２０２２ 入試対策

２次数学ランドマーク

曲線１９題

理系 24か年

１９９８ ― ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

曲　　線

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 (1) 点P$(p,\ q)$と円$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\ \ (r>0)$との距離$d$とは, Pと$C$上の点$(x,\ y)$との距離の最小値をいう。Pが$C$の外部にある場合と内部にある場合に分けて, dを表す式を求めよ。

(2) 2つの円$C_1:(x+4)^2+y^2=81$と$C_2:(x-4)^2+y^2=49$から等距離にある点Pの軌跡の方程式を求めよ。 ［1998 東北大］

2 (1) 平面上に半径が$R,\ r$（$R>r$）の2円があり, それらの中心間の距離がlであるとする。これらの2円の円周が共有点をもつための必要十分条件を$R,\ r,\ l$を用いて表せ。

(2) 座標平面上でx軸を準線とし, 定点A$(0,\ a)$を通る放物線について考える。ただし, $a>0$とする。

① そのような放物線の焦点F$(s,\ t)$の全体はどのような図形を描くか。

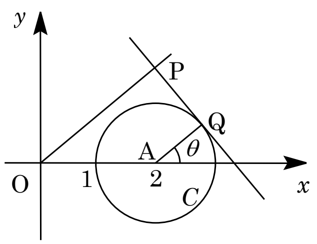
② x軸上にない点P$(p,\ q)$がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。 ［1998 九州大］

3 平面上に2定点A, Bをとる。cは正の定数として, 平面上の点Pが

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|+\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=c$$

を満たすとき, 点Pの軌跡を求めよ。 ［1999 京都大］

4 xy平面上において, 点A$(2,\ 0)$を中心とする半径1の円をCとする。C上の点QにおけるCの接線に原点O$(0,\ 0)$から下ろした垂線の足をPとする。図のようにx軸と線分AQのなす角をθとする。ただし, θは$-\pi<\theta\leqq\pi$を動くものとする。

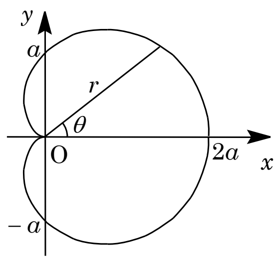


(1) 点P$(x,\ y)$の座標$(x,\ y)$をθを用いて表せ。

(2) 点P$(x,\ y)$のx座標が最小になるとき, Pの座標$(x,\ y)$を求めよ。

(3) 直線$x=k$が点Pの軌跡と相異なる4点で交わるとき, kのとりうる値の範囲を求めよ。 ［1999 筑波大］

5 $a>0$ を定数として，極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$ により表される曲線 C_a を考える。次の問いに答えよ。



(1) 極座標が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 S を，極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき，極座標が $(2a,\ 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。

［2000 神戸大］

6 C を双曲線 $2x^2-2y^2=1$ とする。l, m を点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸とそれぞれ θ, $\theta+\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1) 直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2) PQ^2 を，θ を用いて表せ。

(3) 直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。

［2001 筑波大］

7 C を曲線 $a^2x^2+y^2=1$，l を直線 $y=ax+2a$ とする。ただし，a は正の定数である。

(1) C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2) C 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよ。

(3) (1)における交点を P, Q とし，点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする。a が(1)の範囲を動くとき，X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ。

［2002 広島大］

8 θ を $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ に引いた2つの接線の接点を Q, R とし，接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1) $m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2) G を数式で表せ。

(3) $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。 ［2003 九州大］

9 楕円 $C:\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点で，$x\geqq 0$ の範囲にあり，定点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ との距離が最大となる点を P とする。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする。△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および△APQ の面積を求めよ。 ［2004 筑波大］

10 実数 a に対して，曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ によって定める。

(1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。

(2) a が正の実数全体を動くとき，C_a が通過する範囲を図示せよ。 ［2005 筑波大］

11 直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。 ［2006 大阪大］

12 空間内に, 3 点 $A_0(1,\ 0,\ 0)$, $A_1(1,\ 1,\ 0)$, $A_2(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 α と, 3 点 $B_0(2,\ 0,\ 0)$, $B_1(2,\ 1,\ 0)$, $B_2\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 β を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくとき, ベクトル $\overrightarrow{OA_0}$, $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{OB_0}$, $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{B_0B_2}$ を $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ で表せ。ただし, O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O と α 上の点 P を通る直線が β 上の点 P' も通っているとする。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2},\quad \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}$$

とおくとき, a, b を p, q で表せ。

(3) 点 P が α 上の点 A_0 を中心とする半径 1 の円 C の円周上を動くとき, 点 P' が動いてできる図形 C' の方程式を(2)の p, q で表し, C' が楕円であることを示せ。

