２０２２ 入試対策

２次数学ランドマーク

ベクトル39題

文系＋理系 24か年

１９９８ － ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

ベクトル

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 △ABC の 3 辺 BC, CA, AB を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$ とおき，△$\mathrm{A_1B_1C_1}$ の 3 辺 $\mathrm{B_1C_1}$，$\mathrm{C_1A_1}$，$\mathrm{A_1B_1}$ を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$ とおく。ただし，$0<t<1$ とする。

(1) △$\mathrm{A_2B_2C_2}$ の辺 $\mathrm{B_2C_2}$ が△ABC のいずれかの辺と平行となる t の値を求めよ。

(2) (1)のとき，△$\mathrm{A_2B_2C_2}$ は△ABC に相似であることを示し，その相似比を求めよ。

［1998 一橋大］

2 空間に，同一直線上にない 3 点 O, A, B と 1 点 P がある。O, A, B を通る平面を α とし，点 P は α 上にないとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，$\vec{p}\cdot\vec{a}=2$，$\vec{p}\cdot\vec{b}=-2$ とする。

(1) $\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b}$ が平面 α に垂直になるように実数 s, t を定めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 OPQ の面積が $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ を求めよ。 ［1998 千葉大・文］

3 空間の点 $(10,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 9 の球面を S_1 とし，点 $(0,\ 10,\ 0)$ を中心とする半径 8 の球面を S_2 とする。S_1 と S_2 に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル $(a,\ b,\ c)$ $(c\geqq 0)$ をすべて求めよ。 ［1999 東北大・理］

4 点 O を中心とする円を考える。この円の円周上に 3 点 A, B, C があって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしている。このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

［2000 大阪大・文］

5 円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ) 三角形 ABC は正三角形である。

(ロ) AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。 ［2000 京都大］

6　三角形 ABC において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　実数 $s,\ t$ が $0\leqq s+t\leqq 1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0$ の範囲を動くとき，次の各条件を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

(2)　(1)の各場合に，点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か。

［2000 神戸大・文］

7　四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

(1)　線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3)　直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。　［2001 東北大・文］

8　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$$

を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

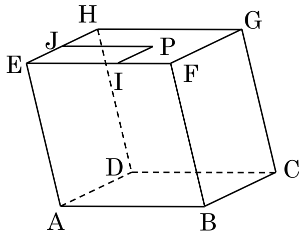
(1)　直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2)　四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。　［2002 千葉大・理］

9　空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積は, $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば, 2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2)　a を正の定数とし, 右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$, $|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$ とし, $\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$, $\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり, 点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし, 点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$, $y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき, △ACP の面積を a, x, y を用いて表せ。



（平行六面体ABCD-EFGH）

(3)　問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき, △ACP の面積の最小値を求めよ。

[2002 九州大・文]

10　四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　OA ⊥ BC，OB ⊥ AC，OC ⊥ AB

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき, この四面体は正四面体であることを示せ。　[2003 京都大]

11　座標空間内の三角柱

$$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ x\geqq y,\ 0\leqq z\leqq 1$$

を考え, その xy 平面内の面を S, xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に, 点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり, また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし, 点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め, その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ。ただし, 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3)　点 A が S 内を, 点 B が T 内を動くとする。このときの, 四面体 OABC の体積の最大値, および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。　[2004 九州大・理]

12 空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$AB=1,\ AC=2,\ AD=3,\ \angle BAC=\angle CAD=60^\circ,\ \angle DAB=90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

［2005 大阪大・理］

13 △ABC に対し, 辺 AB 上に点 P を, 辺 BC 上に点 Q を, 辺 CA 上に点 R を, 頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき, この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。 ［2006 京都大・理］

14 大きさがそれぞれ 5, 3, 1 の平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対して，$\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\vec{a}$ を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ を満たすように $\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

［2006 一橋大］

15 xy 平面において, 原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし, その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し, 次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の向きが同じ

(b) $|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が O を除く C 上を動くとき, 点 Q は $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2) (1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき, r のとりうる値の範囲を求めよ。

