２０２２ 入試対策

２次数学ランドマーク

積分の応用44題

理系 24か年

１９９８ － ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

積分の応用

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 xyz 空間に 5 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(-1,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{D}(1,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 3)$ をとる。四角錐 PABCD の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

[1998 東京大]

2 xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0,\ 0,\ a)$, $(1,\ 0,\ a)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である。また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0,\ a,\ 0)$, $\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。

このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。 [1999 大阪大]

3 空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は 1 辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0<r\leqq\sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1) 高さが $z=t\ (-r\leqq t\leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2) K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3) $0<r\leqq\sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。 [2001 九州大]

4 関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b （$a<b$） まで変化するとき，点 P, Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1, L_2 とする。L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。 [2001 九州大]

5 (1) $x\geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 極方程式 $r=\theta\ (\theta\geqq 0)$ で定義される曲線の，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを求めよ。

[2002 京都大]

6 xyz 空間内に 2 点 $\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$，$\mathrm{Q}(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2})$ を考える。u が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u,\ 0,\ 0)\ (0 \leqq u \leqq 1)$ と線分 PQ の距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

［2003 東北大］

7 xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。

次に，平面 $z=0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。

円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ。

(2) C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。

［2003 東京大］

8 n を 3 以上の自然数とする。点 O を中心とする半径 1 の円において，円周を n 等分する点 P_0，P_1，…，P_{n-1} を時計回りにとる。各 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接するような放物線を C_i とする。ただし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_0$ とする。放物線 C_1，C_2，…，C_n によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

［2004 大阪大］

9 $f(x)$ は $x \geqq 0$ で連続で，$f(0)=0$ かつ $x>0$ において $f'(x)>0$ を満たすとする。$t>0$ に対して，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=t$ とで囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $X(t)$，曲線 $y=f(x)$ と y 軸および直線 $y=f(t)$ とで囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $Y(t)$ とする。また，$X(0)=Y(0)=0$ とする。このとき，次を示せ。

(1) $X'(t)=\pi f(t)^2$，$Y'(t)=\pi t^2 f'(t)\ (t>0)$ である。

(2) $f(x)$ が整式でかつ，すべての $t \geqq 0$ に対して $X(t)=Y(t)$ が成り立つならば，$f(x)=x\ (x \geqq 0)$ である。

(3) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ならば，$X(t)=Y(t)\ (t \geqq 0)$ である。

［2004 筑波大］

$\boxed{10}$ 座標空間に定点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ をとる。点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から yz 平面に下ろした垂線の足を H とする。$k>1$ である定数 k に対して，$\mathrm{PH}:\mathrm{PA}=k:1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。

(2) S のうちで，$y \geqq 0$ かつ $z=0$ を満たす部分を C とする。S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ。

(3) S で囲まれる立体の体積を求めよ。 ［2004 岡山大］

$\boxed{11}$ D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a) D の中心は C 上にある。

(b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0,\ 1,\ 0)$ と直交する。 ［2005 東京工大］

$\boxed{12}$ r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2 \leqq r^2,\quad y^2+z^2 \geqq r^2,\quad z^2+x^2 \leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。 ［2005 東京大］

$\boxed{13}$ 座標平面において，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である。l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標 α，β を θ の式で表せ。

(2) θ を $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする。このとき，直線 $y=\sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。 ［2006 岡山大］

$\boxed{14}$ xyz 空間に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(-1,\ 1,\ 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) t を $0<t<2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と，$\triangle\mathrm{PQR}$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。［2006 神戸大］

$\boxed{15}$ 座標空間において，$|x| \leqq z^2$ を満たす点$(x,\ y,\ z)$全体からなる立体を R とする。点$(0,\ 0,\ 1)$を通り，x 軸と平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし, R と C の共通部分を T とする。

(1) $-1<h<1$ を満たす定数 h に対して，点$(0,\ 0,\ 1+h)$を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。

(2) T の体積を求めよ。 [2006 筑波大]

$\boxed{16}$ xyz 空間において，点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2007 東北大]

$\boxed{17}$ (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心をG_1，G_2とする。G_1，G_2を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。 [2008 東京大]

$\boxed{18}$ xyz 空間の原点と点$(1,\ 1,\ 1)$を通る直線を l とする。

(1) l 上の点$\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$を通り l と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式$0 \leqq y \leqq x(1-x)$の表す xy 平面内の領域を D とする。l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。 [2009 東京工大]

$\boxed{19}$ a を正の実数とする。座標平面において曲線$y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線$y=\sin x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=a\cos x\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき$S:T=3:1$となるような a の値を求めよ。 [2010 京都大]

$\boxed{20}$ $0<t<3$ のとき，連立不等式

$$0 \leqq y \leqq \sin x,\ 0 \leqq x \leqq t-y$$

の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を$V(t)$とする。$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$となる t と，そのときの$V(t)$の値を求めよ。 [2010 東北大]

21 半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

(A) S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B) S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。［2010 大阪大］

22 a を実数とする。円 C は点 $(a,\ -a)$ で直線 $y=-x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする。C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ。

(1) X, Y を a を用いて表せ。

(2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

［2011 東北大］

23 xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ -1)$，$\mathrm{R}(t,\ t^2-t+1,\ 0)$ を考える。t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。以下の問いに答えよ。

(1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。 ［2011 熊本大］

24 $-\dfrac{1}{4}<s<\dfrac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\left\{(x,\ y,\ 0)\ \middle|\ 1 \leqq x \leqq 2+4s,\ 1 \leqq y \leqq 2-3s\right\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2) s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。 ［2011 名古屋大］

25 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b)-f(a)=\int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が, 時刻 0 で発進後, 距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。 ［2012 千葉大］

26 半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし, 直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき, 体積の小さい方の部分を V とする。

(1) 直径 AB と直交し, O との距離が t $(0 \leqq t \leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。 ［2013 東北大］

27 xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 ［2013 大阪大］

28 関数 $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ のグラフ C について, 次の問いに答えよ。

(1) C の変曲点のうち, x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2) (1)で求めた P の x 座標を b とするとき，$\tan\theta=e^b$ を満たす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3) 上の b に対する直線 $x=b$ と x 軸, y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。

［2014 金沢大］

29 空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており, その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1) B の中心と l との距離を求めよ。

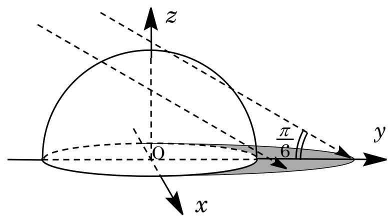
(2) l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 ［2014 名古屋大］

30 平面上に 2 つの円 $C_1 : x^2+y^2=1$，$C_2 : \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ があり，点 $(-1,\ 0)$ で接している。

