left| w - \frac{1 + i}{2} \right| = 1, \quad \left| w - \frac{1 + i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{より } |\bar{z}| \leq 2 \text{ となり, } \textcircled{3} \text{を代入して, } \left| \frac{2}{w} \right| \leq 2, \quad \frac{2}{|w|} \leq 2, \quad |w| \geq 1 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

したがって, 点  $P(z)$  が線分  $AB$  上を動くとき, 点  $Q(w)$  は④と⑤を満たす曲線, すなわち点  $\frac{1+i}{2}$  を中心とし, 半径  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  の円周上で, 原点中心の単位円の外部または周上の部分を動く。

さて, 点  $z_1$  が線分  $AB$  上を動くとき,  $z_1$  を原点のまわりに  $90^\circ$  だけ回転した点を  $z_2$ ,  $z_1$  を原点のまわりに  $180^\circ$  だけ回転した点を  $z_3$ ,  $z_1$  を原点のまわりに  $270^\circ$  だけ回転した点を  $z_4$  とすると,

$$z_2 = iz_1, \quad z_3 = -z_1, \quad z_4 = -iz_1$$

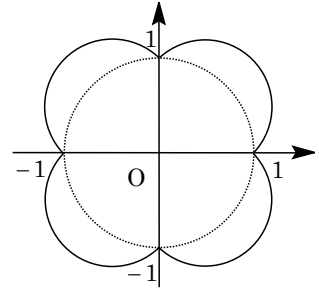
このとき点  $z_2$  は線分  $BC$  上, 点  $z_3$  は線分  $CD$  上, 点  $z_4$  は  $DA$  上をそれぞれ動く。

ここで,  $w_1 = \frac{2}{z_1}$  とおくと, 点  $w_1$  は④と⑤を満たす曲線上を動く。

$$\text{すると, } w_2 = \frac{2}{z_2} = \frac{2}{-iz_1} = i\frac{2}{z_1} = iw_1, \quad w_3 = \frac{2}{z_3} = \frac{2}{-z_1} = -w_1$$

$$w_4 = \frac{2}{z_4} = \frac{2}{iz_1} = -i\frac{2}{z_1} = -iw_1$$

以上より, 点  $w_2, w_3, w_4$  は, 動点  $w_1$  を原点のまわりに  $\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$  だけ回転した点となり, 点  $Q(w)$  の軌跡は, まとめると右図の実線のようになる。



### [解 説]

複素数平面上における軌跡の問題で, 昨年, 名市大・医に類題が出ています。そのとき考えたのと同じ方針で, 上の解を作りました。

8

[2001 九州大]

(1) 条件より,  $az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) なので,

$$z\bar{z} + \frac{\bar{b}}{a}z + \frac{b}{a}\bar{z} + \frac{c}{a} = 0, \quad \left(z + \frac{b}{a}\right)\left(\bar{z} + \frac{\bar{b}}{a}\right) = -\frac{c}{a} + \frac{b\bar{b}}{a^2}$$

$$a \text{ は実数より, } \left(z + \frac{b}{a}\right)\left(\overline{z + \frac{b}{a}}\right) = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}, \quad \left|z + \frac{b}{a}\right|^2 = \frac{|b|^2 - ac}{a^2}$$

$$\text{ここで, } |b|^2 - ac > 0 \text{ なので, } \left|z + \frac{b}{a}\right| = \frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$$

よって, 点  $z$  は中心  $-\frac{b}{a}$ , 半径  $\frac{\sqrt{|b|^2 - ac}}{|a|}$  の円を描く。

(2) 条件より,  $dz(\bar{z}+1) = \bar{d}\bar{z}(z+1)$ ,  $(d-\bar{d})z\bar{z} + dz - \bar{d}\bar{z} = 0$

(i)  $d = \bar{d}$  ( $d$  が実数) のとき

$dz - \bar{d}\bar{z} = 0$  より,  $d \neq 0$  より  $z = \bar{z}$  となり, 点  $z$  は実軸を描く。