［2007 大阪大］

16 a, b を正の数とし, 空間内の 3 点 $A(a,\ -a,\ b)$, $B(-a,\ a,\ b)$, $C(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α, 原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき, $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{AB}$ および $\overrightarrow{DO}\perp\overrightarrow{AB}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{DC}$ と $\overrightarrow{DO}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また, 平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき, 線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき, 四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし, P は平面 α 上にはないものとする。

［2007 九州大・理］

17 点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle \mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2) 点 A，B と C，D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。 ［2008 大阪大］

18 平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。 ［2009 大阪大・理］

19 座標平面上に点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{P}(4,\ 3)$ をとる。不等式 $(x-5)^2+(y-10)^2\leqq 16$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) k は定数とする。直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を k を用いて表せ。

(2) 点 R が D 全体を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値および最小値を求めよ。 ［2010 広島大・文］

20 四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ。 ［2010 東北大］

21　三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　［2011 千葉大・理］

22　平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ を満たすとする。ただし, 記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 p, q に対して, $\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおく。このとき, 次の条件 $|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$, $p>0$ を満たす実数 p, q を求めよ。

(2)　平面上のベクトル $\vec{x}$ が, $-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$, $1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$ を満たすとき, $|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。　［2012 東北大・文］

23　xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり, 平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1)　P(0, 0, 2) とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点 (0, 0, 1) を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 R の軌跡の方程式を求めよ。

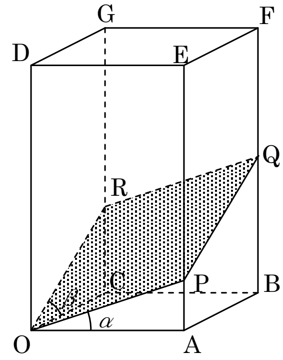
(2)　平面 $z=1$ 上に, 4 点 A(1, 1, 1), B(1, -1, 1), C(-1, -1, 1), D(-1, 1, 1) をとる。点 P が平面 $z=2$ で点 (0, 0, 2) を中心とする半径 1 の円周上を動き, 点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき, 点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し, その面積を求めよ。　［2012 一橋大］

24　t を正の定数とする。原点を O とする空間内に, 2 点 A($2t$, $2t$, 0), B(0, 0, t) がある。また動点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$$

を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。　［2013 一橋大］

25 1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく。



(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

［2014 東京大・理］

26 平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。

［2015 北海道大・文］

27 xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1) 線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

［2015 一橋大］

28 xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。

［2015 京都大・文］

29 $\triangle$ABC が，AB$=2$，AC$=1+\sqrt{3}$，$\angle$ACB$=45^\circ$ を満たすとする。

(1) $\beta=\angle$ABC とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2) (1)の β の値をすべて求めよ。

(3) $\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。$\triangle$ABC が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s, t を求めよ。

［2016 北海道大・文］

30 1辺の長さが1の正六角形ABCDEFが与えられている。点Pが辺AB上を，点Qが辺CD上をそれぞれ独立に動くとき，線分PQを$2:1$に内分する点Rが通りうる範囲の面積を求めよ。 [2017 東京大・文]

31 座標空間において原点Oと点$\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$を通る直線をlとし，点$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$と点$\mathrm{C}(-2,\ 2,\ -3)$を通る直線をmとする。l上の2点P, Qと，m上の点Rを△PQRが正三角形となるようにとる。このとき，△PQRの面積が最小となるようなP, Q, Rの座標を求めよ。 [2017 京都大・文]

32 正方形ABCDの辺を除く内部に，$\mathrm{PA} \perp \mathrm{PB}$を満たす点Pがある。ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$x\overrightarrow{\mathrm{PA}}+y\overrightarrow{\mathrm{PB}}$と表すとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$とするとき，$x, y$を$\alpha$を用いて表せ。

(2) 点Pが題意の条件を満たしながら動くとき，(1)で求めた$x,\ y$の和$x+y$の最大値を求め，そのときのPがどのような点かを答えよ。 [2018 千葉大・理]

33 四面体ABCDは$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}$，$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}$を満たすとし，辺ABの中点をP，辺CDの中点をQとする。