点 P_1 は C_1 上を反時計まわりに一定の速さで動き，点 P_2 は C_2 上を反時計まわりに一定の速さで動く。2 点 P_1，P_2 はそれぞれ点 $(1,\ 0)$ および点 $(-1,\ 0)$ を時刻 0 に同時に出発する。P_1 は C_1 を一周して時刻 2π に点 $(1,\ 0)$ に戻り，P_2 は C_2 を二周して時刻 2π に点 $(-1,\ 0)$ に戻るものとする。P_1 と P_2 の中点を M とおく。

P_1 が C_1 を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。 ［2015 千葉大］

31 座標空間内に，原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1<k<1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x=k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。 ［2015 九州大］

32 座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。P, Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ。 ［2015 大阪大］

33 $a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに１回転してできる回転体を A とする。

(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t,\ 0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ を示せ。 ［2015 東京工大］

34 半直線 $l: y=x$ $(x \geqq 0)$，放物線 $C: y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と半直線 l が接する点の座標を求めよ。

(2) $t \geqq 0$ とする。原点からの距離が t である l 上の点を $\mathrm{A}(t)$ とするとき，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線と，放物線 C の共有点の座標を t を用いて表せ。

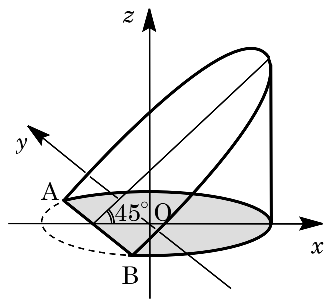
(3) 放物線 C と半直線 l および y 軸とで囲まれた図形を，半直線 l のまわりに１回転してできる回転体の体積を求めよ。 ［2016 信州大］

35 xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で，$|x| \leqq \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0 \leqq y \leqq \log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は１より大きい定数とする。

この図形 D を y 軸のまわりに１回転させてできる立体の体積を求めよ。

［2016 京都大］

36 座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H, 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1) 立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2) 立体 V を平面 $x=t\ (-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3) 立体 V の体積を求めよ。 ［2017 広島大］

37 xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\ \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。 ［2017 大阪大］

38 点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}$ を θ とおく。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) 点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。 ［2017 東京大］

39 座標空間において，O を原点とし，A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(1, 1, 0) とする。△OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x, y, z の式で表せ。

(2) P$(x,\ y,\ z)$ が L の点であるための条件は，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ であることを示せ。

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ。 [2018 神戸大]

40 媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2) C の凹凸を調べ，C の概形を描け。

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。 [2019 神戸大]

41 正の整数 n に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ とする。

(1) I_1 を求めよ。必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2) $n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする。C を平面 $x=\dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。 [2019 名古屋大]

42 $-2\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3}\right)+\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ を考える。次の問いに答えよ。必要であれば，$\pi^2<10$ を用いてよい。

(1) $f(x)$ は閉区間 $[-2\pi,\ \pi]$ で増加することを示せ。

(2) 開区間 $(-2\pi,\ \pi)$ で，つねに $f(x)>x$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，定積分 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} f^{-1}(x)\,dx$ の値を求めよ。

(4) $f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，2 つの曲線

$$C_1 : y=f(x)\ (0 \leqq x \leqq \pi),\ \ C_2 : y=f^{-1}(x)\ \big(f(0) \leqq x \leqq f(\pi)\big)$$

を考える。C_1，C_2 および直線 $x+y=f(0)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

［2020 金沢大］

43 座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える。この円を底面とし，点$(0,\ 0,\ 2)$を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える。

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする。平面 $z=1$ による S の切り口，および平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ。 ［2020 東京大］

44 座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\ \ y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 P と原点 O との距離を求めよ。

(2) 点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ。 ［2021 神戸大］

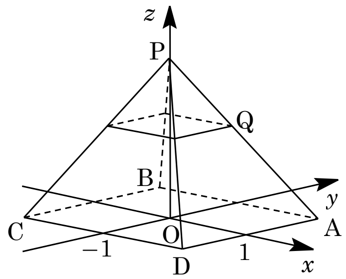
積分の応用

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 東京大］

平面$z=k\ (k\geqq 0)$において，四角錐 PABCD の切り口を，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$に領域で考える。



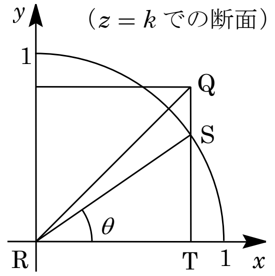
平面$z=k$とz軸との交点を R, 辺 AP との交点を Q とする。

$\mathrm{RQ}:\mathrm{OA}=\mathrm{PR}:\mathrm{PO}$より，$\mathrm{RQ}:\sqrt{2}=(3-k):3$

$$\mathrm{RQ}=\frac{\sqrt{2}}{3}(3-k)$$

ここで，$\mathrm{RQ}\geqq 1$とすると，$k\leqq 3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}(2-\sqrt{2})$

よって，$0\leqq k\leqq \dfrac{3}{2}(2-\sqrt{2})$



さて，右の断面において，RS とx軸の正方向とのなす角をθとする。

円柱$x^2+y^2=1$の外部（または面上）と四角錐 PABCD の内部（または面上）の共通部分を，平面$z=k$で切断した断面の面積を$S(k)$とすると，$\mathrm{RT}=\mathrm{RQ}\sin\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{k}{3}$より，

$$S(k)=2\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{3}\right)\left(1-\frac{k}{3}\right)\tan\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}$$

$$=\left(1-\frac{k}{3}\right)^2\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)-\frac{\pi}{4}+\theta$$

$$=\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\frac{\pi}{4}+\theta\quad\left(\cos\theta=1-\frac{k}{3}\text{より}\right)$$

求める体積をVとすると，$-\sin\theta d\theta=-\dfrac{1}{3}dk$より，

$$V=4\int_0^{\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})}S(k)dk=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\frac{\pi}{4}+\theta)3\sin\theta d\theta$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^2\theta-\frac{\pi}{4}\sin\theta+\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=12\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+\frac{\pi}{4}\cos\theta-\theta\cos\theta+\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=12\left(-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4+4\sqrt{2}-3\pi$$

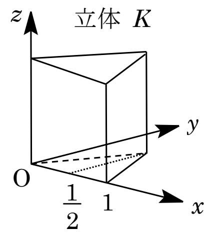
［解 説］

空間では，$x^2+y^2=1$が円柱を表すということがわからないと手も足もでませんが，それがクリアーできれば，後は体積計算の基本です。上の解ではz軸に垂直に切りましたが，他の軸について切っても OK です。

