

2021 入試対策
2次数学ランドマーク

積分法

理系

1998 - 2020

外林 康治 編著

電送数学舎

積分法

【問題一覧】

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 関数 $f(x) = \int_x^{2x+1} \frac{1}{t^2+1} dt$ について次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。
 (2) $f'(x) = 0$ となる x を求めよ。
 (3) $f(x)$ の最大値を求めよ。

[1998 筑波大]

2 (1) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ のとき、 $y = f(x)$ の逆関数 $y = g(x)$ を求めよ。

- (2) (1)の $f(x)$, $g(x)$ に対し、次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = bf(b) - af(a)$$

[1998 東北大]

3 2以上の自然数 n に対して

$$\int_0^1 t^{2n-1} e^t dt + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n-1 P_{2n-2k}}{2k+1} \right) e = (2n-1)!$$

を示せ。ここで e は自然対数の底である。

[1999 東京工大]

4 (1) $a_0 < b_0$, $a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0 , b_0 , a_1 , b_1 について、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} > \frac{a_1^2}{a_0^2+1} + \frac{b_1^2}{b_0^2+1}$$

- (2) n 個の自然数 x_1, x_2, \dots, x_n は互いに相異なり、 $1 \leq x_k \leq n$ ($1 \leq k \leq n$) を満たしているとする。このとき、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

[1999 京都大]

5 次を示せ。

- (1) $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \int_0^1 \sin \pi y dy = \frac{2}{\pi}$

[2000 金沢大]

6 $a > 0, t > 0$ に対して定積分 $S(a, t) = \int_0^a \left| e^{-x} - \frac{1}{t} \right| dx$ を考える。

(1) a を固定したとき、 t の関数 $S(a, t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。 [2001 東京工大]

7 $f(t)$ を連続関数、 x を実数として、関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x) = \int_0^1 |f(t) - x| dt$$

(1) $f(t) = e^t$ のとき、関数 $g(x)$ の増減を調べ、 $y = g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし、 $e = 2.71828 \dots$ は自然対数の底である。

(2) $f(t)$ は微分可能な単調増加関数で、その逆関数も微分可能とし、 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ とおく。このとき、 $g(x)$ は $x = a$ で最小値をとることを証明せよ。 [2001 岡山大]

8 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx \quad [2001 京都大]$$

9 $-1 < a < 1$ とする。

(1) 積分 $\int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx$ を求めよ。

(2) $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき、次の等式を示せ。

$$\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

(3) 次の等式を示せ。

$$\log \frac{1+a}{1-a} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1} \quad [2001 北海道大]$$

10 関数 $f(x) = 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3$ を考える。 n, k を自然数とし

$$g_n(k) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \dots + f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n \geq 2$ とする。

(1) n を固定する。 $2 \leq k \leq 3n$ の範囲で $g_n(k-1) \geq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。

また、 k が $1 \leq k \leq 3n$ の範囲を動くとき、 $g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2) (1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n}$ を求めよ。

[2001 大阪大]

11 n を 2 以上の整数とし、 $I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt \, dt$ ($x \geq 0$) と定める。

- (1) $n = 2$ のとき、 $I(x)$ の最大値を求めよ。
 (2) $I(x)$ の最大値が $\frac{n}{n^2 - 1}$ であるならば、 n は偶数であることを証明せよ。

[2002 千葉大]

12 次の問いに答えよ。

- (1) すべての正の実数 x, y に対して、不等式 $x \log x - x \log y - x + y \geq 0$ が成り立つことを示せ。ここで \log は自然対数を表す。
 (2) a, b は実数で $a < b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数で、 $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$ をみたす。このとき、不等式

$$\int_a^b f(x) \log f(x) \, dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) \, dx$$

が成り立つことを示せ。

- (3) a, b は実数で $a < b$ とする。閉区間 $[a, b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) \, dx \geq M \log M$$

が成り立つことを示せ。

[2002 九州大]

13 a は定数とし、 n は 2 以上の整数とする。関数 $f(x) = ax^n \log x - ax$ ($x > 0$) の最小値が -1 のとき、定積分 $\int_1^e f(x) \, dx$ の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

[2003 千葉大]

14 n を自然数とする。 $n+1$ 項の等差数列 x_0, x_1, \dots, x_n と等比数列 y_0, y_1, \dots, y_n が、 $1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 2$ 、 $1 = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 2$ を満たすとし、 $P(n), Q(n), R(n), S(n)$ を次で定める。

$$P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \quad S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$$

このとき極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n)$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} R(n)$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ をそれぞれ求めよ。

[2004 東北大]

15 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して, $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx$ とおく。ただし, $0! = 1$ とする。

(1) I_0 の値を求め, $n = 1, 2, \dots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また, これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0 \leq x \leq 2$ に対して $e^x \leq e^2$ であることを利用して, 次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。

[2004 九州大]

16 次の問いに答えよ。

(1) $f(x), g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とすると,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx = m \int_0^{\pi} f(\sin x) g(\cos x) dx$$

を証明せよ。

(2) 正の整数 m, n が $m\pi \leq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき,

$$\frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1 + \cos^2 nx)^2} dx \leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^2} dx$$

を証明せよ。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1 + \cos^2 nx)^2} dx$ を求めよ。

[2004 東京工大]

17 多項式の列 $f_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$ が, $f_0(x) = 2, f_1(x) = x,$

$$f_n(x) = x f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

を満たすとする。

(1) $f_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta, n = 0, 1, 2, \dots$ であることを示せ。

(2) $n \geq 2$ のとき, 方程式 $f_n(x) = 0$ の $|x| \leq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。こ

のとき, $\int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{x_n}^2 f_n(x) dx$ の値を求めよ。

[2004 名古屋大]

18 e を自然対数の底とし、数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $n \geq 3$ のとき、次の漸化式を示せ。