(1) 辺ABと線分PQは垂直であることを示せ。

(2) 線分PQを含む平面αで四面体ABCDを切って2つの部分に分ける。このとき，2つの部分の体積は等しいことを示せ。 [2018 京都大]

34 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$を満たす△PABを考え，辺ABの中点をM，△PABの重心をGとする。以下の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$を内積$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$の値を求めよ。

(3) 点Aと点Bを固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$を満たすように点Pを動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$とする。 [2019 神戸大]

35 空間内に$\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B'，C' とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=0$ を示せ。

(2) $\angle \mathrm{B}'\mathrm{AC}'>\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) P 上の三角形 $\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。 [2019 名古屋大・理]

36 座標空間内の 2 つの球面

$$S_1:(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=7 \text{ と } S_2:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$$

を考える。S_1 と S_2 の共通部分を C とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が最小となる球面の方程式を求めよ。

(2) S_1 との共通部分が C となるような球面のうち，半径が $\sqrt{3}$ となる球面の方程式を求めよ。 [2019 大阪大]

37 k を正の実数とする。座標空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k$$

このとき，k の値を求めよ。ただし，座標空間の点 X，Y に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の内積を表す。 [2020 京都大]

38 座標空間に 5 点 O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 4)，P(0, 0, −2) をとる。さらに $0<a<3$，$0<b<3$ に対して 2 点 Q(a, 0, 0) と R(0, b, 0) を考える。

(1) 点 P, Q, R を通る平面を H とする。平面 H と線分 AC の交点 T の座標，および平面 H と線分 BC の交点 S の座標を求めよ。

(2) 点 Q, R, S, T が同一円周上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点(a, b) の範囲を座標平面に図示せよ。 [2020 東京工大]

39 平面上の△ABC で $AB=4$，$BC=5$，$AC=3$ となるものを考え，△ABC の外接円の中心を O とする。また，辺 AC を $1:5$ に内分する点を P とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos\angle ABC$ と $\cos\angle AOC$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ と $\cos\angle POC$ の値をそれぞれ求めよ。

(3) 内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}$ の値を求めよ。

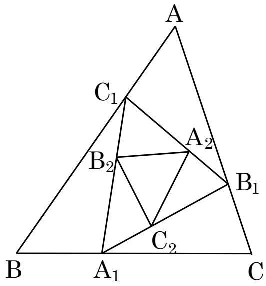
(4) 点 B と点 P を通る直線が△ABC の外接円と交わる点で B と異なる点を Q とする。$\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ。 ［2021 金沢大・文］

ベクトル

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 一橋大］



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB_2}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}$$
$$=(1-t)t\vec{b}+t\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}$$
$$=2t(1-t)\vec{b}+t^2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC_2}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AA_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}$$
$$=(1-t)\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}+t(1-t)\vec{c}$$
$$=(1-t)^2\vec{b}+2t(1-t)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=\overrightarrow{\mathrm{AC_2}}-\overrightarrow{\mathrm{AB_2}}=(3t^2-4t+1)\vec{b}-(3t^2-2t)\vec{c}$$

(i) $\mathrm{B_2C_2}\,/\!/\,\mathrm{AC}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}$ は $\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=0$，よって $t=\dfrac{1}{3}$

(ii) $\mathrm{B_2C_2}\,/\!/\,\mathrm{AB}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}$ は $\vec{b}$ の実数倍より $3t^2-2t=0$，よって $t=\dfrac{2}{3}$

(iii) $\mathrm{B_2C_2}\,/\!/\,\mathrm{BC}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}$ は $\vec{b}-\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=3t^2-2t$，
よって $t=\dfrac{1}{2}$

(2) (1)と同様にして，

$$\overrightarrow{\mathrm{AA_2}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}=t^2\vec{b}+(1-t)^2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=\overrightarrow{\mathrm{AA_2}}-\overrightarrow{\mathrm{AC_2}}=(2t-1)\vec{b}-(3t^2-4t+1)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\overrightarrow{\mathrm{AB_2}}-\overrightarrow{\mathrm{AA_2}}=(2t-3t^2)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$$