$\boxed{2}$ ［1999 大阪大］

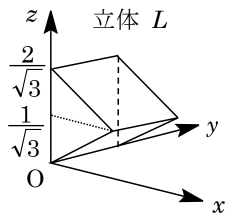
立体 K を表す不等式は,

$$y \geqq 0,\ \ y \leqq \sqrt{3}x,\ \ y \leqq -\sqrt{3}(x-1) \cdots\cdots\cdots ①$$



立体 L を表す不等式は,

$$x \geqq 0,\ \ z \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ \ z \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ②$$



立体 K と L の共通部分を平面 $x=k$ で切った断面で考える。また, その面積を $S(k)$ とおく。

②より, $k \geqq 0,\ \ \dfrac{1}{\sqrt{3}}k \leqq z \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}k + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ③$

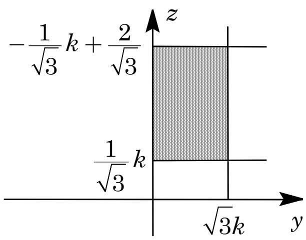
断面が存在する条件は, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}k \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}k + \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ より, $k \leqq 1$ となるので, $0 \leqq k \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ④$

①より, $y \geqq 0,\ \ y \leqq \sqrt{3}k,\ \ y \leqq -\sqrt{3}(k-1) \cdots\cdots\cdots ⑤$

④⑤より, $\sqrt{3}k \leqq -\sqrt{3}(k-1) \iff 0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$, $\sqrt{3}k \geqq -\sqrt{3}(k-1) \iff \dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$

(i) $0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

③⑤より $x=k$ で切った断面は右図のようになる。

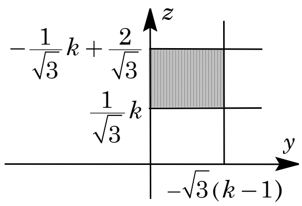


$$S(k) = \sqrt{3}k\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$

$$= -2k(k-1)$$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$ のとき

③⑤より $x=k$ で切った断面は右図のようになる。



$$S(k) = -\sqrt{3}(k-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$

$$= 2(k-1)^2$$

以上より, 立体 K と L の共通部分の体積 V は,

$$V = \int_0^{\frac{1}{2}} -2k(k-1)\,dk + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2(k-1)^2\,dk = \left[-\frac{2}{3}k^3 + k^2\right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\left[(k-1)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

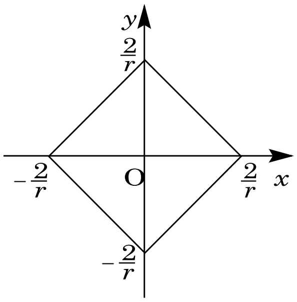
［解 説］

2 つの立体の共通部分の体積を求めるという以前からの頻出題の一つです。現行の課程では出題されなくなるという噂もありましたが, そうではありませんでした。

3 [2001 九州大]

(1) 中心軸が x 軸で，断面が半径 r の円である円柱は，$y^2+z^2\leqq r^2$ ………①

また，中心軸が z 軸で，断面が右図のような１辺 $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形である正四角柱は，



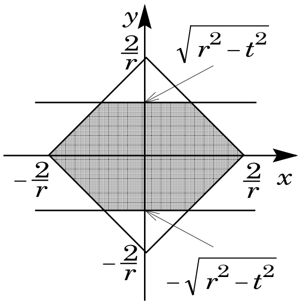
$$|x|+|y|\leqq\frac{2}{r}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②の共通部分を平面 $z=t$ $(-r\leqq t\leqq r)$ で切ったときの切り口は，$y^2+t^2\leqq r^2$，$|x|+|y|\leqq\dfrac{2}{r}$

$$-\sqrt{r^2-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{r^2-t^2}\ ,\ |x|+|y|\leqq\frac{2}{r}$$

さて，$0<r\leqq\sqrt{2}$ から，$\dfrac{2}{r}\geqq r\geqq\sqrt{r^2-t^2}$

よって，$z=t$ での切り口は右図の網点部となり，その面積を $S(t)$ とすると，



$$S(t)=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}-\sqrt{r^2-t^2}\right)^2\right\}\times 4$$
$$=\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}+2t^2-2r^2$$

(2) 共通部分 K が xy 平面に関して対称なので，

$$V(r)=2\int_0^r S(t)\,dt=2\int_0^r\left(\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}+2t^2-2r^2\right)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^r\sqrt{r^2-t^2}\,dt=\pi r^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\pi r^2$ より，

$$V(r)=\frac{16}{r}\cdot\frac{1}{4}\pi r^2+2\left[\frac{2}{3}t^3-2r^2t\right]_0^r=4\pi r-\frac{8}{3}r^3$$

(3) $V'(r)=4\pi-8r^2=-4(2r^2-\pi)$

r	0	…	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$	…	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		＋	0	－	
$V(r)$		↗		↘	

右表より，$0<r\leqq\sqrt{2}$ において，$r=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ のときに $V(r)$ は最大となる。そして，最大値は，

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\sqrt{\pi}$$

［解 説］

10 年も前になりますが，直交する円柱と円柱の共通部分の体積を求める問題が 1991 年に出ました。今年は円柱と正四角柱でしたが，それにしても，この種類の問題はよく出題されます。

4 ［2001 九州大］

(1) $\mathrm{P}(t,\ f(t))$における接線の傾きは$f'(t)$より，$\tan\theta(t)=f'(t)$となる。

$$\frac{1}{\cos^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=f''(t),\ \ \theta'(t)=f''(t)\cos^2\theta(t)$$

条件より，$f''(t)>0$なので$\theta'(t)>0$，よって$\theta(t)$はつねに増加する。

(2) ①より，接線の方向ベクトルは$(1,\ \tan\theta(t))$とおけるので，下向きの法線ベクトルは$\vec{n}=(\tan\theta(t),\ -1)$となる。

すると，$|\vec{n}|=\sqrt{\tan^2\theta(t)+1}=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta(t)}}=\dfrac{1}{\cos\theta(t)}$より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\cos\theta(t)\vec{n}=(t,\ f(t))+\cos\theta(t)(\tan\theta(t),\ -1)$$

$$=(t,\ f(t))+(\sin\theta(t),\ -\cos\theta(t))=(t+\sin\theta(t),\ f(t)-\cos\theta(t))$$

よって，$\alpha(t)=t+\sin\theta(t),\ \beta(t)=f(t)-\cos\theta(t)$

(3) (1)より，$1+\{f'(t)\}^2=1+\tan^2\theta(t)=\dfrac{1}{\cos^2\theta(t)}$なので，

$$L_1=\int_a^b\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)}}\,dt=\int_a^b\frac{1}{\cos\theta(t)}dt$$