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2) $n \geq 1$ に対し、 $a_n > a_{n+1} > 0$ となることを示せ。

(3) $n \geq 2$ のとき、以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)} (e-2)$$

[2005 東京工大]

19 $f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1) 自然数 n, m に対し、 $\int_0^n t^m dt \leq \sum_{k=1}^n k^m \leq \int_0^n (t+1)^m dt$ を示せ。

(2) $f(x)$ の次数を r とするとき、次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{r+1}$$

(3) すべての自然数 n に対して $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

[2005 北海道大]

20 $x > 0$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{12(e^{3x} - 3e^x)}{e^{2x} - 1}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ ($x > 0$) は、実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち、任意の実数 a に対して、 $f(x) = a$ となる $x > 0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を $y = g(x)$ ($-\infty < x < \infty$) とする。このとき、定積分

$$\int_8^{27} g(x) dx$$

[2006 東京大]

21 以下の問いに答えよ。

(1) $0 < x < a$ を満たす実数 x, a に対し、次を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x} \frac{1}{t} dt < x \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$$

(2) (1)を利用して、次を示せ。

$$0.68 < \log 2 < 0.71$$

ただし、 $\log 2$ は 2 の自然対数とする。

[2007 東京大]

22 $a > 0$ に対し $I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} dx$, $I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。

(1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式 $I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a)$ ($n = 1, 2, \dots$) を示せ。

(3) 自然数 n に対して, $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。 [2007 東北大]

23 e は自然対数の底とする。 $t > e$ において関数 $f(t)$, $g(t)$ を次のように定める。

$$f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t-x} dx, \quad g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x} dx$$

(1) $f(t) - g(t)$ を t の 1 次式で表せ。

(2) $1 \leq x \leq e$ かつ $t > e$ のとき $\frac{1}{t-x} \leq \frac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ を示せ。

(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) - \frac{bt^2}{t-a}) = 0$ となる定数 a, b を求めよ。 [2008 筑波大]

24 次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1) $0 \leq x \leq 1$ を満たす実数 x に対して, 不等式 $\frac{x}{n+1} \leq \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし, 対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を, $a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) \left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。 [2008 広島大]

25 $f(x)$ を整式で表される関数とし, $g(x) = \int_0^x e^t f(t) dt$ とおく。任意の実数 x について, $x(f(x) - 1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt$ が成り立つとする。

(1) $xf''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) = 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。

(3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。 [2009 筑波大]

26 関数 $f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{4}-x} \log_4(1 + \tan t) dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) $f(0)$ の値を求めよ。
- (3) 条件 $a_1 = f(0)$, $a_{n+1} = f(a_n)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2010 熊本大]

27 (1) すべての自然数 k に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$$

(2) $m > n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して、次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn} \quad [2010 東京大]$$

28 自然数 n に対し、 $S_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x} dx$, $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ とおく。このとき

以下の各問いに答えよ。

- (1) 次の不等式を示せ。 $\left| S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \right| \leq \frac{1}{n+1}$
- (2) $T_n - 2S_n$ を n を用いて表せ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。 [2011 東京医歯大]

29 n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k a_i \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

- (1) a_2 および a_3 を求めよ。
- (2) 一般項 a_k を求めよ。
- (3) $b_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k}$ とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log 2$ を示せ。 [2012 東京工大]

30 微分可能な関数 $f(x)$ が、すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y$$

を満たし、さらに $f'(0) = 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。

[2013 新潟大]

31 n, m を 0 以上の整数とし、 $I_{n,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta \sin^m \theta d\theta$ とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n \geq 2$ のとき、 $I_{n,m}$ を $I_{n-2,m+2}$ を使って表せ。
- (2) 次の式 $I_{2n+1, 2m+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$ を示せ。
- (3) 次の式 $\frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{mC_0}{n+1} - \frac{mC_1}{n+2} + \dots + (-1)^m \frac{mC_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0! = 1$ とする。

[2014 千葉大]

32 自然数 n に対して、 $a_n = \int_0^1 \frac{x^2 + (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} dx$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対して、不等式 $\left| \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx - a_n \right| \leq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ を求めよ。
- (3) 自然数 n に対して、 $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。
- (4) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。

[2014 新潟大]

33 n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \frac{\cos(\pi x) + 1}{2} \quad (|x| \leq 1 \text{ のとき}), \quad g(x) = 0 \quad (|x| > 1 \text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし、 p, q を実数とする。 $|x| \leq \frac{1}{n}$ を満たす x に対して $p \leq f(x) \leq q$ が成り立つとき、次の不等式を示せ。

$$p \leq n \int_{-1}^1 g(nx) f(x) dx \leq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x) = -\frac{\pi}{2} \sin(\pi x) \quad (|x| \leq 1 \text{ のとき}), \quad h(x) = 0 \quad (|x| > 1 \text{ のとき})$$

このとき、次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{-1}^1 h(nx) \log(1 + e^{x+1}) dx \quad [2015 \text{ 東京大}]$$

34 $a > 0$ に対し、関数 $f(x)$ が、 $f(x) = \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt$ を満たすとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $0 < a \leq 2\pi$ において、 $g(a) = \int_{-a}^a f(t) \sin t dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。
[2016 北海道大]

35 連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t) dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t) dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t) dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) a と $f(0) + f(1)$ の値を求めよ。

(2) $g(x) = e^{-2x} f(x)$ とおくとき、 $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3) $f(x)$ を求めよ。
[2017 東京医歯大]

36 自然数 n に対し、定積分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$ を考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ を示せ。
- (2) $0 \leq I_{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ を求めよ。
- (4) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

[2018 名古屋大]

37 自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x)$$

と定める。ただし、 $(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

- (1) $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1}$ を示せ。
- (2) $\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right)$ の和を求めよ。

[2018 新潟大]

38 以下の問いに答えよ。ただし、 \log は自然対数、 e はその底とする。

- (1) b を実数とする。関数 $f(x) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$ は単調に減少することを示せ。

