２０２２ 入試対策

２次数学ランドマーク

微分法28題

理系 24か年

１９９８ － ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

微 分 法

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x)=e^x f(x)$ とおく。

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で

条件(A)：すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である

をみたすものの例をあげよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

条件(B)：すべての x に対して $f'(x)+f(x) \leqq 0$ である

をみたすとき，$a<b$ ならば $F(a) \geqq F(b)$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)をみたすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $f(x)$ が(1), (2)の条件(A), (B)をともにみたすとする。

① $f(c) \geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ。

② ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ となることを示せ。

［1998 九州大］

2 正の実数 a, b, p に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ。

［1999 東京工大］

3 すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。

［2000 筑波大］

4 a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x)=\frac{\log x}{(1+x)^a} \quad (x>0)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在することを示せ。

(2) $f'(c)=0$ となる c はただ 1 つであり，関数 $f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることを示せ。

［2002 筑波大］

5 (1) x を正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2) $\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。

［2002 名古屋大］

6 以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 x, y に対して，不等式 $x(\log x - \log y) \geqq x - y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数 x_1，…，x_n が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ を満たしているとき，不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log\frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。 [2002 金沢大]

7 関数 $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x) = x^2,\quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^3 f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1) $f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ。

(2) $f_n^{(1)}(0)$，$f_n^{(2)}(0)$，$f_n^{(3)}(0)$，$f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。 [2003 東京工大]

8 a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし，$f(x) = \dfrac{\cos 2x - 2}{a\cos x + 1}$ とする。

(1) $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq \pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。 [2005 東北大]

9 k を正の整数とし，$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ の範囲で定義された 2 曲線

$$C_1 : y = \cos x,\quad C_2 : y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

を考える。

(1) C_1 と C_2 は共有点をもつことを示し，その点における C_1 の接線は点 $(0,\ 1)$ を通ることを示せ。

(2) C_1 と C_2 の共有点はただ 1 つであることを証明せよ。 [2005 京都大]

10 $a \geqq b > 0$, $x \geqq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1) $0 \leqq e^x - (1 + x) \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2}$

(2) $a^n - b^n \leqq n(a - b)a^{n-1}$

(3) $e^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2 e^x}{2n}$ [2006 筑波大]

11　すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。　［2007 京都大］

12　曲線 $C: y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P, Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P, Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

［2008 名古屋大］

13　$a,\ b$ は実数で $a>b>0$ とする。区間 $0\leqq x\leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log\bigl(ax+b(1-x)\bigr)-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし, log は自然対数を表す。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2)　$f'(c)=0$ を満たす実数 c が, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して，$ax+b(1-x)\geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

［2009 神戸大］

14　(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

［2009 東京大］

15　k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

［2013 東京工大］

16 a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。 ［2013 東京大］

17 以下の問いに答えよ。

(1) 正の実数 a，b，c について，不等式 $\dfrac{\log a}{a}+\dfrac{\log b}{b}+\dfrac{\log c}{c}<\log 4$ が成立することを示せ。ただし，log は自然対数とし，必要なら $e>2.7$ および $\log 2>0.6$ を用いてもよい。

(2) 自然数 a，b，c，d の組で，$a^{bc}b^{ca}c^{ab}=d^{abc}$，$a\leqq b\leqq c$，$d\geqq 3$ を満たすものをすべて求めよ。 ［2014 熊本大］

18 2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。 ［2014 九州大］

19 xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。 ［2015 東京工大］

20 次の問いに答えよ。

(1) c を正の定数とする。正の実数 x, y が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y, z が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。 ［2016 大阪大］

21 e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

［2016 東京大］

22 以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，不等式 $\log x<x$ を示せ。

(2) $1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3) $x\geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。 ［2016 千葉大］

23 n を自然数とする。$f(x)=\sin x-nx^2+\dfrac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ１つもつことを示せ。

(3) (2)における解を x_n とする。$\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示し，$\lim_{n\to\infty}nx_n$ を求めよ。

