２０２２ 入試対策

２次数学ランドマーク

図形と式40題

文系＋理系 24か年

１９９８ － ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

図 形 と 式

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 座標平面において，2 点 P，Q をそれぞれ直線 $x=-1$，$x=2$ 上の点とし，直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき，2 点 P，Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。 ［1998 千葉大］

2 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点 $(a,\ b)$ の集合を式で表し，図示せよ。

$x-y<0$，$x+y<2$，$ax+by<1$ ［1998 北海道大・理］

3 c を $c>\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。［1999 東京大・文］

4 曲線 $y=x^2$ の点 $(a,\ a^2)$ での接線を l とする。l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。 ［1999 東北大・理］

5 次の問いに答えよ。

(1) 点 $(1,\ 0)$ を通って傾きが -4 の直線と，関数 $y=x^2-4x$ のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2) 2 つの関数 $y=x^2-4x$，$y=k(x-a)$ のグラフが，どんな k の値に対しても $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

［2000 神戸大・文］

6 xy 平面内の領域 $-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$ において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。 ［2000 東京大・文］

7 放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P，Q が存在するような a の範囲を求めよ。 ［2001 一橋大］

8 実数 t に対して，xy 平面上の直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は，t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2) t が $t\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。 ［2002 神戸大・文］

9 a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\ 3x+y \geqq b,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。 [2003 東京大・文]

10 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。
△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。
このとき, a の値を求めよ。 [2004 東京大]

11 不等式 $y \leqq -(x-1)^2$ の表す領域を A_1，不等式 $y \leqq -(x+1)^2$ の表す領域を A_2 とする。 A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また，不等式 $y \geqq (x-a)^2+b$ の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。

(1) $a=0$，$b=-1$ とするとき, A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(2) A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を a, b で表せ。

(3) A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき点$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。 [2005 金沢大・文]

12 a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\ g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1) 2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた範囲に属する a に対して，2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。 C_a の面積を a で表せ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くとき，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。 [2005 一橋大]

13　θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x = t\cos\theta,\quad y = 1 - t^2 + t\sin\theta$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える。t が実数全体を動くとき，点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，Q の x 座標を求めよ。

(2)　θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき，C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3)　θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。　[2005 大阪大・理]

14　座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 6)$ とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　ピッタリ直線が 2 本通る点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。　[2006 名古屋大・理]

15　座標平面上の 2 点 P，Q が，曲線 $y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，$\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ のときは $\mathrm{R} = \mathrm{P}$ とする。

(1)　a を $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2)　D を図示せよ。　[2007 東京大・理]

16　a を正の実数とする。点 $(x,\ y)$ が，不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ の定める領域を動くとき，つねに $\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ となる。a の値の範囲を求めよ。　[2008 一橋大]

17　(1)　任意の角θに対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$ が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域をxy平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角α，βに対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。　［2009 一橋大］

18　座標平面上の 3 点$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(x,\ y)$を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　△ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2)　△ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3)　3 つの角∠CAB, ∠ABC, ∠BCA をそれぞれα，β，γとし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4)　x, y が(3)の条件を満たすとき，γがとりうる値の範囲を求めよ。［2009 広島大・理］

19　aを 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$をとる。曲線$y=\dfrac{1}{x}$上の点$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$と，曲線$y=\dfrac{a}{x}$上の点$\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$が，3 条件

(i)　$p>0, q>0$　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP} < \angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　△OPQ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$の最大値が$\dfrac{3}{4}$となるようなaの値を求めよ。

［2010 千葉大・理］

20　実数aに対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を$D(a)$とおく。

(1)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し$D(a)$の点となるような点$(p,\ q)$の範囲を図示せよ。

(2)　$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し$D(a)$の点となるような点$(p,\ q)$の範囲を図示せよ。　［2011 東北大・理］

21 以下の問いに答えよ。

(1) t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) a を $a \geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

$$ax+(2-a)y \geqq 2,\quad y \geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3) a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき, (2)で求めた m の最大値を求めよ。［2011 神戸大・理］

22 座標平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。［2012 神戸大］

23 s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s, t が $s \geqq 0, t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点$(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。$s,\ t$ が実数全体を動くとき，点$(x,\ y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。［2012 東北大・理］

24 $a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$，C$(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2) $b-a \geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

［2013 神戸大・文］

$\boxed{25}$ 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ $\mathrm{B}(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

［2013 広島大・理］

$\boxed{26}$ 座標平面の原点を O で表す。線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

［2014 東京大・理］

$\boxed{27}$ 座標平面上の原点を O とする。点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ および点 C が，$\mathrm{OC} = 1$，$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ を満たしながら動く。