- (2) $a \leq b$ を満たす正の実数 a, b に対し、不等式

$$\frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq e^{-\frac{a^2}{2}} (b-a)$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。 $I_n = \int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

このとき極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log I_n$ を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$ を用いてもよい。

い。

[2019 大阪大]

39 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で、すべての実数 x に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$$

を満たすとする。ただし、 e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ の値を求めよ。また、 $f'(x) = 2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ。
- (2) $f(x)$ を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ は、 $0 < x < \pi$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。
- (4) (3) のただ 1 つの解を α とする。曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \alpha$)、 x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし、曲線 $y = f(x)$ ($\alpha \leq x \leq \pi$)、 x 軸および直線 $x = \pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

[2019 広島大]

40 xy 平面において、 x, y がともに整数であるとき、点 (x, y) を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し、

$$0 < x < n, 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

- (1) 不等式 $\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ を示せ。
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。
- (3) (2) で求めた極限値を L とする。不等式 $L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$ を示せ。 [2020 熊本大]

積分法

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 筑波大]

$$(1) \quad g(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \text{ とおくと, つねに } g(t) > 0 \text{ より,}$$

$$2x + 1 > x \quad (x > -1) \text{ のとき, } f(x) > 0$$

$$2x + 1 < x \quad (x < -1) \text{ のとき, } f(x) < 0$$

よって, $f(x) = 0$ となるのは, $2x + 1 = x$ のときだけである。

すなわち, $x = -1$

$$(2) \quad f'(x) = g(2x+1) \cdot (2x+1)' - g(x) = \frac{2}{(2x+1)^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2x^2 + 2x + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{-x(x+2)}{(2x^2 + 2x + 1)(x^2 + 1)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } x(x+2) = 0 \text{ から } x = 0, -2$$

- (3) (1)より, $f(x)$ の最大値は $x > -1$ に存在するので, $x > -1$ における $f(x)$ の値の増減を調べると, 右表のようになる。

x	-1	...	0	...	∞
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗		↘	

$$\text{すると, 最大値は } f(0) = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt \text{ と}$$

なり, ここで $t = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおくと,

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

[解説]

逆三角関数は高校数学の範囲外なので, 直接的な積分計算を回避して, 設問に答えていきます。この考え方が採用できたかどうかで, 本問の出来は決まります。

2

[1998 東北大]

(1) $y = f(x)$ を同値変形すると、 $x = g(y)$ となることより、

$$y = \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \text{ から, } (e^x + 1)(1 - y) = 1$$

$$e^x = -1 + \frac{1}{1 - y} = \frac{y}{1 - y}, \quad x = \log \frac{y}{1 - y}$$

$$\text{よって, } g(y) = \log \frac{y}{1 - y} \text{ となり, } g(x) = \log \frac{x}{1 - x}$$

(2) $x = f(t)$ とおくと $dx = f'(t)dt$, また $x = f(a)$ のとき $t = a$, $x = f(b)$ のとき $t = b$ となる。

さらに、 $y = f(x)$ の逆関数が $y = g(x)$ から、 $g(f(x)) = x$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx = \int_a^b g(f(t)) f'(t) dt = \int_a^b t f'(t) dt = \int_a^b x f'(x) dx$$

$$\text{よって, } \int_a^b f(x) dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(x) dx$$

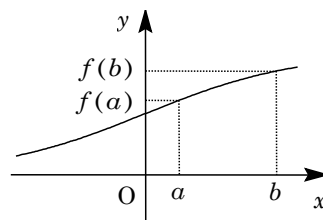
$$= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b x f'(x) dx$$

$$= \int_a^b \{ f(x) + x f'(x) \} dx$$

$$= \int_a^b (x f(x))' dx$$

$$= [x f(x)]_a^b$$

$$= b f(b) - a f(a)$$



[解説]

(2)の証明は、まず右上の図で考えました。この位置関係では面積を考えると与式の成立は明らかなのですが、これでは証明とは言えません。積分の第2項の積分区間を $[a, b]$ に変更することから、置換の式をみつけました。

3

[1999 東京工大]

$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ とおくと、部分積分により、

$$I_n = [t^n e^t]_0^1 - n \int_0^1 t^{n-1} e^t dt = e - nI_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{また、} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}^{2n-1}P_{2n-2k}}{2k+1} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2k+1)(2k-1)!} = (2n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{(2k+1)!} \\ &= (2n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right) \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

証明すべき式 $\int_0^1 t^{2n-1} e^t dt + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}^{2n-1}P_{2n-2k}}{2k+1} \right) e = (2n-1)! \cdots \cdots (*)$ は、②より、

$$(*) \Leftrightarrow \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} + e \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!} \right) = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さらに、 $\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} = J_n$ とおくと、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow J_n = 1 + e \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!} \right) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、①から、

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e - (2n+1)I_{2n}}{(2n+1)!} = \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{I_{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{e - 2nI_{2n-1}}{(2n)!} = \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{e}{(2n)!} + \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= J_n + e \left(\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n)!} \right) \end{aligned}$$

$$n \geq 2 \text{ で、} J_n = J_1 + e \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!} \right)$$

$$\text{ここで、} J_1 = I_1 = \int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e-1) = 1$$

よって、 $n \geq 2$ で④は成立するので、(*)は成立する。

[解 説]

最初は③式を数学的帰納法で証明しました。しかし②式を眺めていると、直接的な証明が可能ではないかと思えてきました。それで考え直して書いたのが上の解です。

4

[1999 京都大]

$$(1) \frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} - \frac{a_1^2}{a_0^2+1} - \frac{b_1^2}{b_0^2+1} = \frac{b_1^2 - a_1^2}{a_0^2+1} - \frac{b_1^2 - a_1^2}{b_0^2+1}$$

$$= \frac{(b_1^2 - a_1^2)(b_0^2 - a_0^2)}{(a_0^2+1)(b_0^2+1)}$$

$$0 < a_0 < b_0, 0 < a_1 < b_1 \text{ より, } \frac{b_1^2}{a_0^2+1} + \frac{a_1^2}{b_0^2+1} > \frac{a_1^2}{a_0^2+1} + \frac{b_1^2}{b_0^2+1}$$