［2017 神戸大］

24 a を１より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y=x$ 上にあることを示せ。

(2) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は２個以下であることを示せ。

(3) 関数 $y=a^x$ と $y=\log_a x$ のグラフの共有点は１個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。 ［2018 名古屋大］

25 以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。x についての方程式 $x^{2n-1}=\cos x$ は，ただ 1 つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1)で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3) (1)で定まる数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，…に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty} a_n,\ \ b=\lim_{n\to\infty} {a_n}^n,\ \ c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。 ［2019 東京大］

26 平面上に 2 つの定点 O と U があり，OU＝3 を満たしている。点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形△STU があり，辺 ST の中点が線分 OU 上にあるものとする。

△STU の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線を引き，それらの接点をそれぞれ A, B とする。△OAB を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積を V とする。点 P が△STU の内部および周上を動くとき，V の最大値と最小値を求めよ。また，V の最大値，最小値をとるような点 P の存在範囲をそれぞれ△STU の内部および周上に図示せよ。 ［2020 金沢大］

27 a を 1 より大きい定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ が $f(a)=af(1)$ を満たすとき，曲線 $y=f(x)$ の接線で原点$(0,\ 0)$を通るものが存在することを示せ。

［2021 京都大］

28 次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。x についての方程式 $x-\tan x=a$ の実数解のうち，$|x|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすものがちょうど 1 個あることを示せ。

(2) 自然数 n に対し，$x-\tan x=n\pi$ かつ $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 x を x_n とおく。t を $|t|<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。このとき，曲線 $C: y=\sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が x_1，x_2，x_3，…のいずれかと等しいことであることを示せ。

［2021 大阪大］

微 分 法

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

$\boxed{1}$ ［1998 九州大］

(1) $f(x+1)=f(x)$ は，$f(x)$ が周期１の周期関数であることを表す。
その１例として，$f(x)=\sin 2\pi x$ があげられる。

(2) $F(x)=e^x f(x)$ より，$F'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\left\{f'(x)+f(x)\right\}$
条件(B)より，$F'(x)\leqq 0$ となり，これより $F(x)$ は単調非増加。
よって，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$

(3) 条件(A)より，正の整数 n に対して帰納的に，$f(x+n)=f(x)$ が成立するので，

$$F(x+n)=e^{x+n}f(x+n)=e^n e^x f(x)=e^n F(x)$$

(4) (2)より，正の整数 n に対して，$F(x)\geqq F(x+n)$
(3)と合わせて，$F(x)\geqq e^n F(x)$，$(1-e^n)F(x)\geqq 0$
よって，任意の x において $F(x)\leqq 0$，すなわち $e^x f(x)\leqq 0$ から，$f(x)\leqq 0$
すると，$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ である。
また，ある c で $f(c)=0$ であれば，$F(c)=0$
(2)より，$F(x)$ は単調非増加関数なので，$0=F(c)\geqq F(c+1)$
(3)より，$F(c+1)=eF(c)=0$
よって，$c\leqq x\leqq c+1$ において，$F(x)=0$，すなわち $f(x)=0$
条件(A)より，すべての x で $f(x)=0$

［解 説］

抽象関数についての問題でも，具体的なイメージは必要ですが，それだけでは完全な解はできません。特に，(4)の証明には試行錯誤が要求されます。なお，微分方程式が高校課程からなくなって抽象関数を扱う機会が少なくなってしまいましたが，それに逆行するような形です。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［1999 東京工大］

$A=(a+b)^p$，$B=2^{p-1}(a^p+b^p)$に対して，$\dfrac{b}{a}=x$とおくと，$x>0$として，

$$A=a^p(1+x)^p,\ B=2^{p-1}(a^p+a^px^p)=a^p\cdot 2^{p-1}(1+x^p)$$

すると，$A-B=a^p\left\{(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)\right\}$

ここで，$f(x)=(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)$とおくと，

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-2^{p-1}\cdot px^{p-1}=p\left\{(1+x)^{p-1}-(2x)^{p-1}\right\}$$