(i) $t=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，
$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}\backsim\triangle\mathrm{BCA}$ で，相似比は $1:3$

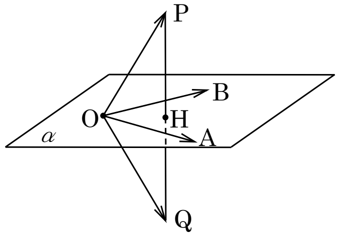
(ii) $t=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，
$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}\backsim\triangle\mathrm{CAB}$ で，相似比は $1:3$

(iii) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=-\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，
$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{1}{4}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$ で，相似比は $1:4$

［解 説］

よくある構図の頻出問題です。上のように 1 次独立なベクトルを設定するか，または頂点の位置ベクトルを設定して解いていけば，完答できる問題です。

2　　[1998 千葉大・文]



(1) 条件より，$(\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ から

$$\vec{p}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$2-2s+t=0 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$(\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ から

$$\vec{p}\cdot\vec{b}-s\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$$

$$-2+s-2t=0 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{2}{3}$，$t=-\dfrac{2}{3}$

(2) (1)から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ とおくと，点 H は平面 α 上の点であり，しかも，$\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ が α に垂直なので，点 H は点 P から α に下ろした垂線の足となる。

すると, 2 点 P, Q の中点が H より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}-\vec{p}$$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\left|\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\dfrac{4}{9}\left(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\dfrac{4}{9}(2+2+2)=\dfrac{8}{3}$

ここで，$\triangle\mathrm{OPH}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

また，$\triangle\mathrm{OPH}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OH}\cdot\mathrm{PH}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{8}{3}}\cdot\mathrm{PH}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\mathrm{PH}$

よって，$\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ から，$\mathrm{PH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

三平方の定理から，$|\vec{p}|=\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2}=\sqrt{\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3}$

［解 説］

P から α に下ろした垂線の足を表す位置ベクトルを求めることが(1)の意味です。これに気づくことが, (2)の解法のポイントです。また, (3)ではベクトルだけの計算で OP を求めてもよいのですが, 上の解では直角に注目して図形的に考えてみました。

３ ［1999 東北大・理］

条件より，$S_1 : (x-10)^2+y^2+z^2=81$ ………①

$S_2 : x^2+(y-10)^2+z^2=64$ ………②

S_1 と S_2 に接し原点を通る直線は，$(x,\ y,\ z)=t(a,\ b,\ c)$ ………③

ただし，$a^2+b^2+c^2=1$ ………④

まず③を①に代入して，$(at-10)^2+(bt)^2+(ct)^2=81$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-20at+19=0$

④から，$t^2-20at+19=0$

①と③が接するので，$D/4=100a^2-19=0$，$a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10}$ ………⑤

次に③を②に代入して，$(at)^2+(bt-10)^2+(ct)^2=64$

$(a^2+b^2+c^2)t^2-20bt+36=0$

④から，$t^2-20bt+36=0$

②と③が接するので，$D/4=100b^2-36=0$，$b=\pm\dfrac{3}{5}$ ………⑥

④⑤⑥より，$\dfrac{19}{100}+\dfrac{9}{25}+c^2=1$

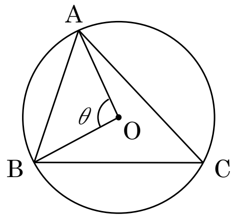
$c\geqq 0$ なので，$c=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

以上より，$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号任意）

［解 説］

図形的な位置関係を考えてもよいのですが，ここでは代数的に解いてみました。こうすると，数式のもつ威力が感じられます。

４ ［2000 大阪大・文］



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2$$

ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=R$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，

$$R^2+2R^2\cos\theta+R^2=R^2$$

$$2\cos\theta+1=0,\ \ \cos\theta=-\frac{1}{2},\ \ \theta=120^\circ$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，$2\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と変形をすると，辺 AB の中点と頂点 C は O に関して反対側にあることになり，

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，同様にして，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$