(1) $s = a^2 + b^2$，$t = ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

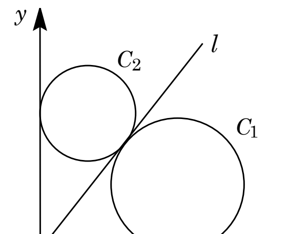
［2015 一橋大］

$\boxed{28}$ l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。



円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1 + 9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。

［2015 東京大・文］

29 座標平面上の 2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A, P, B は同一直線上にある。 ［2015 東京大・文］

30 座標平面上の 3 点 $P(x,\ y)$，$Q(-x,\ -y)$，$R(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $P(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。 ［2016 東京大・文］

31 a, b を実数とする。$y=|x^2-4|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。 ［2017 東北大・理］

32 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式 t^2-ut+v は，$0 \leqq x \leqq 1$，$1 \leqq y \leqq 2$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$ と因数分解される。

(3) 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が 4 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

［2018 広島大・理］

33 xy 平面における 2 つの放物線 $C : y=(x-a)^2+b$，$D : y=-x^2$ を考える。

(1) C と D が異なる 2 点で交わり，その 2 交点の x 座標の差が 1 となるように実数 a, b が動くとき，C の頂点 $(a,\ b)$ の軌跡を図示せよ。

(2) 実数 a, b が(1)の条件を満たしながら動くとき，C と D の 2 交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。 ［2018 東北大・理］

34 θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点 $(x,\ y)$ について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。

［2018 信州大・医］

35 放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。 ［2018 東京大・文］

36 座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ -2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{APB}$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 ［2019 熊本大・医］

37 O を原点とする座標平面を考える。不等式 $|x|+|y| \leqq 1$ が表す領域を D とする。また，点 P, Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R が動く範囲を E とする。

(1) D, E をそれぞれ図示せよ。

(2) a, b を実数とし，不等式 $|x-a|+|y-b| \leqq 1$ が表す領域を F とする。点 S, T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を満たす点 U が動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。 ［2019 東京大・文］

38 x の 2 次関数で，そのグラフが $y=x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし, 2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう。 ［2020 京都大・文］

39　変数 t に対して，xy 平面上の曲線 $C_t : y = 3tx^2 - t^3$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 3 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，曲線 C_t がちょうど 1 回通過する xy 平面上の点全体からなる領域を図示せよ。

　領域を図示する際は，その境界線や境界点が含まれるか否かがはっきりとわかるように図示せよ。　[2021 大阪市大・文]

40　$a,\ b$ を実数とする。座標平面上の放物線 $C : y = x^2 + ax + b$ は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

(1)　点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

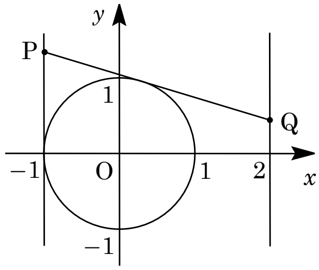
(2)　放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。　[2021 東京大]

図 形 と 式

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 千葉大]



$\mathrm{P}(-1,\ a)$, $\mathrm{Q}(2,\ b)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(3,\ b-a)$ から, 直線 PQ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a-b,\ 3)$ とおくことができる。

直線 PQ の方程式は,

$$(a-b)(x+1)+3(y-a)=0$$

$$(a-b)x+3y-2a-b=0$$

直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するので,

$$\frac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2+9}}=1,\ |-2a-b|=\sqrt{(a-b)^2+9}$$

両辺 2 乗して, $(2a+b)^2=(a-b)^2+9$, $(2a+b+a-b)(2a+b-a+b)=9$

$$a(a+2b)=3$$

a, b は整数より, a は 3 の約数となり, $a=\pm1,\ \pm3$

$a=1$ のとき $a+2b=3$ から, $b=1$ となる。よって, $\mathrm{P}(-1,\ 1)$, $\mathrm{Q}(2,\ 1)$

$a=-1$ のとき $a+2b=-3$ から, $b=-1$ となる。よって, $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(2,\ -1)$

$a=3$ のとき $a+2b=1$ から, $b=-1$ となる。よって, $\mathrm{P}(-1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(2,\ -1)$

$a=-3$ のとき $a+2b=-1$ から, $b=1$ となる。よって, $\mathrm{P}(-1,\ -3)$, $\mathrm{Q}(2,\ 1)$

［解 説］

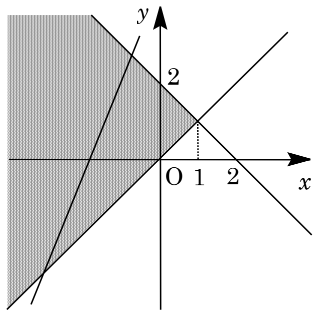
円と直線が接する条件を整理すると, 約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単に P, Q の座標が求まってしまいます。

$\boxed{2}$ [1998 北海道大・理]