(i)　$p-1>0$　$(p>1)$のとき

$f'(x)>0 \iff (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \iff 1+x>2x \iff 0<x<1$

$f'(x)<0 \iff (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \iff 1+x<2x \iff 1<x$

$f(x)$の値の増減は右図のようになり，

$f(x)\leqq 0$

よって，$A\leqq B$（等号は$a=b$のとき成立）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		＋	0	－
$f(x)$		↗	0	↘

(ii)　$p-1=0$　$(p=1)$のとき

$f(x)=(1+x)-2^0(1+x)=0$より，$A=B$

(iii)　$p-1<0$　$(0<p<1)$のとき

$f'(x)>0 \iff (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \iff 1+x<2x \iff 1<x$

$f'(x)<0 \iff (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \iff 1+x>2x \iff 0<x<1$

$f(x)$の値の増減は右図のようになり，

$f(x)\geqq 0$

よって，$A\geqq B$（等号は$a=b$のとき成立）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		－	0	＋
$f(x)$		↘	0	↗

(i)(ii)(iii)をまとめて，

$p>1$ かつ $a\neq b$ のとき $A<B$, また $0<p<1$ かつ $a\neq b$ のとき $A>B$, さらにこれらの場合以外の $p=1$ または$a=b$のとき $A=B$

［解　説］

A も B も a と b についての p 次式で，しかも定数項が 0 なので，a と b の比を考えて文字を減らしました。この常套手段で結論が導けます。

3 ［2000 筑波大］

$x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ より，$\log x^{\sqrt{a}} \leqq \log a^{\sqrt{x}}$，$\sqrt{a}\log x \leqq \sqrt{x}\log a$ なので，

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leqq \frac{\log a}{\sqrt{a}} \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x}-\log x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		＋	0	－	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	0

すると，(＊)はどんな正の実数 x についても，$f(x) \leqq f(a)$ ということなので，この条件を満たす a の値は，上表より $a=e^2$ となる。

［解 説］

毎年のように類題の出る頻出有名問題です。ポイントは(＊)の形に不等式を変形することです。

$\boxed{4}$ ［2002 筑波大］

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{(1+x)^a}$ より，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}(1+x)^a-a\log x\cdot(1+x)^{a-1}}{(1+x)^{2a}}=\dfrac{1+x-ax\log x}{x(1+x)^{a+1}}$

ここで，$g(x)=1+x-ax\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^{a+1}}$ となり，

$$g\left(e^{\frac{1}{a}}\right)=1+e^{\frac{1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{a}=1,\quad g\left(e^{\frac{2}{a}}\right)=1+e^{\frac{2}{a}}-ae^{\frac{2}{a}}\cdot\frac{2}{a}=1-e^{\frac{2}{a}}<0$$

$x>0$ なので $x(1+x)^{a+1}>0$ より，$f'\left(e^{\frac{1}{a}}\right)>0$，$f'\left(e^{\frac{2}{a}}\right)<0$

よって，$e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在する。

(2) $g'(x)=1-a\log x-ax\cdot\dfrac{1}{x}=1-a-a\log x$

$g'(x)=0$ の解は $\log x=\dfrac{1-a}{a}$ より，

$$x=e^{\frac{1-a}{a}}$$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty$ から，$g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

よって，$g(x)=0$ となる x は 1 つしかなく，言い換えると，$f'(c)=0$ となる c はただ 1 つである。

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることになる。

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

［解 説］

微分法の標準的な問題です。ただ，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$ はプロセス抜きで答えるしかないでしょう。

5 [2002 名古屋大]

(1) $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

$f(x)$ は $x>0$ において単調減少で，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より，$f(x)>0$

よって，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2) $g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと, (1)より,

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

よって，$g(x)$ は $x>0$ において単調増加である。

すると，$\dfrac{2001}{2002}<\dfrac{2002}{2001}$ より，$g\left(\dfrac{2001}{2002}\right)<g\left(\dfrac{2002}{2001}\right)$ となるので，

$$\log\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\log\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$$