(2) まず, $1 \leq i < j \leq n$ とし, $x_i = y_j, x_j = y_i, x_k = y_k (k \neq i, k \neq j)$ とすると, 条件より, $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$

さらに $x_i > x_j$ のとき, (1)より

$$\frac{x_i^2}{i^2+1} + \frac{x_j^2}{j^2+1} > \frac{x_j^2}{i^2+1} + \frac{x_i^2}{j^2+1} = \frac{y_i^2}{i^2+1} + \frac{y_j^2}{j^2+1}$$

すると, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > \sum_{k=1}^n \frac{y_k^2}{k^2+1}$ となり, 同様にして $1 \leq p < q \leq n$ で $x_p > x_q$ の

ときは, x_p の値と x_q の値を交換していくと, S_n の値は減少していく。よって, S_n の値が最小となるのは $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, すなわち $x_k = k$ のときである。

$$\text{以上より, } S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k^2+1} \right) = n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

さて, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ とすると, $x > 0$ で

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \text{ となり, } f(x) \text{ は}$$

単調に減少する。

右図において, 面積を比較して,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2+1} = \sum_{k=1}^n f(k) < \int_0^n f(x) dx = \int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とおき, $n = \tan \alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると,

$$\int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx = \int_0^\alpha \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^\alpha d\theta = \alpha < \frac{\pi}{2} < \frac{3.2}{2} = \frac{8}{5} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ より, } S_n > n - \frac{8}{5}, \text{ すなわち } \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

[解説]

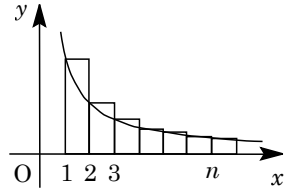
(2)の前半は, わかっているのにそれを表現するのが難しく, もどかしく感じてしまいます。87年に東大・理で同じ考え方をしている問題が出ています。

5

[2000 金沢大]

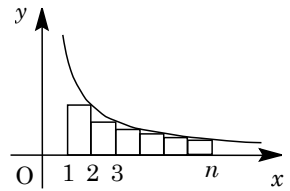
(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) とすると, $f(x)$ は減少関数より,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \\ = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$



(2) (1)と同様にして, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^n f(x) dx = \log n$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n \cdots \cdots \textcircled{2}$$



①②より, $\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} < \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \frac{1}{\log n} + 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

さて $n \rightarrow \infty$ のとき, $\frac{\log(n+1)}{\log n} - 1 = \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} \rightarrow 0$ から,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1$$

また, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\log n} + 1\right) = 1$ となるので, ③より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$

(3) まず, $\int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \cdots \cdots \textcircled{4}$

$k \leq x \leq k+1$ において, $\frac{|\sin \pi x|}{k+1} \leq \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| \leq \frac{|\sin \pi x|}{k}$ より,

$$\frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx \leq \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx \cdots \cdots \textcircled{5}$$

ここで, $y = x - k$ とおくと,

$$\int_k^{k+1} |\sin \pi x| dx = \int_0^1 |\sin \pi(y+k)| dy = \int_0^1 |\sin \pi y| dy = \int_0^1 \sin \pi y dy \\ = -\frac{1}{\pi} [\cos \pi y]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

そこで⑤において, $k=1$ から $k=n$ まで各辺の和をとると,

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

④より, $\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

$$(2) \text{より, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{\pi}$$

$$\text{したがって}\textcircled{6} \text{より, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \int_1^{n+1} \left| \frac{\sin \pi x}{x} \right| dx = \int_0^1 \sin \pi y dy = \frac{2}{\pi}$$

[解 説]

金沢大・理系の入試問題には、よく練られた難問が 1 題出題されますが、今年は本問がそれに当たります。(3)で(2)の極限值をどのように使うかということを考えていると、謎解きの楽しみが味わえます。

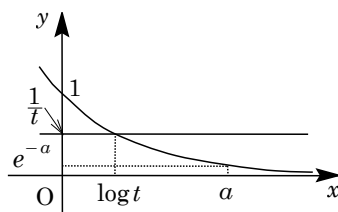
6

[2001 東京工大]

(1) (i) $\frac{1}{t} \geq 1$ ($0 < t \leq 1$) のとき

$$S(a, t) = \int_0^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx = \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_0^a$$

$$= e^{-a} - 1 + \frac{a}{t}$$

(ii) $e^{-a} \leq \frac{1}{t} < 1$ ($1 < t \leq e^a$) のとき $e^{-x} = \frac{1}{t}$ の解は, $x = \log t$ より,

$$S(a, t) = \int_0^{\log t} \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx + \int_{\log t}^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x\right]_0^{\log t} + \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_{\log t}^a = -\frac{2}{t} \log t + \frac{a-2}{t} + e^{-a} + 1$$

(iii) $\frac{1}{t} < e^{-a}$ ($t > e^a$) のとき

$$S(a, t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right) dx = -e^{-a} + 1 - \frac{a}{t}$$