条件より，$x-y<0$………①，$x+y<2$………②

$ax+by<1$………③

①かつ②の表す領域は右図の網点部。



③に$(x,\ y)=(0,\ 0)$を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，直線$ax+by=1$……④を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線$x-y=0$と④との交点は，

$$(a+b)x=1,\ \ x=\frac{1}{a+b}\ \ (a\neq -b)$$

また，直線$x+y=2$と④との交点は，

$$ax+b(2-x)=1,\ \ x=\frac{1-2b}{a-b}\ \ (a\neq b)$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{a+b}<0\text{ ……⑤かつ}\frac{1-2b}{a-b}<1\text{ ……⑥}$$

⑤より，$a+b<0,\ b<-a$………⑦

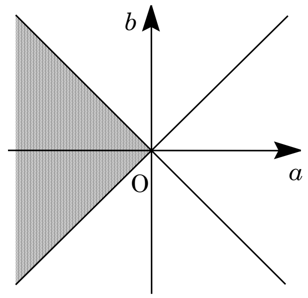
⑥より，$(1-2b)(a-b)<(a-b)^2$となり，

$(a-b)(a-b-1+2b)>0$

$(a-b)(a+b-1)>0$

⑦から$a+b-1<0$なので，$a-b<0$，$b>a$………⑦

⑥⑦より，$a<b<-a$

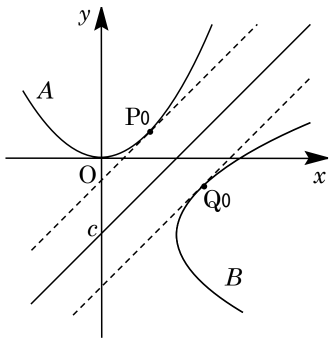


点$(a,\ b)$の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

［解 説］

③の領域については，直線④を境界とし，原点を含むか否かで決定しました。また，直線④と直線$y=x$および$y=-x+2$との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。

3　　　　［1999 東京大・文］



放物線 A と，A と線対称な放物線 B に，対称軸 $y=x-c$ に平行な直線を引き，放物線 A との接点を P_0，放物線 B との接点を Q_0 としたとき，線分 P_0Q_0 は対称軸と直交する。

すると，線分 PQ の長さの最小値は線分 P_0Q_0 の長さとなる。

ここで，放物線 $A: y=x^2$ ……①と対称軸に平行な直線 $y=x+k$ ……②が接するとき，①②より，

$$x^2-x-k=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

判別式 $D=1+4k=0$ より，$k=-\dfrac{1}{4}$

このとき，接点は③から $x=\dfrac{1}{2}$，①から $y=\dfrac{1}{4}$

よって，$P_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

点 P_0 と点 Q_0 は対称軸 $y=x-c$ に関して対称なので，線分 PQ の長さの最小値 P_0Q_0 は点 $P_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と対称軸 $x-y-c=0$ との距離の 2 倍となるので，

$$P_0Q_0=2\cdot\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-c\right|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-c\right|=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$$

［解 説］

本問は求値問題ですので,, 直観に依存した解で記述しています。

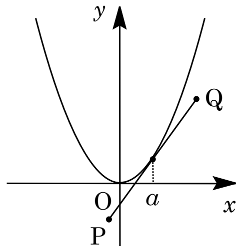
4 ［1999 東北大・理］

$y=x^2$ より，$y'=2x$

点 $(a,\ a^2)$ での接線は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

よって，線分 PQ は，$y=2ax-a^2\ (a-1\leqq x\leqq a+1)$ ………①

a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は，明らかに y 軸対称となる。



さて，①において $x=t\ (t\geqq 0)$ 上での通過領域を考えると，

$$y=2at-a^2=-(a-t)^2+t^2\ (t-1\leqq a\leqq t+1)\ \text{………②}$$

そこで，②式を $y=f(a)$ とおき，a が $-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲を動くとき，y の値のとりうる範囲を求める。

ここで，$y=f(a)$ のグラフの軸が $a=t$ なので，t の値で場合分けをする。

(i)　$t>2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は存在しない。

(ii)　$1<t\leqq 2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲には，$y=f(a)$ の軸は存在しないので，$f(a)$ は単調増加となる。

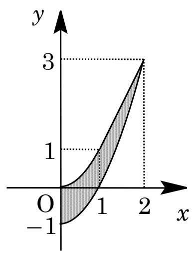
$f(t-1)\leqq y\leqq f(1)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq 2t-1$

(iii)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲に $y=f(a)$ の軸は存在し，しかも $t-1<\dfrac{(t-1)+1}{2}\leqq t\leqq 1$ なので，

$f(t-1)\leqq y\leqq f(t)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq t^2$

(i)(ii)(iii)より，$x\geqq 0$ で線分 PQ の通過領域を図示すると，右図のようになる。



求める面積を S とおくと，

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\left\{x^2-(x^2-1)\right\}dx+\int_1^2\left\{2x-1-(x^2-1)\right\}dx$$
$$=\int_0^1 dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx=\frac{5}{3}$$