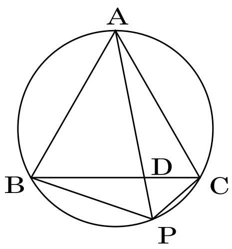
よって，$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。

［解 説］

ずいぶん前になりますが, 1992 年に京大で，類題が出ています。

5 [2000 京都大]



対角線 AP と BC の交点を D とすると，条件(ロ)より，BD : DC $= p : (1-p)$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ここで，正三角形 ABC の 1 辺の長さを 1 としても，一般性は失われないので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 = (1-p)^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 2(1-p)p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + p^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$= (1-p)^2 + (1-p)p + p^2 = 1 - p + p^2$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \sqrt{1-p+p^2}$

ここで，方べきの定理より，AD・DP = BD・DC

$$\mathrm{DP} = \frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}} = \frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

すると，$\mathrm{AD} : \mathrm{AP} = \sqrt{1-p+p^2} : \left(\sqrt{1-p+p^2} + \dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}\right)$

$$= (1-p+p^2) : (1-p+p^2+p-p^2)$$

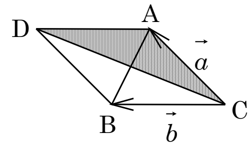
$$= (1-p+p^2) : 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1-p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

［解 説］

方べきの定理が活躍する構図の設問です。

6 ［2000 神戸大・文］



(1) $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\vec{a} + t(\vec{a}+\vec{b})$……(a)に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{a}+\vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad (0 \leqq s+t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$$

よって，点 P は△ADC の内部または周上に存在する。

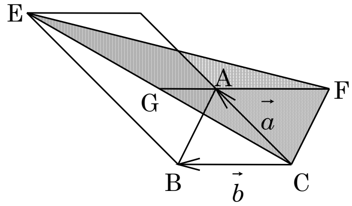
次に，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (2s+t)\vec{a} + (s-t)\vec{b}$……(b)に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s(2\vec{a}+\vec{b}) + t(\vec{a}-\vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = 2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CF}} = \vec{a}-\vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CE}} + t\overrightarrow{\mathrm{CF}} \quad (0 \leqq s+t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$$

よって，点 P は△CEF の内部または周上に存在する。



(2) (a)の場合は，△ADC = △ABC より，点 P の存在する範囲の面積は△ABC の 1 倍となる。

(b)の場合は，$\mathrm{GF} = \dfrac{3}{2}\mathrm{AF} = \dfrac{3}{2}\mathrm{BC}$，$\mathrm{EB} = 2\mathrm{AC}$ より，

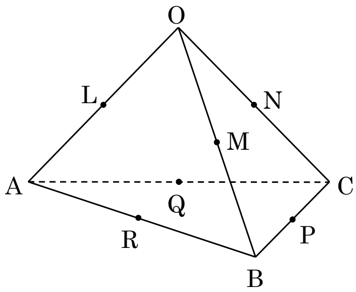
$$\triangle\mathrm{EFC} = \left(\frac{3}{2}\times 2\right)\triangle\mathrm{ACF} = 3\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，点 P の存在する範囲の面積は△ABC の 3 倍となる。

［解 説］

一般的に難しめの問題が多いベクトルと領域の融合題ですが，本問は基本の確認が主となっています。

7 ［2001 東北大・文］



(1) 線分 LP の中点を S とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

これから, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と表せ, 点 S は線分 MQ の中点に一致する。

また, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ とも表せるので, S は線分 NR の中点にも一致する。

よって, 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わる。

(2) 条件より, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$………①

$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\text{………②}$$

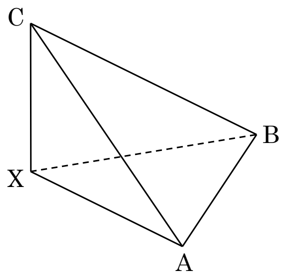
$$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\text{………③}$$

②③より $\vec{a}=\vec{q}+\vec{r}$, ①③より $\vec{b}=\vec{p}+\vec{r}$, ①②より $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$

(3) 条件より, $\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=-\overrightarrow{\mathrm{LP}}=-\vec{p}$

$$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{r}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{XC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{r}$$