すると, $0 < t \leq 1$ のとき $\frac{dS(a, t)}{dt} = -\frac{a}{t^2} < 0$ となり, $S(a, t)$ は単調に減少し, $t > e^a$ のとき $\frac{dS(a, t)}{dt} = \frac{a}{t^2} > 0$ となり, $S(a, t)$ は単調に増加する。また, $1 < t \leq e^a$ のとき $\frac{dS(a, t)}{dt} = \frac{2}{t^2} \log t - \frac{2}{t^2} - \frac{a-2}{t^2} = \frac{2 \log t - a}{t^2}$ となる。このとき $\frac{dS(a, t)}{dt} = 0$ の解は, $t = e^{\frac{a}{2}}$ であり, $S(a, t)$ の増減は右表のようになる。さらに, $S(a, t)$ は $t=1$, $t=e^a$ において連続なので, $t = e^{\frac{a}{2}}$ で最小値をとり,

$$m(a) = S\left(a, e^{\frac{a}{2}}\right) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1$$

t	1	...	$e^{\frac{a}{2}}$...	e^a
$\frac{dS(a, t)}{dt}$		-	0	+	
$S(a, t)$		↘		↗	

(2) (1)より, $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1}{a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2$ ここで, $-\frac{a}{2} = b$ とおくと, $a \rightarrow 0$ のとき $b \rightarrow 0$ となり,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow 0} \left(\frac{e^b - 1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

[解 説]

積分計算についての理解を問う問題です。(2)の極限は e の定義を適用するものです。

7

[2001 岡山大]

(1) $f(t) = e^t$ のとき, $g(x) = \int_0^1 |e^t - x| dt$ となる。

(i) $x < 1$ のとき $g(x) = \int_0^1 (e^t - x) dt = [e^t - xt]_0^1 = -x + e - 1$

このとき, 関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii) $1 \leq x \leq e$ のとき

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^{\log x} -(e^t - x) dt + \int_{\log x}^1 (e^t - x) dt = -[e^t - xt]_0^{\log x} + [e^t - xt]_{\log x}^1 \\ &= -(x-1) + x \log x + (e-x) - x(1 - \log x) = 2x \log x - 3x + e + 1 \end{aligned}$$

$$g'(x) = 2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 3 = 2 \log x - 1 \text{ とな}$$

り, 関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

極小値は, $g(\sqrt{e}) = e - 2\sqrt{e} + 1 = (\sqrt{e} - 1)^2$

である。

x	1	...	\sqrt{e}	...	e
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$e-2$	↘		↗	1

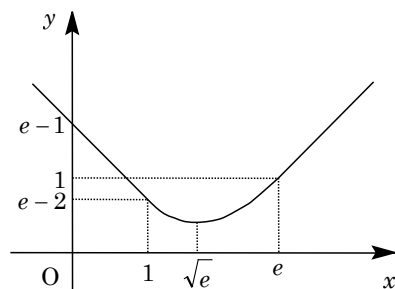
(iii) $x > e$ のとき

$$g(x) = \int_0^1 -(e^t - x) dt = x - e + 1$$

このとき, 関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より, $y = g(x)$ のグラフの概形は右図

のようになる。



(2) 条件より $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$, また $b = f(0)$, $c = f(1)$

とおく。すると, $f(t)$ は単調増加関数なので, $b < a < c$ となる。

さらに, $F'(t) = f(t)$ とおくと,

(i) $x < b$ のとき $g(x) = \int_0^1 \{f(t) - x\} dt = [F(t) - xt]_0^1 = F(1) - F(0) - x$

このとき, 関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii) $b \leq x \leq c$ のとき

$f(u) = x$, すなわち $u = f^{-1}(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^u -\{f(t) - x\} dt + \int_u^1 \{f(t) - x\} dt = -[F(t) - xt]_0^u + [F(t) - xt]_u^1 \\ &= -2F(u) + 2xu - x + F(0) + F(1) \end{aligned}$$

$$g'(x) = -2F'(u) \frac{du}{dx} + 2u + 2x \frac{du}{dx} - 1 = -2f(u) \frac{du}{dx} + 2x \frac{du}{dx} + 2u - 1$$

$$= -2f(f^{-1}(x)) \frac{du}{dx} + 2x \frac{du}{dx} + 2u - 1 = -2x \frac{du}{dx} + 2x \frac{du}{dx} + 2u - 1$$

$$= 2u - 1 = 2f^{-1}(x) - 1$$

条件より $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ なので、 $f^{-1}(a) = \frac{1}{2}$ である。

さて、 $f(t)$ が単調増加関数なので、 $f^{-1}(x)$ も単調増加関数となり、 $g'(x) = 0$ すなわち $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}$ の解は $x = a$ となる。

さらに $g'(x)$ の符号は、 $x = a$ の前後で負から正に変わる。

x	b	⋯	a	⋯	c
$g'(x)$		−	0	+	
$g(x)$		↘		↗	

すると、関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

$$(iii) \ x > c \text{ のとき } g(x) = \int_0^1 -\{f(t) - x\} dt = -F(1) + F(0) + x$$

このとき、関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より、 $g(x)$ はすべての x に対して連続なので、 $x = a$ で最小値をとる。

【解説】

(2)は(1)を一般化したもので、同じように論理を展開することができます。しかし、逆関数の扱い方など、かなり難易度はアップします。

8

[2001 京都大]

$nx = t$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = n$ より,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx = \int_0^{n^2\pi} e^{-\frac{t}{n}} |\sin t| \frac{1}{n} dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} |\sin t| dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n^2} \left| \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} \sin t dt \right| \end{aligned}$$