よって，$S=\dfrac{10}{3}$

［解 説］

x を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし，本問では２点 P，Q だけの軌跡を求めて，直観的に考えることも可能です。

$\boxed{5}$ ［2000 神戸大・文］

(1)　点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線は，$y=-4(x-1)$ ………①

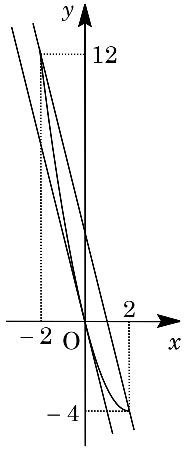
①と$y=x^2-4x$ ……②の共有点は,

$$-4(x-1)=x^2-4x,\quad x^2-4=0,\quad x=\pm 2$$

$x=2$のとき，①より$y=-4$なので，共有点$(2,\ -4)$

$x=-2$のとき，①より$y=12$なので，共有点$(-2,\ 12)$

(2)　②より，$y=(x-2)^2-4$となり，$-2\leqq x\leqq 2$の範囲でグラフを書くと，右図の曲線のようになる。



また，$y=k(x-a)$は点$(a,\ 0)$を通って傾きがkの直線を表し，$k=-4$，$a=1$のとき，(1)より②と$(2,\ -4)$，$(-2,\ 12)$で交わる。

よって，$a=1$のときは，右図より，どんなkの値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも１つの共有点をもつ。

また，②より$y'=2x-4$なので，$x=0$で$y'=-4$から原点における②の接線は$y=-4x$となる。そして，$a=0$のときは，どんなkの値に対しても原点が共有点となる。

さて，$a<0$, $1<a$のときは，$k=-4$とすると$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で共有点をもたない。

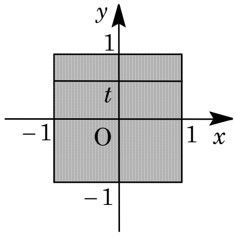
さらに，$0<a<1$のとき，$k\leqq -4$では$a<x<2$で，$k\geqq -4$では$-2<x<a$で少なくとも１つの共有点をもつ。

以上より，どんなkの値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも１つの共有点をもつ条件は，$0\leqq a\leqq 1$である。

［解　説］

(2)は最初, yを消去して方程式の解の配置で考えました。しかし，かなり複雑なので，方針を変更してグラフを書くと，(1)が大きなヒントとなっていることがわかりました。

$\boxed{6}$　　［2000 東京大・文］



$P=1-ax-by-axy$ とおき，まず y の値を固定し，$y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ において, P の最小値を求める。

$$P=1-ax-bt-axt=-a(1+t)x+1-bt$$

$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，$1+t\geqq 0$ となるので,

(i)　$-a\geqq 0$　$(a\leqq 0)$ のとき，$x=-1$ で P は最小となる。

このとき，$P=a(1+t)+1-bt=(a-b)t+a+1$

(i-i)　$a-b\geqq 0$　$(b\leqq a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=-(a-b)+a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i-ii)　$a-b<0$　$(b>a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=(a-b)+a+1=2a-b+1$ をとるので，条件より，$2a-b+1>0$

(ii)　$-a<0$　$(a>0)$ のとき，$x=1$ で P は最小となる。

このとき，$P=-a(1+t)+1-bt=-(a+b)t-a+1$

(ii-i)　$a+b\geqq 0$　$(b\geqq -a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=-(a+b)-a+1=-2a-b+1$ をとるので，条件より，$-2a-b+1>0$

(ii-ii)　$a+b<0$　$(b<-a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=(a+b)-a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i)(ii)をまとめると，

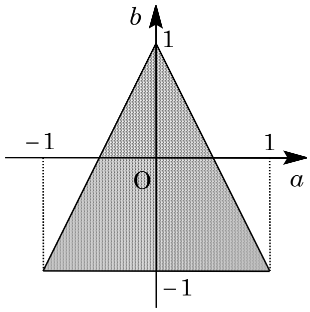
$a\leqq 0$ かつ $b\leqq a$ のとき，$b>-1$

$a\leqq 0$ かつ $b>a$ のとき，$b<2a+1$

$a>0$ かつ $b\geqq -a$ のとき，$b<-2a+1$

$a>0$ かつ $b<-a$ のとき，$b>-1$

この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲は右図の網点部になる。ただし，境界は含まない。



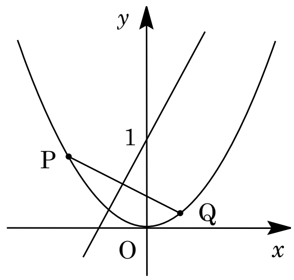
［解　説］

今年もまた出ましたという感のある 1 文字固定の最大・最小問題です。しかし，対象が 1 次関数のため，そんなに複雑ではありません。

７ ［2001 一橋大］

$p \neq q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ と直線 $y = ax + 1$ が直交することより，