したがって，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

［解 説］

(2)において $g(x)$ を設定するところがポイントです。$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ または $g(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ でしょうが，前者の方が(1)と相性がよさそうです。

$\boxed{6}$ ［2002 金沢大］

(1) x, y の大小関係で場合分けをして，不等式 $x(\log x - \log y) \geqq x - y$ を証明する。

(i) $0 < y < x$ のとき

$f(x) = \log x$ とすると，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ となるので，平均値の定理より，

$$\frac{\log x - \log y}{x - y} = \frac{1}{c_1} \quad (0 < y < c_1 < x)$$

$\dfrac{1}{c_1} > \dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log x - \log y}{x - y} > \dfrac{1}{x}$，$x(\log x - \log y) > x - y$

(ii) $0 < x < y$ のとき

(i)と同様にして，$\dfrac{\log y - \log x}{y - x} = \dfrac{1}{c_2} \quad (0 < x < c_2 < y)$

$\dfrac{1}{c_2} < \dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log y - \log x}{y - x} < \dfrac{1}{x}$，$x(\log y - \log x) < y - x$

$$x(\log x - \log y) > x - y$$

(iii) $0 < x = y$ のとき

$\log x - \log y = 0$，$x - y = 0$ より，$x(\log x - \log y) = x - y$

(i)(ii)(iii)より，$x(\log x - \log y) \geqq x - y$ （等号は $x = y$ のとき成立）

(2) $1 \leqq i \leqq n$ として, (1)から，$x_i\left(\log x_i - \log\dfrac{1}{n}\right) \geqq x_i - \dfrac{1}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\log x_i - \log\frac{1}{n}\right) \geqq \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\right) \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

条件より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ なので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \log\frac{1}{n} \geqq 1 - \frac{1}{n}\cdot n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log\frac{1}{n}$$

等号が成立するのは，(＊)において $x_i = \dfrac{1}{n}$ のとき，すなわち $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ の場合に限る。

［解 説］

(2)は(1)を利用します。等号成立条件を参照すれば，x を x_i，y を $\dfrac{1}{n}$ と置き換えるのは，そんなに難しいことではありません。

7 ［2003 東京工大］

(1) $f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき $f_1(x)=x^2$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき $f_k(x)$ が $k+1$ 次多項式であるとする。

このとき $f_k^{(2)}(x)$ は $k-1$ 次多項式となり，$x^3 f_k^{(2)}(x)$ は $k+2$ 次多項式である。

すると，$f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3 f_k^{(2)}(x)$ より，$f_{k+1}(x)$ は $k+2$ 次多項式となる。

(i)(ii)より，$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式である。

さて，$f_n(x)$ の x^{n+1} の係数を a_n とすると，$a_1=1$ で，$f_n^{(2)}(x)$ の x^{n-1} の係数は $n(n+1)a_n$ となるので，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3 f_n^{(2)}(x)$ から x^{n+2} の係数を比べると，

$$a_{n+1}=n(n+1)a_n$$

$n \geqq 2$ で，$a_n=a_1(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(3\cdot 4)\cdots(n-1)n=(n-1)!\,n!$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=0!1!=1$ となり成立する。

よって，$a_n=(n-1)!\,n!$

(2) $g_n(x)$ を x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項が 0 の 5 次以上の多項式として，

$$f_n(x)=g_n(x)+p_nx^4+q_nx^3+r_nx^2+s_nx+t_n$$

すると条件より，

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f_n(x)+x^3\{g_n^{(2)}(x)+12p_nx^2+6q_nx+2r_n\} \\ &= f_n(x)+x^3g_n^{(2)}(x)+12p_nx^5+6q_nx^4+2r_nx^3 \end{aligned}$$

ここで x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項を比べると，

$$p_{n+1}=p_n+6q_n \cdots\cdots ①,\quad q_{n+1}=q_n+2r_n \cdots\cdots ②$$

$$r_{n+1}=r_n \cdots\cdots ③,\quad s_{n+1}=s_n \cdots\cdots ④,\quad t_{n+1}=t_n \cdots\cdots ⑤$$