［2006 北海道大］

13 d を正の定数とする。2 点 $A(-d,\ 0)$, $B(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, 点 B, 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2) AP^2+BP^2 および $AP\cdot BP$ を, OP と d を用いて表せ。

(3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき, AP^3+BP^3 の最大値と最小値を d を用いて表せ。

［2011 筑波大］

14 2 つの双曲線 $C: x^2-y^2=1$, $H: x^2-y^2=-1$ を考える。双曲線 H 上の点 $P(s,\ t)$ に対して, 方程式 $sx-ty=1$ で定まる直線を l とする。

(1) 直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2) 直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し, $\triangle$PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3) (2)における 3 点 G, Q, R に対して, $\triangle$GQR の面積は点 $P(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ。

［2012 筑波大］

15 楕円$C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$の，直線$y=mx$と平行な 2 接線を$l_1$，$l_1{}'$とし，$l_1$，$l_1{}'$に直交する$C$の2接線を$l_2$，$l_2{}'$とする。

(1) l_1，$l_1{}'$の方程式をmを用いて表せ。

(2) l_1と$l_1{}'$の距離d_1およびl_2と$l_2{}'$の距離d_2をそれぞれmを用いて表せ。ただし，平行な2直線l，l'の距離とは，l上の1点と直線l'の距離である。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2$はmによらず一定であることを示せ。

(4) l_1，$l_1{}'$，l_2，$l_2{}'$で囲まれる長方形の面積Sをd_1を用いて表せ。さらにmが変化するとき，Sの最大値を求めよ。 ［2013 筑波大］

16 曲線$C:x^2+4y^2=4$上を動く点 P と，C上の定点$\mathrm{Q}(2,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ 1)$がある。次の問いに答えよ。

(1) △PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線Cによって囲まれた図形を直線 PQ で2つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

［2016 金沢大］

17 座標平面上の放物線$y=x^2$上に点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>0)$をとる。原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$を通り，直線 OP に垂直な直線をlとする。また，$0<a\leqq 1$として，点$\mathrm{A}(0,\ a)$をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PA とlは交わることを示し，その交点$\mathrm{Q}(u,\ v)$の座標をtとaを用いて表せ。

(2) tがすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点$\mathrm{Q}(u,\ v)$の軌跡が$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$を通るとする。このとき，定数$a$の値を求め，点$\mathrm{Q}(u,\ v)$の軌跡を求めよ。 ［2017 金沢大］

18 3辺の長さの和が2である三角形 ABC において，辺 BC の長さをa，辺 CA の長さをbで表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として1回転させてできる回転体の体積をVとする。以下の問いに答えよ。

(1) aの値を固定してbの値を変化させたとき，Vが最大になるのは，三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。

(2) a，bの値をともに変化させるとき，Vの最大値と，最大値を与えるa，bの値をそれぞれ求めよ。 ［2020 大阪大］

$\boxed{\mathbf{19}}$ 座標平面において，O(0, 0)，A(4, 0)，P(3, 0)とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする△OAB を考える。ただし，円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

(1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。

(2) 円 C の半径を r とするとき，r のとる値の範囲を求めよ。

(3) r が(2)の範囲で変化するとき，点 B の軌跡の方程式を求めよ。また，その概形をかけ。

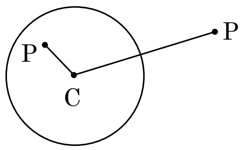
[2021 広島大]

曲　　線

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1　　　[1998 東北大]



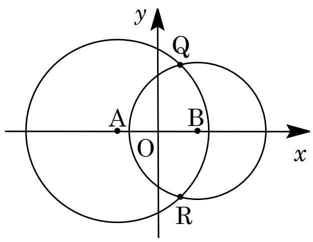
(1) 円 C の中心を $\mathrm{C}(a,\ b)$ とすると,

(i) P が円 C の外部にあるとき

$$d = \mathrm{PC} - r = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} - r$$

(ii) P が円 C の内部にあるとき

$$d = r - \mathrm{PC} = r - \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2}$$



(2) C_1 の中心を $\mathrm{A}(-4,\ 0)$，C_2 の中心を $\mathrm{B}(4,\ 0)$ とし，C_1 と C_2 の交点を $\mathrm{Q}(2,\ 3\sqrt{5})$，$\mathrm{R}(2,\ -3\sqrt{5})$ とおく。

(i) P が円 C_1，C_2 の外部にあるとき

$\mathrm{PA} - 9 = \mathrm{PB} - 7$ より $\mathrm{PA} - \mathrm{PB} = 2$

P は 2 点 A, B を焦点とする双曲線の点 B に近い方の枝である。

その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a^2 + b^2 = c^2)$ とすると，$2a = 2$，$c = 4$