$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} \cdot a = -1,\ p + q = -\frac{1}{a} \cdots\cdots\cdots①$$



また，PQ の中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ が，直線 $y = ax + 1$ 上にあることより，

$$\frac{p^2 + q^2}{2} = a \cdot \frac{p+q}{2} + 1,\ p^2 + q^2 = a(p+q) + 2 \cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入すると，$p^2 + q^2 = 1 \cdots\cdots\cdots③$

①③を満たす異なる p，q が存在する条件は，直線①と円③が 2 つの共有点を持つ条件に等しいので，

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}} < 1,\ 1 < \sqrt{2}\,|a|$$

よって，$a < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a$

［解 説］

線対称移動を題材にした問題です。後半の a の範囲を求めるところは，図をイメージしています。

8　　　　[2002 神戸大・文]

(1)　$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$……①より，$(1-t^2)x-2ty-1-t^2=0$……①′

円 C の中心を$(a,\ b)$，半径を r とすると，①′が接することより，

$$\frac{|(1-t^2)a-2tb-1-t^2|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r,\quad \frac{|(-a-1)t^2-2bt+a-1|}{\sqrt{1+2t^2+t^4}}=r$$

$$(-a-1)t^2-2bt+a-1=\pm r(1+t^2)\cdots\cdots\cdots②$$

②がどんな t に対しても成立する条件は,

$$-a-1=\pm r,\ -2b=0,\ a-1=\pm r$$

これより，$-a-1=a-1$ から $a=0$，また $b=0$ となり, $r>0$ から $r=1$ である。

よって，円 C の方程式は，$x^2+y^2=1$ である。

すると，①を $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x+\dfrac{-2t}{1+t^2}y=1$ と変形すると，接点の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$ となる。

(2)　接点を$(x,\ y)$とおくと, (1)より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$……③，$y=\dfrac{-2t}{1+t^2}$……④

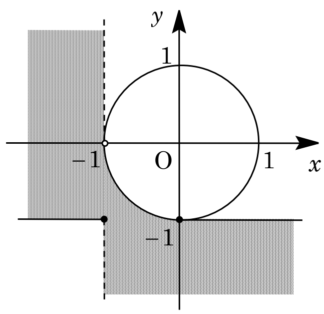
③より，$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ となり, $t\geqq 1$ で $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leqq 1$ より，$-1<x\leqq 0$ となる。

④より，$y=\dfrac{-2}{\dfrac{1}{t}+t}$ となり，$t\geqq 1$ で $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

（等号は $t=1$ のとき）より，$-1\leqq y<0$ である。

よって，接点は円 C 上の $-1<x\leqq 0$，$-1\leqq y<0$ の部分にある。

以上より，直線①の通過領域は右図の網点部となる。なお，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解　説］

直線の通過領域を求める有名問題です。(1)の誘導があるために，(2)はずいぶん解きやすくなっています。

9 [2003 東京大・文]

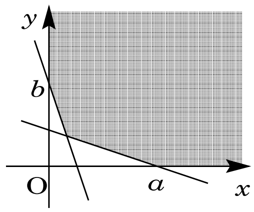
領域$D: x+3y \geqq a$，$3x+y \geqq b$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$に対して，境界$x+3y=a$……①，$3x+y=b$……②とおく。

すると，①と両軸との交点は$(a,\ 0)$と$\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$，②と両軸との交点は$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$と$(0,\ b)$である。

(i) $a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ a \geqq \dfrac{b}{3},\ b \geqq \dfrac{a}{3}\ \left(\dfrac{a}{3} \leqq b \leqq 3a\right)$のとき

①と②の交点は，$x+3(b-3x)=a$，$x=\dfrac{-a+3b}{8}$

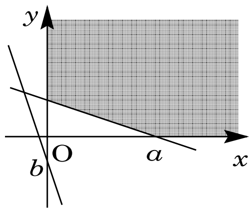
$$y=b-3\cdot\frac{-a+3b}{8}=\frac{3a-b}{8}$$



右図より，この交点$\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{-a+3b}{8}+\frac{3a-b}{8}=\frac{a+b}{4}$$

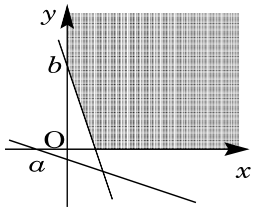
(ii) $a \geqq 0,\ a \geqq \dfrac{b}{3},\ \dfrac{a}{3} \geqq b\ \left(a \geqq 0,\ b \leqq \dfrac{a}{3}\right)$のとき