(2)から，$\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2+\{f'(t)+\sin\theta(t)\theta'(t)\}^2$

$$=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2+\{\tan\theta(t)+\sin\theta(t)\theta'(t)\}^2$$

$$=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2\{1+\tan^2\theta(t)\}=\frac{\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}$$

$$L_2=\int_a^b\sqrt{\frac{\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}}\,dt=\int_a^b\frac{1+\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)}dt$$

よって，$L_2-L_1=\displaystyle\int_a^b\frac{\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)}dt=\int_a^b\theta'(t)dt=\big[\,\theta(t)\,\big]_a^b=\theta(b)-\theta(a)$

［解 説］

ていねいな誘導がついた，よく練られた問題です。(3)の結論は予想以上に簡明なものでした。

$\boxed{5}$ ［2002 京都大］

(1) $f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$ に対して,

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2) 曲線 $r=\theta$ 上の点を $(x,\ y)$ とすると, $x=r\cos\theta=\theta\cos\theta$, $y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2=1+\theta^2$$

曲線 $r=\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを l とすると,

$$l=\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta=\Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi-\int_0^\pi\theta\cdot\frac{2\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\left(\sqrt{1+\theta^2}-\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\right)d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-l+\Big[\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\Big]_0^\pi=\pi\sqrt{1+\pi^2}-l+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

$$2l=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$$

よって, $l=\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{1+\pi^2}+\dfrac{1}{2}\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$

［解 説］

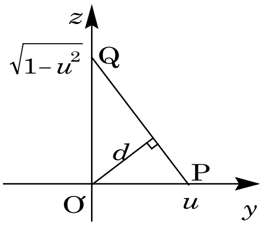
(2)の部分積分による計算は有名なものですが, 経験がないと無理でしょう。

6 ［2003 東北大］

(1) 平面 $x=u$ 上で考えて，点 $O'(u,\ 0,\ 0)$ と線分 PQ との距離を d とすると，

$$PQ\times d = O'P\times O'Q$$

$PQ=\sqrt{u^2+(1-u^2)}=1$ より，$d=u\sqrt{1-u^2}$



(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を，平面 $x=u$ で切断したときの切り口は，線分 PQ を x 軸のまわりに回転させて得られるドーナツ状の図形である。その面積を $S(u)$ とおく。

さて，$u\leqq\sqrt{1-u^2}$ とすると，$0\leqq u\leqq 1$ から $u^2\leqq\dfrac{1}{2}$ なので，$0\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

また，$u\geqq\sqrt{1-u^2}$ とすると，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq 1$ である。

(i) $0\leqq u\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$S(u)=\pi(\sqrt{1-u^2})^2-\pi d^2=\pi\left\{1-u^2-u^2(1-u^2)\right\}=\pi(1-2u^2+u^4)$$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq 1$ のとき

$$S(u)=\pi u^2-\pi d^2=\pi\left\{u^2-u^2(1-u^2)\right\}=\pi u^4$$

(i)(ii)より，求める立体の体積を V とすると，

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(1-2u^2+u^4)\,du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi u^4\,du$$

$$=\pi\left[u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[\frac{1}{5}u^5\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{5}\right)\pi$$

［解 説］

頻出有名問題の 1 つです。ドーナツ状の切り口の外径が，$O'P$ か $O'Q$ かで場合分けをします。

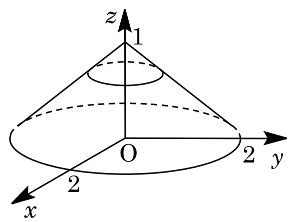
7 ［2003 東京大］

(1) 円錐 A を平面 $z=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で切断したとき，その切り口の円の半径を r とすると，

$r:2=1-t:1$，$r=2(1-t)$

よって，$z=t$ 上で，この円の方程式は，

$x^2+y^2=4(1-t)^2$ ………①

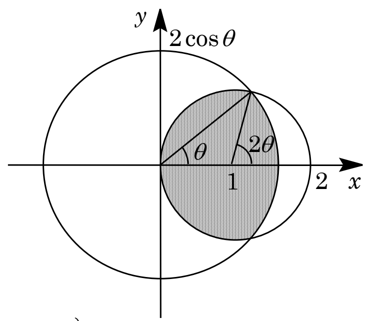


また，円柱 B は，中心 $(1,\ 0,\ 0)$ で半径 1 の円を底面とし，中心軸が z 軸に平行なので，その方程式は，$z=t$ 上でも，

$(x-1)^2+y^2=1$ ………②

①と②の交点は，①－②より，$x=2(1-t)^2$

$t=1-\cos\theta$ とおくと $x=2\cos^2\theta$ となり，①の半径が $r=2\cos\theta$ から $\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ である。



①より $y^2=4\cos^2\theta-4\cos^4\theta=4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)$

$=4\cos^2\theta\sin^2\theta=\sin^2 2\theta$

よって，$y=\pm\sin 2\theta$ となり，共通部分の面積は，

$$S(t)=2\left\{\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin 2\theta\right\}$$

$$=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi$$

(2) $t=1-\cos\theta$ より，$\dfrac{dt}{d\theta}=\sin\theta$ となり，$t=0$ のとき $\theta=0$，$t=1$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta\sin\theta-\sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta+\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\theta\cos 2\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta(\sin 3\theta-\sin\theta)\,d\theta$

$$=-\left[\theta\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)d\theta=-\frac{10}{9}$$

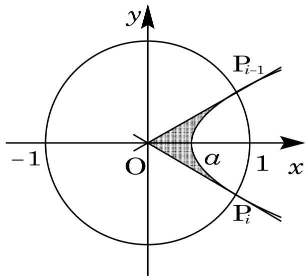
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3\theta-\cos\theta)\,d\theta=\frac{2}{3}$$

よって，$V=-\dfrac{10}{9}-\dfrac{2}{3}+\pi\cdot 1=\pi-\dfrac{16}{9}$

［解 説］

空間図形の求積に関する頻出題です。誘導の与え方を見て，似た問題があったという記憶があり，調べてみると，それは 1994 年度の 3 番でした。

8 ［2004 大阪大］



$1\leqq i\leqq n$ として，右図のように，$P_{i-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{n},\ \sin\dfrac{\pi}{n}\right)$，$P_i\left(\cos\dfrac{\pi}{n},\ -\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$とおく。

また，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接する放物線を $y^2=4p(x-a)\ (p>0)$ とすると，点 P_{i-1} における接線は，$y\sin\dfrac{\pi}{n}=2p\left(x-a+\cos\dfrac{\pi}{n}-a\right)$

$$y=\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{n}}x+2p\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n}-2a}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdots\cdots\cdots①$$