ここで, $(e^{-\frac{t}{n}} \sin t)' = -\frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \sin t + e^{-\frac{t}{n}} \cos t \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$(e^{-\frac{t}{n}} \cos t)' = -\frac{1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \cos t - e^{-\frac{t}{n}} \sin t \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①+②× n より, $(e^{-\frac{t}{n}} \sin t + ne^{-\frac{t}{n}} \cos t)' = -\frac{n^2+1}{n} e^{-\frac{t}{n}} \sin t$

$$e^{-\frac{t}{n}} \sin t = -\frac{n}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{t}{n}} (\sin t + n \cos t) \right\}'$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}} \sin t dt &= -\frac{n}{n^2+1} \left[e^{-\frac{t}{n}} (\sin t + n \cos t) \right]_{(k-1)\pi}^{k\pi} \\ &= -\frac{n}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{k\pi}{n}} n \cos k\pi - e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} n \cos(k-1)\pi \right\} \\ &= -\frac{n^2}{n^2+1} \left\{ e^{-\frac{k\pi}{n}} (-1)^k - e^{-\frac{(k-1)\pi}{n}} (-1)^{k-1} \right\} = -\frac{n^2}{n^2+1} (-1)^k (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) e^{-\frac{k\pi}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって, } I_n &= \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \sum_{k=1}^{n^2} e^{-\frac{k\pi}{n}} = \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \cdot \frac{e^{-\frac{\pi}{n}} (1 - e^{-\frac{\pi}{n} n^2})}{1 - e^{-\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{n}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) \cdot \frac{1 - e^{-n\pi}}{e^{\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} (1 + e^{\frac{\pi}{n}}) (1 - e^{-n\pi}) \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}} - 1} \end{aligned}$$

以上より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin nx| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{\pi} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

[解 説]

積分と数列の和に関する超頻出問題です。正確な計算力がすべてです。

9

[2001 北海道大]

$$(1) \int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[-\log|1-x| + \log|1+x| \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_0^a = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} \quad (-1 < a < 1 \text{ より})$$

$$(2) \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \int_0^a \frac{1-1+x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx - \int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} dx$$

$$\text{ここで, (1)より, } \int_0^a \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a}$$

$$\text{また, } \int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2} dx = \int_0^a (1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) dx$$

$$= \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^a$$

$$= a + \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} + \dots + \frac{a^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{よって, } \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

$$(3) \text{ (i) } 0 \leq a < 1 \text{ のとき } 0 \leq x \leq a \text{ において, } 0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$$

$$0 \leq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \leq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-a^2} dx = \frac{1}{1-a^2} \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^a = \frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$$

$$\text{よって, } n \rightarrow \infty \text{ のとき, } \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \rightarrow 0$$

$$\text{(ii) } -1 < a < 0 \text{ のとき } a \leq x \leq 0 \text{ において, } 0 \leq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} \leq \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$$

$$0 \leq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \leq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-a^2} dx = \frac{1}{1-a^2} \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_a^0 = -\frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$$

$$\text{よって, } n \rightarrow \infty \text{ のとき, } \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = -\int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \rightarrow 0$$

$$\text{(i)(ii)より, } -1 < a < 1 \text{ のとき, } n \rightarrow \infty \text{ とすると, } \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx \rightarrow 0$$

$$\text{すると, (2)より, } \log \frac{1+a}{1-a} - 2 \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} dx = 2 \sum_{k=0}^n \frac{a^{2k+1}}{2k+1} \text{ なるので,}$$

$$\log \frac{1+a}{1-a} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

[解 説]

無限級数の値を積分を用いて求めるという頻出題です。パズルのような誘導がついているおもしろい問題です。

10

[2001 大阪大]

$$(1) \quad g_n(k-1) \geq g_n(k) \text{ より, } g_n(k) - g_n(k-1) \leq 0 \text{ なので, } f\left(\frac{k\pi}{3n}\right) \leq 0 \dots\dots\dots ①$$

$$\text{さて, } f(x) = 4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 = (2 \cos x - 3)(2 \cos x - 1)$$

$$f(x) \leq 0 \text{ とすると, } \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ なので, } ① \text{ より } \cos \frac{k\pi}{3n} \geq \frac{1}{2} \dots\dots\dots ②$$

$$2 \leq k \leq 3n \text{ から, } \frac{2\pi}{3n} \leq \frac{k\pi}{3n} \leq \pi \text{ となり, } ② \text{ を満たすのは, } \frac{2\pi}{3n} \leq \frac{k\pi}{3n} \leq \frac{1}{3}\pi$$

よって, $2 \leq k \leq n$ となり, 求める k は, $k = 2, 3, \dots, n-1, n$

すると, $g_n(k-1) > g_n(k)$ となるのは $2 \leq k \leq n-1$, また $g_n(k-1) = g_n(k)$ となるのは $k = n$, さらに $g_n(k-1) < g_n(k)$ となるのは $n+1 \leq k \leq 3n$ なので,

$$g_n(1) > g_n(2) > \dots > g_n(n-1) = g_n(n) < g_n(n+1) < \dots < g_n(3n)$$

よって, $g_n(k)$ が最小となる k は, $n-1$ または n である。

$$(2) \quad (1) \text{ より, } G_n = g_n(n) = f\left(\frac{\pi}{3n}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3n}\right) + \dots\dots\dots + f\left(\frac{n\pi}{3n}\right) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{\pi}{3n}k\right) = \frac{3}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{\pi}{3n}k\right) = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \\ &= \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3) dx = \frac{3}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos 2x - 8 \cos x + 5) dx \\ &= \frac{3}{\pi} \left[\sin 2x - 8 \sin x + 5x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} + \frac{5}{3}\pi \right) = -\frac{21\sqrt{3}}{2\pi} + 5 \end{aligned}$$

[解 説]

(1)は階差数列を用いた最大・最小問題, (2)は区分求積法による極限計算となっています。一見, 畑違いの分野が1つの問題にうまく収まっています。

11

[2002 千葉大]

(1) $n = 2$ のとき, $I(x) = \int_0^x \sin t \sin 2t dt = \int_0^x -\frac{1}{2}(\cos 3t - \cos t) dt$
 $= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \sin 3t - \sin t \right]_0^x = -\frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x$
 $I'(x) = -\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x = -\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x) = \sin 2x \sin x$

$I(x)$ は周期 2π の周期関数なので, $0 \leq x \leq 2\pi$ で考えても一般性は失われない。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$...	π	...	$\frac{3}{2}\pi$...	2π
$I'(x)$	0	+	0	-	0	-	0	+	0
$I(x)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0