右図より，点$\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{a}{3}$$

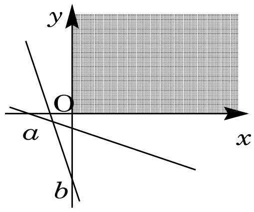
(iii) $b \geqq 0,\ \dfrac{b}{3} \geqq a,\ b \geqq \dfrac{a}{3}\ (b \geqq 0,\ b \geqq 3a)$のとき



右図より，点$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{b}{3}$$

(iv) $a \leqq 0,\ b \leqq 0$のとき



右図より，原点$(0,\ 0)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

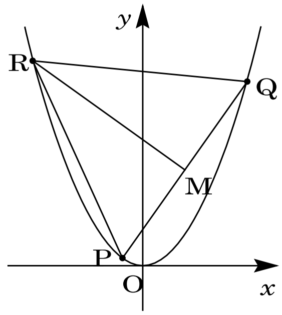
$$x+y=0$$

［解 説］

場合分けの基準を確定するのに苦労します。2 つの境界線の交点の存在する位置だけでなく，それぞれのx切片，y切片の関係も考慮しなくてはいけません。なお，このように複雑になったときには，場合分けについて，ab平面でチェックすると，ミスを防ぐことができます。

10 ［2004 東京大］

$p<q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。



直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2},\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，

$$\mathrm{M}\Big(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2}\Big)$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Big)$，$p=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\Big)$なので，

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\Big(2-\frac{a^2}{3}\Big)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$\mathrm{M}\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\Big)$である。

ここで，$\triangle\mathrm{PQR}$ は 1 辺の長さ a の正三角形より，

$$\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ},\ \mathrm{RM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\Big)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\Big)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので，

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\Big)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp 2a+a^2)$$

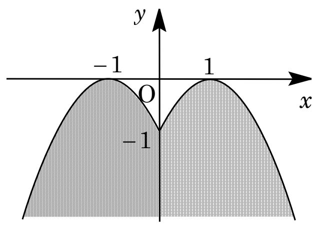
まとめると，$5a^2\mp 18a=0$ となり，$a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

［解 説］

まず，回転を用いて考えましたが，計算がかなり複雑になってしまい，方向転換をした結果が上の解です。

11 ［2005 金沢大・文］

(1) $A_1: y \leqq -(x-1)^2$，$A_2: y \leqq -(x+1)^2$ に対し，集合 $A = A_1 \cup A_2$ の表す領域は，右図の網点部となる。



さて，$B: y \geqq (x-a)^2 + b$ に対し，$a = 0$，$b = -1$ のときは，$B: y \geqq x^2 - 1$ である。

よって，$A \cap B$ の表す領域は，y 軸に関して対称となり，その面積 S は，

$$S = 2\int_0^1 \{ -(x-1)^2 - (x^2-1) \} dx = 2\int_0^1 (-2x^2 + 2x)\, dx = \frac{2}{3}$$

(2) $A_1 \cap B \neq \phi$ であるとき，放物線 $y = -(x-1)^2$ と $y = (x-a)^2 + b$ は共有点をもち，

$$-(x-1)^2 = (x-a)^2 + b，\ 2x^2 - (2a+2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a+1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 + 2a - 1，\ b \leqq -\frac{1}{2}(a-1)^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3) $A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ より，$A \cap B \neq \phi$ であることは，$A_1 \cap B \neq \phi$ または $A_2 \cap B \neq \phi$ であることと同値である。

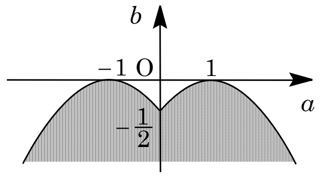
ここで，$A_2 \cap B \neq \phi$ という条件は，(2)と同様にして，

$$-(x+1)^2 = (x-a)^2 + b，\ 2x^2 - (2a-2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a-1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 - 2a - 1，\ b \leqq -\frac{1}{2}(a+1)^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

以上より，$A \cap B \neq \phi$ であるとき①または②が成立し，これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



［解 説］

集合と領域の融合問題です。(3)の題意は，少し把握しづらいですが，その点は，(2)の誘導によって少し緩和されています。

$\boxed{12}$ ［2005 一橋大］

(1) 放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつとき，$f(x)=g(x)$ は異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3},\ \ 3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0\ \cdots\cdots\cdots ①$$

①の判別式 $D/4=4a^2-3\left(\frac{5}{3}a^2-3\right)=-a^2+9>0$ から，$-3<a<3$ となる。

(2) $-3<a<3$ のとき，①の実数解は $x=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$ となる。これを $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと, 2 つの放物線によって囲まれる図形 C_a の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}-(x^2-3)\right\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{9-a^2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

(3) $y\leqq g(x)=-2(x-a)^2+\dfrac{a^2}{3}$ から，$y\leqq-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$

ここで，$h(a)=-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$ とおくと，$h(a)=-\dfrac{5}{3}\left(a-\dfrac{6}{5}x\right)^2+\dfrac{2}{5}x^2$