また，直線 OP_{i-1} は，$y=x\tan\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots②$

①と②が一致することより，

$$\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{n}}=\tan\frac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots③,\quad \cos\frac{\pi}{n}-2a=0\cdots\cdots\cdots④$$

③より $p=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots⑤$，④より $a=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots⑥$となる。

このとき，直線 OP_{i-1}，OP_i と放物線によって囲まれた図形の面積を T_i とおくと，

$$T_i=2\left\{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}-\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}y\,dx\right\}$$

ここで, $n\geqq 3$ なので，$0<\dfrac{\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{3}$ となり，⑤⑥より，

$$\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}y\,dx=\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}2\sqrt{p}\sqrt{x-a}\,dx=2\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}\Big[(x-a)^{\frac{3}{2}}\Big]_a^{\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{p}\left(\cos\frac{\pi}{n}-a\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\tan\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

よって，$T_i=\cos\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}-\dfrac{2}{3}\cos\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$

すると，$S_n=nT_i=\dfrac{n}{3}\cos\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\frac{\pi}{3}$

［解 説］

ひねりはあるものの，よく見かける問題です。

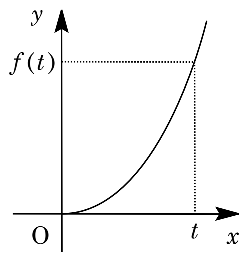
9 ［2004 筑波大］

(1) まず，$X(t)=\pi\int_0^t\{f(x)\}^2dx$ より，$X'(t)=\pi\{f(t)\}^2$

また，$f(x)$ は $x\geqq 0$ で連続で，単調に増加するので，

$$Y(t)=\pi\int_0^{f(t)}x^2dy=\pi\int_0^t x^2f'(x)\,dx$$

よって，$Y'(t)=\pi t^2f'(t)$



(2) $t\geqq 0$ に対して $X(t)=Y(t)$ より，$X'(t)=Y'(t)$ $(t>0)$ となるので，(1)から，

$$\pi\{f(t)\}^2=\pi t^2f'(t),\ \{f(t)\}^2=t^2f'(t)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)$ が定数の場合は，明らかに$(*)$は成立しないので，$n\geqq 1$ として，$f(x)$ を n 次の整式とする。

$(*)$の左辺の次数は $2n$，右辺の次数は $2+(n-1)=n+1$ から，

$$2n=n+1,\ n=1$$

これより，$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ とおくことができる。

$(*)$に代入して，$(at+b)^2=at^2$，$(a^2-a)t^2+2abt+b^2=0$

すべての $t>0$ に対して成立するので，

$$a^2-a=0,\ 2ab=0,\ b^2=0$$

$a\neq 0$ から，$a=1$，$b=0$ となり，$f(x)=x$ $(x\geqq 0)$ である。

(3) $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ のとき，$f(0)=0$ かつ $f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$ $(x>0)$ であり，

$$\{f(t)\}^2=\frac{t^2}{(1+t)^2}=t^2f'(t)$$

よって，(1)より，$X'(t)=Y'(t)$

すると，$X(0)=Y(0)$ から，$t\geqq 0$ において，$X(t)=Y(t)$ である。

［解 説］

抽象関数が題材で，しかも問題文が長いのですが，案ずるほどではありませんでした。

$\boxed{10}$ ［2004 岡山大］

(1) PH : PA $= k : 1$ より，PH $= k$PA となり, S の方程式は,

$$|x| = k\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2},\quad x^2 = k^2\{(x-1)^2+y^2+z^2\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

点 P と x 軸との距離を d とすると，$d=\sqrt{y^2+z^2}$ なので, $(*)$より，

$$d^2 = \frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2 = -\frac{k^2-1}{k^2}x^2+2x-1 = -\frac{k^2-1}{k^2}\Big(x-\frac{k^2}{k^2-1}\Big)^2+\frac{1}{k^2-1}$$

$k>1$ より $-\frac{k^2-1}{k^2}<0$ となり，$x=\frac{k^2}{k^2-1}$ のとき d^2 は最大となる。このとき，d は最大値 $\sqrt{\frac{1}{k^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ をとる。

(2) $(*)$に $z=0$ を代入すると，$x^2=k^2\{(x-1)^2+y^2\}$，$y^2=\frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2$

$y\geqq 0$ より $y=\sqrt{\frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2}$ となり, C の方程式は,

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2},\quad z=0$$

さて, C を x 軸のまわりに回転してできる図形を, x 軸の垂直な平面 $x=t$ で切断したとき，その切り口は半径が $\sqrt{\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2}$ の円になり，

$$y^2+z^2=\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2,\quad x=t$$

t は任意なので，この図形は方程式 $y^2+z^2=\frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2$ で表され，これは$(*)$と一致する。すなわち図形 S である。

(3) 切り口が存在する t の範囲は，$\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2\geqq 0$，$(k^2-1)t^2-2k^2t+k^2\geqq 0$

$$\{(k+1)t-k\}\{(k-1)t-k\}\leqq 0,\quad \frac{k}{k+1}\leqq t\leqq\frac{k}{k-1}$$

S で囲まれる立体の体積を V とすると，

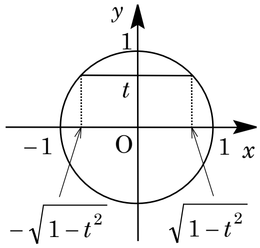
$$V=\pi\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}}\Big\{\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2\Big\}dt=-\frac{k^2-1}{k^2}\pi\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}}\Big(t-\frac{k}{k+1}\Big)\Big(t-\frac{k}{k-1}\Big)dt$$
$$=-\frac{k^2-1}{k^2}\pi\cdot\Big(-\frac{1}{6}\Big)\Big(\frac{k}{k-1}-\frac{k}{k+1}\Big)^3=\frac{k^2-1}{6k^2}\pi\cdot\frac{8k^3}{(k^2-1)^3}=\frac{4\pi k}{3(k^2-1)^2}$$

［解 説］

S で囲まれる立体を x 軸に垂直な平面で切断すると，その断面は円になります。この点を問う(2)は, (3)への誘導となっています。

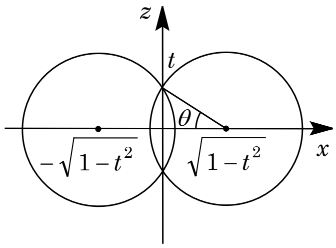
$\boxed{11}$ [2005 東京工大]

円 C の対称性から，条件を満たす円盤 D が通過する領域は，xz 平面に関して対称である。



そこで，$y \geqq 0$ の部分に対し，この部分を平面 $y=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ で切った切り口を考える。