したがって, 右表より, 最大値は $I\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ となる。

(2) $I(x) = \int_0^x \sin t \sin nt dt = \int_0^x -\frac{1}{2} \{ \cos(n+1)t - \cos(n-1)t \} dt$
 $= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} \sin(n+1)t - \frac{1}{n-1} \sin(n-1)t \right]_0^x$
 $= -\frac{1}{2(n+1)} \sin(n+1)x + \frac{1}{2(n-1)} \sin(n-1)x$

$-1 \leq \sin(n+1)x \leq 1, -1 \leq \sin(n-1)x \leq 1$ より,

$$I(x) \leq \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n-1)} = \frac{n-1+n+1}{2(n+1)(n-1)} = \frac{n}{n^2-1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

これより, $I(x)$ の最大値が $\frac{n}{n^2-1}$ であるのは, ①の等号が成立するときなので,

$$\sin(n+1)x = -1 \dots\dots\dots \textcircled{2}, \sin(n-1)x = 1 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より, } m \text{ を } 0 \text{ 以上の整数として, } (n+1)x = 2m\pi + \frac{3}{2}\pi \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} \text{より, } l \text{ を } 0 \text{ 以上の整数として, } (n-1)x = 2l\pi + \frac{1}{2}\pi \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} \text{より, } 2nx = 2m\pi + 2l\pi + 2\pi, nx = (m+l+1)\pi \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4} - \textcircled{5} \text{より, } 2x = 2m\pi - 2l\pi + \pi, x = \left(m-l + \frac{1}{2}\right)\pi \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{6}\textcircled{7} \text{より, } n\left(m-l + \frac{1}{2}\right)\pi = (m+l+1)\pi, \frac{1}{2}n = (m+l+1) - n(m-l)$$

以上より, l, m, n は整数なので, n は偶数となる。

[解 説]

(2)でも, (1)と同じように微分して増減表と考えました。ところが, それを実行するのは複雑そうに思えたので, 見方を変えたところ, あっさり結論が導けました。おもしろい問題です。

12

[2002 九州大]

(1) $x > 0, y > 0$ に対して, $t = \frac{x}{y} > 0$ とおくと,

$$x \log x - x \log y - x + y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \log \frac{x}{y} - \frac{x}{y} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow t \log t - t + 1 \geq 0$$

ここで, $h(t) = t \log t - t + 1$ とおくと,

$$h'(t) = \log t + t \cdot \frac{1}{t} - 1 = \log t$$

右表より, $t > 0$ のとき, $h(t) \geq 0$ となる。

t	0	...	1	...
$h'(t)$		-	0	+
$h(t)$		↘	0	↗

よって, $x \log x - x \log y - x + y \geq 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$

(2) 区間 $[a, b]$ において, $f(x) > 0, g(x) > 0$ なので, $\textcircled{1}$ より,

$$f(x) \log f(x) - f(x) \log g(x) - f(x) + g(x) \geq 0$$

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx - \int_a^b f(x) \log g(x) dx - \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \geq 0$$

条件より, $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx \cdots \cdots \textcircled{2}$ なので,

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log g(x) dx \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(3) $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ より, $\int_a^b f(x) dx = (b-a)M = \int_a^b M dx \cdots \cdots \textcircled{4}$

これより, $g(x) = M$ とおくと, $\textcircled{2}$ をみたすので, $\textcircled{3}$ より,

$$\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq \int_a^b f(x) \log M dx = \log M \int_a^b f(x) dx$$

$\textcircled{4}$ の関係から, $\int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq (b-a)M \log M$ となり,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \log f(x) dx \geq M \log M$$

[解説]

(1)から(2)へはスムーズに流れ, (2)から(3)へはちょっと引っかかるという, うまい誘導がついています。

13

[2003 千葉大]

$f(x) = ax^n \log x - ax = a(x^n \log x - x)$ に対して,

$$f'(x) = a(nx^{n-1} \log x + x^{n-1} - 1) = a\{x^{n-1}(n \log x + 1) - 1\}$$

ここで, $g(x) = x^{n-1}(n \log x + 1) - 1$ とおくと, $f'(x) = ag(x)$ となり,

$$g'(x) = (n-1)x^{n-2}(n \log x + 1) + nx^{n-2} = x^{n-2}\{n(n-1)\log x + 2n - 1\}$$

$x > 0$ において, $g'(x) = 0$ の解は, $n \geq 2$ より,

$$\log x = -\frac{2n-1}{n(n-1)}, \quad x = e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$$

この値を $x = \alpha$ とおくと, $g(x)$ の増減は右表のようになり, $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -1$, $g(1) = 0$ に注意すると, $0 < x < 1$ のとき $g(x) < 0$, $x > 1$ のとき $g(x) > 0$ である。

x	0	...	α	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		↘		↗

(i) $a > 0$ のとき

$f(x)$ の増減は, 右表のようになり, 最小値は $f(1) = -a$ となる。

条件から, $-a = -1$, $a = 1$ となり, $a > 0$ も満たす。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-a$	↗

(ii) $a = 0$ のとき

$f(x) = 0$ より, 最小値が -1 にはならない。

(iii) $a < 0$ のとき

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ より, 最小値は存在しない。

(i)(ii)(iii)より, $f(x) = x^n \log x - x$ である。

このとき, $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x^n \log x - x) dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n+1} [x^{n+1} \log x]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e x^n dx - \frac{1}{2} [x^2]_1^e \\ &= \frac{1}{n+1} e^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} [x^{n+1}]_1^e - \frac{1}{2} (e^2 - 1) \\ &= \frac{n}{(n+1)^2} e^{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[解説]

$g(1) = 0$ は式の形から見つけます。ただ, $g(x)$ の増減について, チェックが少々面倒です。なお, $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \log x = 0$ は証明なしで用いています。

14

[2004 東北大]