(ii)  $d \neq \bar{d}$  ( $d$  が虚数) のとき

$$z\bar{z} + \frac{d}{d-\bar{d}}z - \frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\bar{z} = 0 \text{ より, } \left(z - \frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right)\left(\bar{z} + \frac{d}{d-\bar{d}}\right) = -\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}} \cdot \frac{d}{d-\bar{d}}$$

$$\left(z - \frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right)\left(\overline{z - \frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}}\right) = \frac{\bar{d}}{d-\bar{d}} \cdot \frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}, \quad \left|z - \frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|^2 = \left|\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|^2$$

よって,  $\left|z - \frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right| = \left|\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|$  より, 点  $z$  は中心  $\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}$ , 半径  $\left|\frac{\bar{d}}{d-\bar{d}}\right|$  の円を描く。

### [解 説]

複素数平面における円の方方程式が題材です。(2)でも共役複素数を前面に出さずに,  $z = x + yi$  として解けますが, 結論を  $d$  を用いて記述するのに苦労します。

9

[2001 東京大]

$$(1) a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ より, } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}, b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

まず,  $b_1 = \frac{a_2}{a_1} = i$  なので, ①より,

$$b_2 = 1 + \frac{1}{i} = 1 - i, \quad b_3 = 1 + \frac{1}{1-i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

3点  $b_1, b_2, b_3$  を通る円  $C$  の中心を  $x + yi$  とおくと,

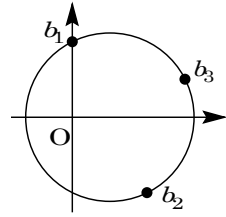
$$|x + yi - i| = |x + yi - (1 - i)| = \left| x + yi - \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right|$$

$$|x + (y-1)i| = |(x-1) + (y+1)i| = \left| \left( x - \frac{3}{2} \right) + \left( y - \frac{1}{2} \right) i \right|$$

$$\text{よって, } x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{1}{2} \right)^2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

②より  $2x - 4y = 1$ , ③より  $6x - 2y = 3$  なので,  $(x, y) = \left( \frac{1}{2}, 0 \right)$  となり, 円  $C$  の中心は点  $\frac{1}{2}$ , 半径は  $\left| \frac{1}{2} - i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$  である。



(2) すべての点  $b_n$  が円  $C$  の周上にあることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n=1$  のとき 点  $b_1$  は明らかに円  $C$  の周上にある。

(ii)  $n=k$  のとき 点  $b_k$  が円  $C$  の周上にあると仮定する。

$$\left| b_k - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

このとき, ①より  $b_{k+1} = 1 + \frac{1}{b_k}$  なので,  $b_k = \frac{1}{b_{k+1} - 1}$

$$\textcircled{4} \text{ に代入して, } \left| \frac{1}{b_{k+1} - 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \left| \frac{3 - b_{k+1}}{2(b_{k+1} - 1)} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{|3 - b_{k+1}|}{2|b_{k+1} - 1|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|b_{k+1} - 3| = \sqrt{5}|b_{k+1} - 1|, \quad |b_{k+1} - 1| : |b_{k+1} - 3| = 1 : \sqrt{5}$$

ここで, 2点 1, 3 を結ぶ線分を  $1 : \sqrt{5}$  に内分する点を  $z_1$ ,  $1 : \sqrt{5}$  に外分する点を  $z_2$  とすると, 点  $b_{k+1}$  は2点  $z_1, z_2$  を直径の両端とする円周上にある。

$$z_1 = \frac{\sqrt{5} \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{5} + 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{5} \cdot 1 - 1 \cdot 3}{\sqrt{5} - 1} = \frac{-3 + \sqrt{5}}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

すると円の中心は  $\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2}$ , 半径は  $\frac{1}{2}|z_1 - z_2| = \frac{\sqrt{5}}{2}$  となり, 円  $C$  に一致する。

(i)(ii)より, すべての点  $b_n$  は円  $C$  の周上にある。

### [解 説]

複素数平面上における円を題材とした問題です。それに加えて漸化式がスパイスとしてよく効いています。