この切り口は，中心$(\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0)$，半径 1 の円と，中心$(-\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0)$，半径 1 の円の和集合となっている。



右図のように角 θ をとると，

$$\cos\theta = \sqrt{1-t^2}\ ,\ \sin\theta = t \cdots\cdots\cdots(*)$$

そこで，切り口の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t) = 4\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-\theta)+\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}\ \right\}$$
$$= 2\pi - 2\theta + 2t\sqrt{1-t^2}$$

求める D の通過領域の体積 V は，

$$V = 2\int_0^1 S(t)\,dt = 4\int_0^1 (\pi-\theta+t\sqrt{1-t^2}\,)\,dt = 4\pi - 4\int_0^1 \theta\,dt + 4\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$(*)$より，$dt = \cos\theta\,d\theta$ となり，

$$\int_0^1 \theta\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos\theta\,d\theta = \Big[\,\theta\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}-1$$

また，$\sqrt{1-t^2} = u$ とおくと，$1-t^2 = u^2$，$-2tdt = 2udu$ から，

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt = \int_1^0 u(-u)\,du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$$

以上より，

$$V = 4\pi - 4\left(\frac{\pi}{2}-1\right) + 4\cdot\frac{1}{3} = 2\pi + \frac{16}{3}$$

[解 説]

初めは，z 軸に垂直な切り口を考えましたが，複雑そうなので，考えを改め，y 軸に垂直な切り口に変更しました。断面積を求めるときに，中心角を設定する必要がありますが，今年は，東大でもこの技法を用いる問題が出ています。

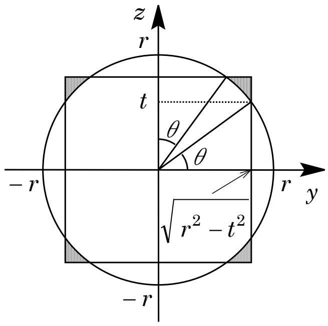
12 ［2005 東京大］

不等式$x^2+y^2 \leqq r^2$……①，$y^2+z^2 \geqq r^2$……②，$z^2+x^2 \leqq r^2$……③で表される立体をKとおく。

まず，K は yz 平面に対称であり，$x \geqq 0$ の部分を考える。そこで，K を平面$x=t$ $(0 \leqq t \leqq r)$で切ったときの断面を表す式は，①③より，

$$y^2 \leqq r^2-t^2,\ -\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2} \cdots\cdots④$$
$$z^2 \leqq r^2-t^2,\ -\sqrt{r^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2-t^2} \cdots\cdots⑤$$

よって，平面$x=t$上の断面は，②④⑤の連立式として表される。



この断面が存在する条件は，$\sqrt{r^2-t^2} \geqq r\cos\dfrac{\pi}{4}$より，

$$\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2} \geqq r,\ 2(r^2-t^2) \geqq r^2$$

$0 \leqq t \leqq r$から，$0 \leqq t \leqq \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

このとき，右図のようにθを設定すると，

$$r\cos\theta = \sqrt{r^2-t^2},\ r\sin\theta = t \cdots\cdots⑥$$

さて，断面積を$S(t)$とおくと，

$$S(t) = 4\left\{\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2 - \frac{1}{2}t\sqrt{r^2-t^2}\times 2 - \frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$
$$= (4-\pi)r^2 - 4t^2 - 4t\sqrt{r^2-t^2} + 4r^2\theta$$

よって，Kの体積Vは，

$$V = 2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S(t)\,dt = 2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \{(4-\pi)r^2 - 4t^2 - 4t\sqrt{r^2-t^2} + 4r^2\theta\}dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \{(4-\pi)r^2-4t^2\}dt = \left[(4-\pi)r^2t - \frac{4}{3}t^3\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)r^3$

また，$u=\sqrt{r^2-t^2}$ とおくと，$u^2=r^2-t^2$から，$2udu=-2tdt$となり，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} 4t\sqrt{r^2-t^2}\,dt = 4\int_r^{\frac{r}{\sqrt{2}}} u(-u)\,du = 4\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} u^2\,du = 4\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r}$$
$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)r^3$$

さらに，⑥より，$r\cos\theta\,d\theta = dt$なので，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} 4r^2\theta\,dt = 4r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\cos\theta\,d\theta = 4r^3\left\{\left[\theta\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta\right\}$$
$$= 4r^3\left\{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\} = 4r^3\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + 2\sqrt{2} - 4\right)r^3$$

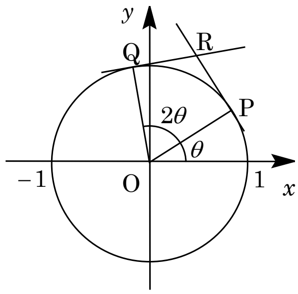
以上より,

$$V=2\left\{\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)r^3-\left(\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)r^3+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi+2\sqrt{2}-4\right)r^3\right\}$$
$$=\left(8\sqrt{2}-\frac{32}{3}\right)r^3$$

［解 説］

②式の不等号が逆向きになると, 有名問題です。パラメータ θ の置き方については, 1994 年, 1998 年, 2003 年の類題が参考になります。

13 ［2006 岡山大］



(1) 点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における接線の方程式は，それぞれ，

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1,\quad x\cos 3\theta + y\sin 3\theta = 1$$

この２本の接線の交点 $R(\alpha,\ \beta)$ は，

$$\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta = 1 \cdots\cdots\cdots①$$

$$\alpha\cos 3\theta + \beta\sin 3\theta = 1 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\cos\theta\sin 3\theta - \cos 3\theta\sin\theta)\alpha = \sin 3\theta - \sin\theta$

$$(\cos\theta\sin 3\theta - \cos 3\theta\sin\theta)\beta = -\cos 3\theta + \cos\theta$$

さて，$\varDelta = \cos\theta\sin 3\theta - \sin\theta\cos 3\theta = \sin(3\theta - \theta) = \sin 2\theta$

すると，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\sin 2\theta > 0$ なので，

$$\alpha = \frac{1}{\sin 2\theta}(\sin 3\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\cdot 2\cos 2\theta\sin\theta = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

$$\beta = \frac{1}{\sin 2\theta}(-\cos 3\theta + \cos\theta) = \frac{1}{\sin 2\theta}\cdot 2\sin 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta$$

(2) (1)より，$x = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$，$y = 2\sin\theta$ となり，

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{-2\sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

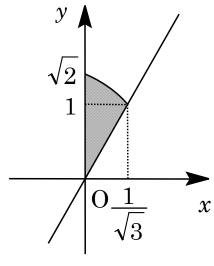
$$= \frac{-4\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-\sin\theta(2\cos^2\theta + 1)}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta$$