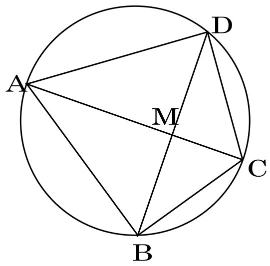
$\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ が互いに直交することより, 四面体 XABC の体積は,

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\Big)|\vec{r}|=\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$$

［解 説］

(3)で与えられた条件によって, 四面体 OABC の 4 つの面は合同になります。このとき, この四面体は直方体に埋め込まれるということが元になっています。ずいぶん前になりますが, 1993 年に東大・理で, この考え方を利用する問題が出ています。

8　　[2002 千葉大・理]



(1)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\vec{0}$ より，

$$\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}=-2\cdot\frac{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}}{2}$$

BD の中点を M とすると，$\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{CM}$ ………(＊)

よって, A, M, C は同一直線上にあるので, 直線 AC は線分 BD の中点を通る。

(2)　(1)より，BM = DM

また, 条件より $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ なので，$AC\perp BD$

これより, AC は BD の垂直二等分線となり，$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ となるので,

$$\angle ABC=\angle ADC$$

また, 四角形 ABCD は円に内接するので，$\angle ABC+\angle ADC=180°$ より,

$$\angle ABC=\angle ADC=90°$$

すなわち, AC は半径 1 である四角形 ABCD の外接円の直径となり，AC = 2 である。

ここで, (＊)より，AM : MC = 2 : 1 なので，$AM=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

外接円の中心を O とすると，$OM=AM-AO=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

$$BM=\sqrt{OB^2-OM^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$AB=AD=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$$BC=DC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4-\frac{24}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

［解 説］

(1)の誘導によって, AC が外接円の直径であることを見つけるのが最大のポイントです。

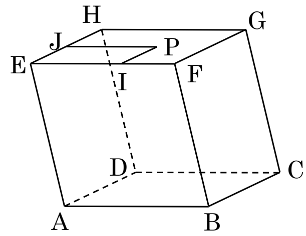
9 [2002 九州大・文]

(1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sqrt{1-\cos^2 A}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2(1-\cos^2 A)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

(2) 条件より，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$|\overrightarrow{AE}|=2a$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=1\cdot 2a\cos 120^\circ=-a$$



ここで，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2=2$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2=x^2|\overrightarrow{AB}|^2+y^2|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AE}|^2$$
$$+2xy\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2y\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+2x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$$
$$=x^2+y^2+4a^2-2ax$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+y|\overrightarrow{AD}|^2+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$$
$$=x-a+y$$

そこで，$\triangle ACP$ の面積を S とすると，(1)より，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2+4a^2-2ax)-(x-a+y)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2xy+y^2-2ax+2ay+7a^2}$$

(3) $P=x^2-2xy+y^2-2ax+2ay+7a^2$ とおくと，$S=\frac{1}{2}\sqrt{P}$ となる。

さて，$x-y=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であり，

$$P=(x-y)^2-2a(x-y)+7a^2=(x-y-a)^2+6a^2=(t-a)^2+6a^2$$

(i) $0<a\leqq 1$ のとき

P は $t=a$ で最小値 $6a^2$ をとり，このとき S も最小となり，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{6a^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

(ii) $a>1$ のとき

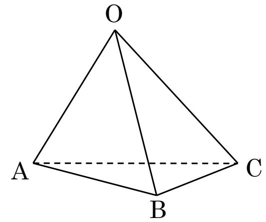
P は $t=1$ で最小値 $1-2a+7a^2$ をとり，このとき S も最小となり，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{1-2a+7a^2}$$

［解 説］

空間ベクトルについての標準的な問題です。(3)は 1 文字を固定して，2 次関数として最小値を求める問題かとも思いましたが，式の特徴を利用すると，その必要はありませんでした。

10 ［2003 京都大］



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件(i)より，

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

まとめて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$ ……①とおく。

また，条件(ii)より，$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}$ から，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

①より，$|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{c}|=|\vec{c}||\vec{a}|$