$a = 1$，$b = \sqrt{15}$ から，$x^2 - \dfrac{y^2}{15} = 1$

(ii) P が円 C_1，C_2 の内部にあるとき

$9 - \mathrm{PA} = 7 - \mathrm{PB}$ より $\mathrm{PA} - \mathrm{PB} = 2$ なので, (i)と同じく $x^2 - \dfrac{y^2}{15} = 1$

(iii) P が円 C_1 の外部, 円 C_2 の内部にあるとき

$\mathrm{PA} - 9 = 7 - \mathrm{PB}$ より $\mathrm{PA} + \mathrm{PB} = 16$ で, P は 2 点 A, B を焦点とする楕円である。

その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a^2 - b^2 = c^2)$ とすると，$2a = 16$，$c = 4$

$a = 8$，$b = 4\sqrt{3}$ から，$\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

(iv) P が円 C_1 の内部, 円 C_2 の外部にあるとき

$9 - \mathrm{PA} = \mathrm{PB} - 7$ より $\mathrm{PA} + \mathrm{PB} = 16$ なので, (iii)と同じく $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

以上より, P の軌跡の方程式は，$x^2 - \dfrac{y^2}{15} = 1$ $(1 \leqq x)$，$\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

［解 説］

今年, 頻出の 2 次曲線の定義を利用する問題の 1 つです。おもしろい設定ですので, 丁寧に書いてみました。なお, 2 交点 Q, R に点 P が一致したときも条件をみたすのは明らかですので, 軌跡は曲線全体になります。

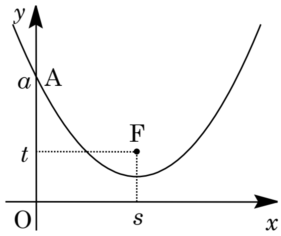
2 ［1998 九州大］

(1) 2 円が共有点をもつ条件は，中心間距離が半径の差以上，半径の和以下より，

$R-r \leqq l \leqq R+r$

(2) 放物線は，準線が x 軸で y 軸と正の部分で交わることより x 軸の上方にあり，焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ から頂点 $\left(s,\ \dfrac{t}{2}\right)$ で，頂点と焦点の距離が $\dfrac{t}{2}$ から，その方程式は，

$(x-s)^2 = 4\cdot\dfrac{t}{2}\left(y-\dfrac{t}{2}\right)$ ………①



点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るので，$s^2 = 2t\left(a-\dfrac{t}{2}\right)$

$s^2+t^2-2at=0$

$s^2+(t-a)^2=a^2$ ………②

よって②から，点 F は中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を描く。ただし，$t>0$ より原点を除く。

さて，①が点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ （$q>0$）を通るとき，$(p-s)^2 = 4\cdot\dfrac{t}{2}\left(q-\dfrac{t}{2}\right)$ から，

$(s-p)^2+(t-q)^2=q^2$ ………③

②は，$s^2+(t-a)^2=a^2$ （$t\neq 0$）………④

ここで，③と④をともにみたす $(s,\ t)$ が存在する $p,\ q$ の関係が求める条件なので，(1)の結果から，

(i) $p\neq 0$ のとき

$|q-a| \leqq \sqrt{p^2+(q-a)^2} \leqq q+a$ より，$(q-a)^2 \leqq p^2+(q-a)^2 \leqq (q+a)^2$

左側の不等式はつねに成立するので，右側の不等式を変形して，

$p^2-4aq \leqq 0$，$q \geqq \dfrac{1}{4a}p^2$

(ii) $p=0$ のとき

③は $s^2+(t-q)^2=q^2$ となり，求める条件は $q=a$

(i)(ii)より，$q \geqq \dfrac{1}{4a}p^2$ （$p\neq 0$），$q=a$ （$p=0$）

［解 説］

(2)の設問は，一見(1)とは無関係と見えるものの，解のネックとなる部分で(1)の結果を利用します。

$\boxed{3}$ [1999 京都大]

△ABP に余弦定理を適用して,

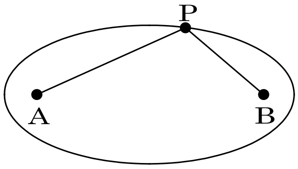
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

なお, ①は 3 点 P, A, B が同一直線上にあるときも成立する。

条件より, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|+\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=c$ ·········②

①を②に代入して,



$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|+\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2}=c$$

$$\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\right)^2=2c+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\sqrt{2c+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$\sqrt{2c+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}$ は定数なので, ③より点 P は 2 点 A, B を焦点とする楕円を描く。

長軸の長さは $\sqrt{2c+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}$, 短軸の長さは $2\sqrt{\frac{1}{4}\left(2c+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\right)-\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}=\sqrt{2c}$ となる。