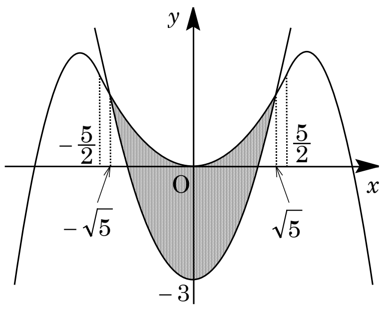
さて，$-3<a<3$ のとき，x を固定して，領域 $y\leqq g(x)$，すなわち $y\leqq h(a)$ の動く平面上の部分を考える。

(i) $\dfrac{6}{5}x\leqq-3\ \left(x\leqq-\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(-3)=-15-12x-2x^2$

(ii) $-3<\dfrac{6}{5}x<3\ \left(-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y\leqq h\left(\dfrac{6}{5}x\right)=\dfrac{2}{5}x^2$

(iii) $\dfrac{6}{5}x\geqq3\ \left(x\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(3)=-15+12x-2x^2$

(i)～(iii)の部分と，領域 $y\geqq f(x)$ を合わせると，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形が得られ，図示すると右図の網点部となる。



この面積は,

$$\int_{-\sqrt5}^{\sqrt5}\left\{\frac{2}{5}x^2-(x^2-3)\right\}dx$$

$$=-\frac{3}{5}\int_{-\sqrt5}^{\sqrt5}(x+\sqrt5)(x-\sqrt5)\,dx$$

$$=-\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\sqrt5+\sqrt5)^3=4\sqrt5$$

［解 説］

(3)では，領域の動く部分を，x の値を固定して，y のとり得る値の範囲として求めました。そこまで，やることはなかったのですが。

13 ［2005 大阪大・理］

(1) 条件より，$x=t\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……①，$y=1-t^2+t\sin\dfrac{\pi}{4}=1-t^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……②

$y=0$ とすると，②から $1-t^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}t=0$ より，

$\sqrt{2}t^2-t-\sqrt{2}=0$，$(\sqrt{2}t+1)(t-\sqrt{2})=0$

$x\geqq 0$ より $t\geqq 0$ なので，$t=\sqrt{2}$ となり，①から点 Q の x 座標は $x=1$ である。

(2) $x=t\cos\theta$ ……③，$y=1-t^2+t\sin\theta$ ……④に対して，

$t=0$ のとき，$(x,\ y)=(0,\ 1)$

$t\neq 0$ のとき，③④より $\cos\theta=\dfrac{x}{t}$，$\sin\theta=\dfrac{y-1+t^2}{t}$ から，

$\left(\dfrac{x}{t}\right)^2+\left(\dfrac{y-1+t^2}{t}\right)^2=1$，$x^2+(y-1+t^2)^2=t^2$ ………⑤

⑤は $(x,\ y)=(0,\ 1)$ を満たしているので，$t=0$ のときも成り立つ。

さて，t が実数全体を動くとき，曲線⑤が通過する範囲は，⑤を t の方程式をしてみたとき，実数 t が存在する条件として求めることができる。

⑤から，$x^2+(y-1)^2+2(y-1)t^2+t^4=t^2$

$t^4+(2y-3)t^2+x^2+(y-1)^2=0$ ………⑥

ここで，$u=t^2\geqq 0$ とおくと，⑥は $u^2+(2y-3)u+x^2+(y-1)^2=0$ ……⑦となり，2 次方程式⑦が，0 以上の解を少なくとも 1 つもつ条件となる。

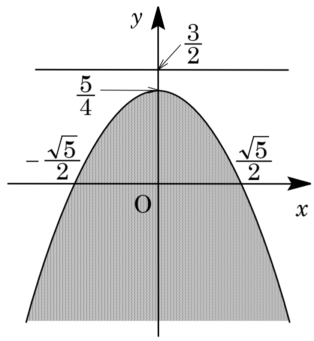
そこで，$f(u)=u^2+(2y-3)u+x^2+(y-1)^2$ とおき，$f(0)=x^2+(y-1)^2\geqq 0$ に注意すると，

$D=(2y-3)^2-4\{x^2+(y-1)^2\}\geqq 0$ ………⑧

$u=-\dfrac{2y-3}{2}\geqq 0$ ………⑨

⑧から，$-4y-4x^2+5\geqq 0$，$y\leqq -x^2+\dfrac{5}{4}$

⑨から，$2y-3\leqq 0$，$y\leqq\dfrac{3}{2}$



以上まとめると，曲線 C が通過する範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。

(3) 点 Q の x 座標の最大値は，(2)より $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であり，③④より，