まとめて，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=l$ ……②とおく。

ここで，①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})=k-k-k+l^2=l^2-k$$

すると，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{4(l^2-k)^2-(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}$$

さらに，$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{OAB}$ より，$\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{l^4-k^2}$

$$3(l^2-k)^2=(l^2-k)(l^2+k),\ 3(l^2-k)=l^2+k,\ l^2=2k\ \cdots\cdots③$$

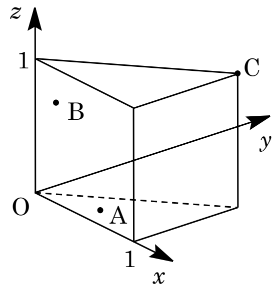
③より，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{k}{l^2}=\dfrac{1}{2}$ から，$\angle\mathrm{AOB}=60°$ となる。

同様にして，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60°$ なので，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OBC}$，$\triangle\mathrm{OCA}$ は正三角形となり，四面体 OABC は正四面体である。

［解 説］

頂角が 60° の二等辺三角形は正三角形という方針で解をつくりました。

$\boxed{11}$ 　[2004 九州大・理]



(1)　求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\overrightarrow{OA}\cdot\vec{e}=0$ より，$ax+by=0$ ………①

$\overrightarrow{OC}\cdot\vec{e}=0$ より，$x+y+z=0$ ………②

①より，$(x,\ y)=k(b,\ -a)$ （k は実数）

②から，$z=-x-y$ なので，

$$(x,\ y,\ z)=k(b,\ -a,\ a-b)$$

$|\vec{e}|=1$ より，$1=|k|\sqrt{b^2+(-a)^2+(a-b)^2}$ から，

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{b^2+(-a)^2+(a-b)^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$$

よって，$\vec{e}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}(b,\ -a,\ a-b)$

すると，$\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}=\pm\dfrac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$ より，$|\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}|=\dfrac{|bc+ad-bd|}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$

ここで, $a\geqq b\geqq 0,\ c\geqq 0,\ d\geqq 0$ なので，$bc+ad-bd=bc+d(a-b)\geqq 0$ となり，

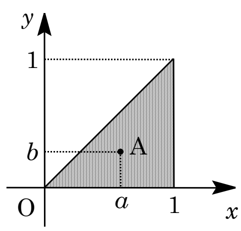
$$|\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}|=\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}$$

(2)　四面体 OABC において，△OAC を底面とすると，高さは $|\overrightarrow{OB}\cdot\vec{e}|$ となる。

$$\triangle OAC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(a^2+b^2)-(a+b)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}$$

四面体 OABC の体積を V とすると, (1)より,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}\cdot\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}=\frac{1}{6}(bc+ad-bd)$$



(3)　まず, 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ の位置を S 内でいったん固定した後，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内で動かし，V が最大になるときの点 B の位置を求める。次に，この状態を保ったまま，点 A を S 内で動かし，V の最大値を求める。なお，$a=b=0$ のときは，点 A が原点 O と一致するので不適である。

(i)　点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a>b>0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}\{(a-b)d+bc\}$ となるので，V は d の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$，

$0\leqq c\leqq 1$ より，$c=d=1$ のとき V は最大になる。

このとき，$V=\dfrac{1}{6}(a-b+b)=\dfrac{1}{6}a$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと, V は $a=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=c=d=1$，$0<b<1$ のとき, V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(ii) 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a>b=0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}ad$ となるので，V は d の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$ より，$d=1$ のとき V は最大になる。このとき $V=\dfrac{1}{6}a$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと, V は $a=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=d=1$，$b=0$，$0\leqq c\leqq 1$ のとき, V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(iii) 点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を $a=b>0$ の位置に固定したとき

$V=\dfrac{1}{6}bc$ となるので，V は c の単調増加関数であり，$0\leqq c\leqq 1$ より，$c=1$ のとき V は最大になる。このとき $V=\dfrac{1}{6}b$ である。