［解 説］

2 点 A, B の中点を原点として座標設定しようかと思いましたが, 条件式②の形に注目して, ベクトルの大きさと内積を余弦定理で関連づけてみました。すると, 楕円の定義式が導けました。

4 ［1999 筑波大］

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(2+\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，

直線 PQ の方程式は，$\cos\theta(x-2-\cos\theta)+\sin\theta(y-\sin\theta)=0$

$x\cos\theta+y\sin\theta=2\cos\theta+1$ ………①

直線 OP は PQ と垂直なので，その方程式は，$-x\sin\theta+y\cos\theta=0$ ………②

①②より，$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)x=(2\cos\theta+1)\cos\theta$

$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)y=(2\cos\theta+1)\sin\theta$

よって，$x=(2\cos\theta+1)\cos\theta$，$y=(2\cos\theta+1)\sin\theta$

(2) $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおくと，$f(-\theta)=f(\theta)$，$g(-\theta)=-g(\theta)$ より，点 P の軌跡は x 軸対称となる。

以下，θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ を動くときを考える。

$$\frac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta\cos\theta+(2\cos\theta+1)(-\sin\theta)$$

$$=-\sin\theta(4\cos\theta+1)$$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ の解を $\theta=\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とおくと，

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$	0	$+$	
x	3	↘	$-\dfrac{1}{8}$	↗	1

$\theta=\alpha$ のとき点 P の x 座標が最小になる。

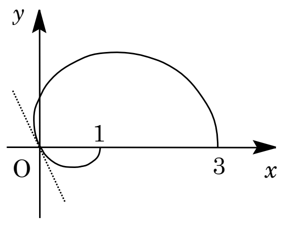
このとき $x=-\dfrac{1}{8}$，また $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ より，$y=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ となる。

x 軸に関する対称性を考えて, x 座標が最小の点 P の座標は, $\left(-\dfrac{1}{8},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)$

(3) 原点を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標を設定すると，点 P の軌跡は,

$r=2\cos\theta+1$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において r は単調減少し，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ では $r\geqq0$，$\dfrac{2}{3}\pi<\theta\leqq\pi$ では $r<0$ となるので，点 P の軌跡の概形は右図のような曲線になる。



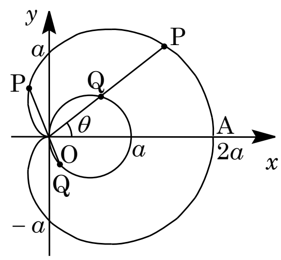
さらに，この曲線とこれを x 軸対称した曲線とを合わせた曲線が，$-\pi<\theta\leqq\pi$ における点 P の軌跡である。

すると，直線 $x=k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるのは，(2)の結果を用いて，$-\dfrac{1}{8}<k<0$，$0<k<1$ となる。

［解 説］

(3)でも，(2)と同じく y の増減を調べ，点 P の軌跡の概形を調べようかとも思いました。しかし，それほどの設問でもないので，極方程式で概形を考えました。

$\boxed{5}$ ［2000 神戸大］



(1) 原点と点$(a,\ 0)$を直径の両端とする円なので,

$$r = a\cos\theta$$

(2) x軸に関する対称性より, $0 \leqq \theta \leqq \pi$で考える。

$$\mathrm{OP} = a(1+\cos\theta),\ \ \mathrm{OQ} = a\left|\cos\theta\right|$$

(i) $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OP} - \mathrm{OQ} = a(1+\cos\theta) - a\cos\theta = a$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$のとき

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = a(1+\cos\theta) - a\cos\theta = a$$

(3) $\mathrm{A}(2a,\ 0)$とおき, $0 < \theta < \pi$のとき, $\triangle\mathrm{OAP}$に余弦定理を適用して,

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos\theta = r^2 + 4a^2 - 2r\cdot 2a\cos\theta \\ &= a^2(1+\cos\theta)^2 + 4a^2 - 4a\cos\theta\cdot a(1+\cos\theta) \\ &= 5a^2 - 2a^2\cos\theta - 3a^2\cos^2\theta \\ &= -3a^2\left(\cos\theta + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}a^2\end{aligned}$$

また, $\theta = 0$のとき$\mathrm{AP}^2 = 0$, $\theta = \pi$のとき$\mathrm{AP}^2 = 4a^2$となる。

よって, $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$のとき, AP^2は最大値$\dfrac{16}{3}a^2$をとる。このとき AP は最大値$\dfrac{4}{\sqrt{3}}a$をとる。

［解 説］

有名は曲線カージオイドを題材とした問題です。なお, 極方程式は$r < 0$の場合もあるので, 注意しなくてはいけません。