等差数列 x_0, x_1, \dots, x_n の公差は $\frac{1}{n}$, 等比数列 y_0, y_1, \dots, y_n の公比は $2^{\frac{1}{n}}$ より,

$$x_k = 1 + \frac{k}{n}, \quad y_k = 2^{\frac{k}{n}}$$

すると, $P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \int_0^1 (1+x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}}$ より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(n) = \int_0^1 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\log 2} \right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}$$

また, $Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ より,

$$\log Q(n) = \frac{1}{n} \log(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \log Q(n) &= \int_0^1 \log(1+x) dx = \left[(1+x) \log(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx \\ &= 2 \log 2 - 1 = \log \frac{4}{e} \end{aligned}$$

ここで, $f(x) = \log x$ は $x > 0$ において連続であることより, $\lim_{n \rightarrow \infty} Q(n) = \frac{4}{e}$

同様にして, $S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n}$ より,

$$\log S(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log 2^{\frac{k}{n}} = \frac{\log 2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{\log 2}{2n} (n+1)$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log S(n) = \frac{\log 2}{2} = \log \sqrt{2}$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) = \sqrt{2}$

[解 説]

単純な構図の問題ですが, 4つの極限とも, きれいな数値として求まります。いろいろな解法がありますが, 最初に考えたものを記しました。

15

[2004 九州大]

$$(1) I_0 = \frac{(-1)^0}{0!} \int_0^2 x^0 e^x dx = \int_0^2 e^x dx = [e^x]_0^2 = e^2 - 1$$

$$\begin{aligned} \text{また, } I_n &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx = \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ [x^n e^x]_0^2 - \int_0^2 nx^{n-1} e^x dx \right\} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} 2^n e^2 - \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^2 x^{n-1} e^x dx = \frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!} + I_{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{すると, } I_1 = \frac{-2e^2}{1!} + (e^2 - 1) = -e^2 - 1, \quad I_2 = \frac{4e^2}{2!} + (-e^2 - 1) = e^2 - 1 \text{ より,}$$

$$I_3 = \frac{-8e^2}{3!} + (e^2 - 1) = -\frac{1}{3}e^2 - 1$$

$$(2) 0 \leq x \leq 2 \text{ に対して } e^x \leq e^2 \text{ より,}$$

$$\frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^2 dx = \frac{e^2}{n!} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^2 = \frac{2^{n+1} e^2}{(n+1)!}$$

ここで, $n \geq 2$ のとき,

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^{n-1}}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (n+1)} \leq 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \cdots \cdots (*)$$

なお, $n=1$ のときも $\frac{2^2}{2!} = 2 \left(\frac{2}{3} \right)^0$ となり, (*) は成立している。

$$\text{よって, } \frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$$(3) (1) \text{ から, } I_n - I_{n-1} = \frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!} \text{ より, } \frac{(-1)^n 2^n}{n!} = \frac{1}{e^2} (I_n - I_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2} \sum_{k=1}^n (I_k - I_{k-1}) = \frac{1}{e^2} (I_n - I_0) = \frac{1}{e^2} (I_n - e^2 + 1)$$

$$\text{よって, } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = 1 + \frac{1}{e^2} (I_n - e^2 + 1) = \frac{1}{e^2} (I_n + 1)$$

$$\text{さて, (2) より, } |I_n| = \frac{1}{n!} \int_0^2 x^n e^x dx \leq 2e^2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $|I_n| \rightarrow 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}$$

[解説]

(3) が本題ですが, それを解くのに無理が生じないように, (1) と (2) が設けられています。配慮の深い問題です。

16

[2004 東京工大]

(1) まず、積分区間 $0 \leq x \leq m\pi$ を m 等分して、

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $t = x - (k-1)\pi$ とおくと、

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f(\sin(t+(k-1)\pi))g(\cos(t+(k-1)\pi))dt$$

さて、 $\sin(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1} \sin t$ 、 $\cos(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1} \cos t$ と表すことができ、さらに $f(x)$ 、 $g(x)$ は偶関数より、

$$f(\sin(t+(k-1)\pi)) = f((-1)^{k-1} \sin t) = f(\sin t)$$

$$g(\cos(t+(k-1)\pi)) = g((-1)^{k-1} \cos t) = g(\cos t)$$

$$\text{よって、} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)dt \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2}\text{より、} \int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = m \int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$$

(2) $I_n = \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx$ とし、 $nx = t$ とおくと、

$$I_n = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2} \cdot \frac{dt}{n} = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx$$

ここで、 $m\pi \leq n < (m+1)\pi$ において、 $\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} \geq 0$ なので、

$$I_n \geq \frac{1}{n} \int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \geq \frac{1}{(m+1)\pi} \int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$I_n \leq \frac{1}{n} \int_0^{(m+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \leq \frac{1}{m\pi} \int_0^{(m+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さて、 $f(x) = |x|$ 、 $g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ とおくと、 $f(x)$ 、 $g(x)$ は連続な偶関数なので、(1)の結論から、

$$\int_0^{m\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx = m \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx = m \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\text{同様にして、} \int_0^{(m+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} dx = (m+1) \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3} \sim \textcircled{6}\text{より、} \frac{m}{(m+1)\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx \leq I_n \leq \frac{m+1}{m\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx$$

(3) まず、 $\cos x = u$ とおくと、

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2} dx = \int_1^{-1} \frac{1}{(1+u^2)^2} (-du) = 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2} du$$

さらに、 $u = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) とおくと、

$$\begin{aligned}
2 \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2} du &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta) d\theta = \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

そこで、(2)の結論から、

$$\frac{m}{(m+1)\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \leq I_n \leq \frac{m+1}{m\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ となるので、はさみうちの原理を用いると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2} dx = \lim_{m \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}$$

[解説]

(3)の極限值が到達点となりますが、このために与えられた誘導の意味を考えながら、(1)と(2)の証明を進めます。決して易しくはありませんが、演習する価値の大きな一題です。