$\dfrac{\sqrt{5}}{2}=t\cos\theta$ ……⑩，$0=1-t^2+t\sin\theta$ ……⑪

⑩より，$t=\dfrac{\sqrt{5}}{2\cos\theta}$ となり，⑪に代入すると，

$1-\dfrac{5}{4\cos^2\theta}+\dfrac{\sqrt{5}\sin\theta}{2\cos\theta}=0$，$1-\dfrac{5}{4}(1+\tan^2\theta)+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta=0$

まとめると,

$$5\tan^2\theta - 2\sqrt{5}\tan\theta + 1 = 0,\ (\sqrt{5}\tan\theta - 1)^2 = 0$$

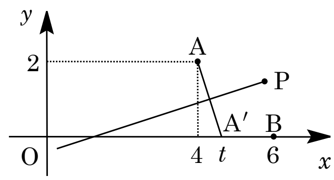
よって，$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である。

［解 説］

難易度が高いというわけではありませんが, それなりに時間のかかる問題です。(2)では, まずパラメータ θ を動かし, その後, パラメータ t を動かして通過領域を求めました。

14 　　　　[2006 名古屋大・理]

(1) ピッタリ直線 l は，線分 $\mathrm{AA'}$ の垂直二等分線より，$\mathrm{PA}=\mathrm{PA'}$ となり，



$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$

$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2) ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点 $\mathrm{A'}(t,\ 0)$ が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

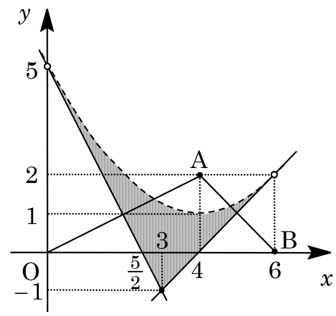
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③′

④より $q\geqq -2p+5$ ………④′，⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤′

さて，領域③′の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③′と領域④′の境界線，領域③′と領域⑤′の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③′④′⑤′より，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3) ①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1,\ t_2$ とおき，$\mathrm{A}'_1(t_1,\ 0)$，$\mathrm{A}'_2(t_2,\ 0)$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}'_1}=(t_1-4,\ -2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AA}'_2}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{\mathrm{AA}'_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AA}'_2}=0$ となり，

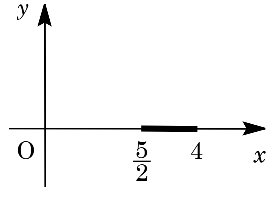
$(t_1-4)(t_2-4)+4=0$，$t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0$ ………⑥

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$t_1+t_2=2p$，$t_1t_2=8p+4q-20$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。

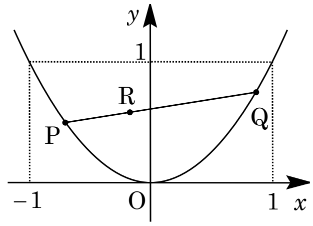


［解 説］

線対称を題材にした問題で，ひとひねりが加えられています。

$\boxed{15}$ [2007 東京大・理]

(1) $P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)$とおき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R の動く範囲Dに点$(a,\ b)$が属することより，



$$a=\frac{2p+q}{3}\cdots\cdots\cdots①,\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q=3a-2p$ ……③となり，②に代入すると，

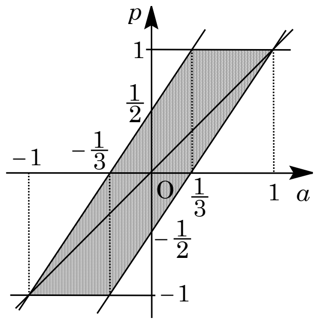
よって，$2p^2+(3a-2p)^2=3b$

$$b=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p)=2(p-a)^2+a^2$とおき，$-1\leqq p\leqq 1$ ……④，$-1\leqq q\leqq 1$ ……⑤のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$となり，

$$\frac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\frac{3a+1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1\leqq a\leqq 1$から，$f(p)$は最小値$f(a)=a^2$をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\quad f(1)=3a^2-4a+2$$

$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより, aの値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると，

(i) $-1\leqq a\leqq -\frac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(-1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

(ii) $-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a-1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

(iii) $0\leqq a\leqq\frac{1}{3}$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{3a+1}{2}\right)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{1}{3}\leqq a\leqq 1$のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(1)$より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2$

(2) $a<-1$，$1<a$のときは, 右上図より，④⑥を満たすpは存在しない。

よって, (1)から, Dを表す不等式は,

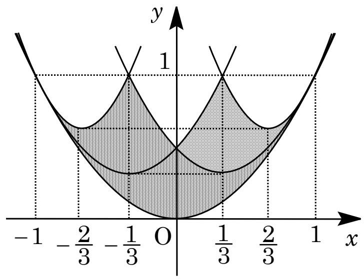
$$x^2\leqq y\leqq 3x^2+4x+2\ \left(-1\leqq x\leqq -\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\ \left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\ \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2\ \left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$

以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。