そこで，点 A を S 内で動かすと, V は $b=1$ で最大となり，その値は $\dfrac{1}{6}$ である。

よって，$a=b=c=1$，$0\leqq d\leqq 1$ のとき, V は最大値 $\dfrac{1}{6}$ をとる。

(i)(ii)(iii)より, V の最大値は $\dfrac{1}{6}$，このときの点 A, B の位置は次の 3 種類である。

$\mathrm{A}(1,\ b,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$　$(0<b<1)$

$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(c,\ 0,\ 1)$　$(0\leqq c\leqq 1)$

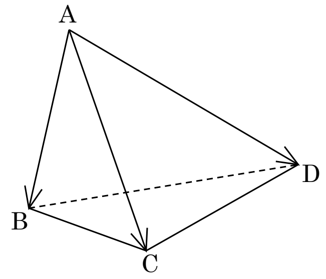
$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ d)$　$(0\leqq d\leqq 1)$

［解 説］

(2)までは 1999 年に類題が出ています。ただ，(3)の最大値を求めるときに，いわゆる「予選→決勝戦」という 1 文字固定の解法を用いる必要があります。上の解では条件のきつい点 A をとりあえず固定し，点 B を動かすという方法で解きました。

12 ［2005 大阪大・理］

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおくと，条件より，



$$|\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=2,\ |\vec{d}|=3$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot2\cdot\cos60^\circ=1$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$$

$$\vec{d}\cdot\vec{b}=3\cdot1\cdot\cos90^\circ=0$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=x\vec{b}+y\vec{c}+z\vec{d}$ とおくと，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(x+y)+1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(x+4y+3z)+4$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{d}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(3y+9z)+9$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|$ なので，

$$-2(x+y)+1=0,\ 2x+2y=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$-2(x+4y+3z)+4=0,\ x+4y+3z=2\cdots\cdots\cdots②$$

$$-2(3y+9z)+9=0,\ 2y+6z=3\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=0$，$z=\dfrac{1}{2}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2\right)=\frac{5}{2}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

［解 説］

$\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$ なので, A を原点とする座標を設定して解こうか，どうしようかと迷いました。計算量はどちらでも同じぐらいでしょう。

$\boxed{13}$ ［2006 京都大・理］

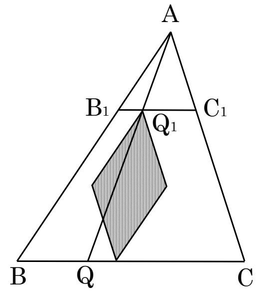
BC 上に点 Q を固定し, $0<p<1$, $0<r<1$ として,

$$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$$

△PQR の重心を G とすると,

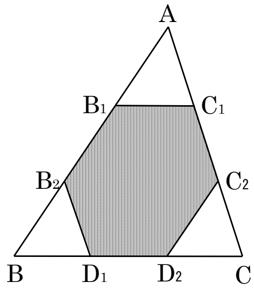
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+p\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+r\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

ここで, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AQ_1}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_1}$ とおき, 線分 AB_1, AC_1 を隣りあう 2 辺とする平行四辺形を S_A とおく。



さて, p, r を $0<p<1$, $0<r<1$ を満たすように動かすと, 点 G は, S_A を $\overrightarrow{AQ_1}$ だけ平行移動した平行四辺形 S_{Q_1} の内部を動く。

ここで, 点 Q を辺 BC 上で点 B から点 C まで動かすと, 点 Q_1 は線分 B_1C_1 上を点 B_1 から点 C_1 まで動く。その結果, 平行四辺形 S_{Q_1} は平行移動し, その通過領域が点 G の動く範囲である。



以上より, 辺 AB の三等分点を B_1, B_2, 辺 AC の三等分点を C_1, C_2, 辺 BC の三等分点を D_1, D_2 とおくと, 点 G は六角形 $B_1B_2D_1D_2C_2C_1$ の内部を動く。

すなわち, 点 G の動く範囲は右図の網点部である。ただし, 境界線は含まない。

［解 説］

独立に動く点が 3 つあり, そのうちの 1 つを固定して考えた解です。そのプロセスが記述しにくく, そのため演習するのに適した問題です。