θ	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	
x	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	↘	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	1	↗	$\sqrt{2}$

よって，点 R の軌跡は右図のようになり，求める網点部の面積を S とすると，



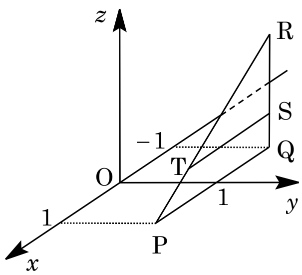
$$S = \int_1^{\sqrt{2}} x\,dy + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \Big[\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

［解 説］

和積公式を利用して，点 R の座標を整理しておかないと，積分の実行が困難になってきます。また，(2)の面積計算は，計算量を考えると，y 軸方向で積分すべきです。

$\boxed{14}$ ［2006 神戸大］



(1) P(1, 1, 0)，Q(−1, 1, 0)，R(−1, 1, 2) のとき，

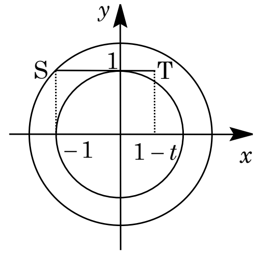
まず線分 QR は xy 平面に垂直なので，平面 $z=t$ との交点 S の座標は，S$(-1,\ 1,\ t)$ である。

また，線分 PR と平面 $z=t$ との交点 T は，線分 PR を $t:2-t$ に内分する点より，

$$\mathrm{T}\left(\frac{-t+2-t}{t+(2-t)},\ \frac{t+2-t}{t+(2-t)},\ t\right)=(1-t,\ 1,\ t)$$

(2) 点 T の x 座標の符号で場合分けをする。

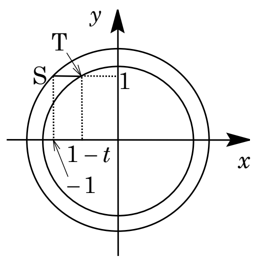
(i) $1-t \geqq 0\ (0 \leqq t \leqq 1)$ のとき



線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が 1 であるので，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\cdot 1^2=\pi$$

(ii) $1-t \leqq 0\ (1 \leqq t \leqq 2)$ のとき



線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が $\sqrt{(1-t)^2+1^2}$ であるので，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\left(\sqrt{(1-t)^2+1^2}\right)^2=\pi(2t-t^2)$$

(i)(ii)より，△PQR の z 軸まわりの回転体の体積 V は，

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\pi\int_0^1 dt+\pi\int_1^2 (2t-t^2)\,dt=\pi+\pi\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=\frac{5}{3}\pi$$

［解 説］

平面図形の回転体の体積を求める頻出題です。回転軸に垂直な回転体の切り口がドーナツ形であることがわかれば，積分計算は難しくありません。

$\boxed{15}$ ［2006 筑波大］

(1) 条件より，立体 $R : |x| \leqq z^2 \cdots\cdots\cdots ①$

l を中心軸とする半径 1 の円柱 C の方程式は,

$C : y^2 + (z-1)^2 \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ②$

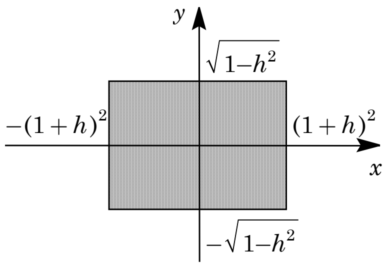
また，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面の方程式は,

$z = 1 + h \cdots\cdots\cdots ③$

③を①に代入して，$|x| \leqq (1+h)^2$，$-(1+h)^2 \leqq x \leqq (1+h)^2$

③を②に代入して，$y^2 + h^2 \leqq 1$，$-\sqrt{1-h^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-h^2}$

R と C の共通部分 T を平面③で切断したときの切り口を図示すると，右図の網点部となる。その面積 $S(h)$ は,



$$S(h) = 2(1+h)^2 \cdot 2\sqrt{1-h^2}$$
$$= 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}$$

(2) T の体積を V とすると,

$$V = \int_{-1}^{1} S(h)\,dh = \int_{-1}^{1} 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$= 4\int_{-1}^{1} \sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{-1}^{1} h\sqrt{1-h^2}\,dh + 4\int_{-1}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$= 8\int_{0}^{1} \sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{0}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$

ここで，原点が中心で，半径 1 の四分円の面積は $\dfrac{\pi}{4}$ より,

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-h^2}\,dh = \frac{\pi}{4}$$

また，$h = \sin\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$\int_{0}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

以上より，$V = 8 \times \dfrac{\pi}{4} + 8 \times \dfrac{\pi}{16} = \dfrac{5}{2}\pi$ である。

［解 説］

10 年以上も前に頻出していた共通部分の体積を求める問題です。ここ数年は，空間図形の内容が削減されたため，散見される程度でしたが，やや風向きが変わってきたのでしょうか。

16 [2007 東北大]

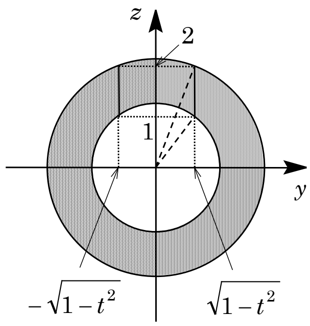
点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分 l を，z 軸のまわりに 1 回転してできる円筒形 A の方程式は，

$$x^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$

ここで，円筒形 A を x 軸に垂直な平面 $x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切断すると，その切り口は線分となり，

$$t^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$

$$y=\pm\sqrt{1-t^2},\ 1\leqq z\leqq 2$$



ここで，この 2 本の線分を x 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ状の図形について，その外径を R，内径を r とおき，その面積を$S(t)$とすると，

$$S(t)=\pi R^2-\pi r^2$$
$$=\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+2^2\right\}-\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+1^2\right\}$$
$$=\pi(5-t^2)-\pi(2-t^2)=3\pi$$

よって，A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とおくと，

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt=\int_{-1}^{1}3\pi\,dt=6\pi$$

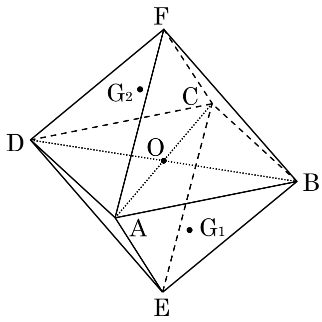
［解　説］

立体を回転してできる回転体の求積という，2 代前の課程のころ，よく出題された問題です。回転軸に垂直な断面積を考えるのがポイントです。なお，円柱側面の方程式については，「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

17 ［2008 東京大］

(1) 1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF において，正方形 ABCD の対角線の交点を O とすると，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

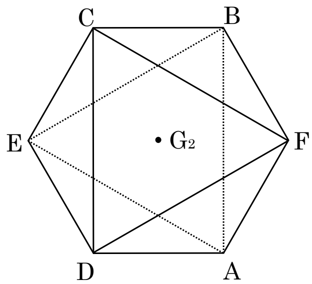


また，△ACE は∠AEC = 90° の直角二等辺三角形であるので，

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OE}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，四面体 OABE において，底面の正三角形 ABE の重心を G_1 とおくと，①②より，線分 OG_1 は平面 ABE に垂直である。

同様に，正三角形 CDF の重心を G_2 とおくと，線分 OG_2 は平面 CDF に垂直である。さらに，平面 ABE と平面 CDF は平行であることより，3 点 G_1，O，G_2 は一直線上にある。



これより，△ABE の面を水平な台に置き，真上から見ると，正三角形 ABE を $G_2(G_1)$ のまわりに180° だけ回転すると正三角形 CDF の位置になっている。

したがって，正八面体を真上から見た図は，正六角形 AFBCED を外形とする右図である。

(2) 直線 G_1G_2 を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体を R とすると，その外形は，辺 AF を G_1G_2 のまわりに回転したものに等しい。

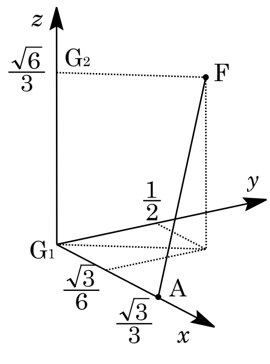
さて，辺 BE の中点を M とおき，△OAM において，

$$\mathrm{AG_1}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{G_1G_2}=2\mathrm{OG_1}=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AG_1}^2}=2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここで，G_1 を原点とし，平面 ABE を xy 平面とする座標系を設定する。さらに，G_1A を x 軸，G_1G_2 を z 軸とすると，

$$G_1(0,\ 0,\ 0),\ G_2\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ \mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$$



また，点 F の x 座標と y 座標は，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6},\quad y=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}$$

よって，$\mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{1}{6}(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$$

これより，直線 AF のパラメータ表示は，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)+t(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})\cdots\cdots\cdots③$$

直線③と平面$z=k\left(0\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$との交点は，$2\sqrt{6}t=k$より$t=\dfrac{\sqrt{6}}{12}k$となり，

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k,\quad y=3\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k=\frac{\sqrt{6}}{4}k$$

よって，立体Rを平面$z=k$で切断したときの切り口の面積を$S(k)$とおくと，

$$S(k)=\pi(x^2+y^2)=\pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{4}k\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{4}k\right)^2\right\}=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)$$

これより，立体Rの体積Vは，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}S(k)\,dk=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}k+\frac{1}{2}k^2\right)dk$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}k-\frac{\sqrt{6}}{12}k^2+\frac{1}{6}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}=\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{9}-\frac{\sqrt{6}}{18}+\frac{\sqrt{6}}{27}\right)=\frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$$

［解 説］

ありふれた素材をもとにしたものですが，内容は本格的な求積問題です。東大らしい構図です。

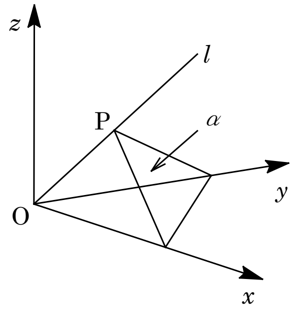
18 [2009 東京工大]

(1) 原点と点$(1,\ 1,\ 1)$を通る直線lの方程式は，

$$x=y=z\ \cdots\cdots\cdots ①$$

これより，点$\mathrm{P}\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$を通り l と垂直な平面αは，

$$\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(y-\frac{t}{3}\right)+\left(z-\frac{t}{3}\right)=0,\ \ x+y+z=t$$



この平面とxy平面との交線は，$z=0$を代入して，

$$x+y=t,\ \ z=0$$

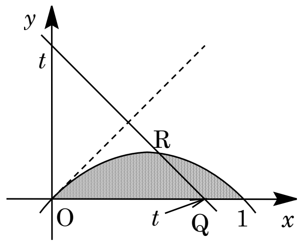
(2) xy 平面上で，$x+y=t\ \cdots\cdots ②$と$y=x(1-x)\ \cdots\cdots ③$を連立すると，

$$t-x=x-x^2,\ \ x^2-2x+t=0\ \cdots\cdots\cdots ④$$

②と③が共有点をもつ条件は，

$$D/4=1-t\geqq 0,\ \ t\leqq 1$$

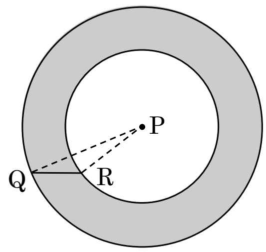
よって，直線②と領域$D:0\leqq y\leqq x(1-x)$が共有点をもつ条件は，$0\leqq t\leqq 1$である。



このとき，右図のように共有点を Q，R とおくと，④から，$\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{R}(1-\sqrt{1-t},\ t-1+\sqrt{1-t},\ 0)$となる。

また，直線 l を xy 平面へ正射影すると，直線$x=y$，$z=0$となり，この直線は放物線③の原点における接線と一致する。

これより，平面α上で点 P を中心として線分 QR を回転してできるドーナツ状の図形の外径は PQ，内径は PR となり，その面積$S(t)$は，



$$\mathrm{PQ}^2=\left(-\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2}{3}t^2$$

$$\mathrm{PR}^2=\left(\frac{t}{3}-1+\sqrt{1-t}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}t+1-\sqrt{1-t}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}t^2-4(t-1)-2(2-t)\sqrt{1-t}$$

$$S(t)=\pi(\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2)=\pi\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}$$

さて，直線lの$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$の部分を正とするl軸を設定し，$l=\mathrm{OP}$とおくと，$t\geqq 0$において，

$$l=\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}t$$

よって，$\dfrac{dl}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$となり，求める回転体の体積$V$は，

$$V=\int_0^1 S(t)\frac{dl}{dt}dt=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}dt$$

ここで，$1-t=u$ とおくと，

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_1^0\{-4u+2(u+1)\sqrt{u}\}(-du)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1(-4u+2u\sqrt{u}+2\sqrt{u})\,du$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big[-2u^2+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\Big(-2+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\Big)=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$

［解 説］

過去問を探す気分にはなりませんが，20 年以上も前には，よく見かけた問題です。ドーナツ状の断面の外径がいつも PQ，内径がいつも PR で，場合分けが必要ないのにはホッとします。なお，空間における直線や平面の方程式については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。