また，$f_1(x)=x^2$ より，$p_1=q_1=0$，$r_1=1$，$s_1=t_1=0$ となり，

③より $r_n=1$，④⑤より $s_n=t_n=0$

②に代入して，$q_{n+1}=q_n+2$ より，$q_n=0+2(n-1)=2(n-1)$

さらに①に代入して，$p_{n+1}=p_n+12(n-1)$ より，$n \geqq 2$ で，

$$p_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}12(k-1)=6(n-1)(n-2)$$

$n=1$ をあてはめると，$p_1=0$ となり成立する。

よって，$f_n^{(1)}(x)=g_n^{(1)}(x)+4p_nx^3+3q_nx^2+2r_nx+s_n$ より，$f_n^{(1)}(0)=s_n=0$

$f_n^{(2)}(x)=g_n^{(2)}(x)+12p_nx^2+6q_nx+2r_n$ より，$f_n^{(2)}(0)=2r_n=2$

$f_n^{(3)}(x)=g_n^{(3)}(x)+24p_nx+6q_n$ より，$f_n^{(3)}(0)=6q_n=12(n-1)$

$f_n^{(4)}(x)=g_n^{(4)}(x)+24p_n$ より，$f_n^{(4)}(0)=24p_n=144(n-1)(n-2)$

［解 説］

(1)と(2)は同じ解法をとっています。比べる位置が異なるだけです。

$\boxed{8}$ ［2005 東北大］

(1) $f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{-2\sin 2x(a\cos x+1)-(\cos 2x-2)(-a\sin x)}{(a\cos x+1)^2}$$
$$=\frac{\sin x\{-4\cos x(a\cos x+1)+a(2\cos^2 x-3)\}}{(a\cos x+1)^2}$$
$$=-\frac{\sin x(2a\cos^2 x+4\cos x+3a)}{(a\cos x+1)^2}$$

ここで，$g(x)=2a\cos^2 x+4\cos x+3a$ とおくと，$f(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数となる条件は，$0<x<\pi$ において $g(x)\geqq 0$ と同値である。

さらに，$t=\cos x$，$h(t)=g(x)$ とおくと，$0<x<\pi$ から $-1<t<1$ のもとで，

$$h(t)=2at^2+4t+3a=2a\left(t+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{2}{a}+3a$$

$0<a<1$ から $-\dfrac{1}{a}<-1$ となるので，$-1<t<1$ において $h(t)\geqq 0$ となる条件は，

$$h(-1)=5a-4\geqq 0,\ a\geqq\frac{4}{5}$$

よって，$0<a<1$ より，$\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ である。

(2) (i) $\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ のとき

(1)より，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数なので，最大値は $f(0)$ である。

(ii) $0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき

$h(-1)=5a-4<0$，$h(1)=5a+4>0$ より，$-1<t<1$ において $h(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在し，これを $t=\alpha$ とおく。すると，$-1\leqq t<\alpha$ において $h(t)<0$，$\alpha<t\leqq 1$ において $h(t)>0$ となる。

さらに，$\alpha=\cos\beta$ とおくと，$\beta<x\leqq\pi$ において $g(x)<0$，$0\leqq x<\beta$ において $g(x)>0$ となる。

よって，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$f(0)-f(\pi)=-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}=\frac{-2a}{(a+1)(a-1)}>0$$

以上より，$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値は $f(0)$ である。

［解 説］

一見，平易に見えますが，関数の増減に関する興味深い問題です。置き換えを行って，思考の対象を絞り，グラフをイメージしながら解きました。

9 ［2005 京都大］

(1) $C_1 : y=\cos x$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ……②の共有点の条件は，$\cos x=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

ここで，$f(x)=\cos x-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ とおくと，

$$f(2k\pi)=1-\frac{1-4k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2}=\frac{8k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2}>0$$

$$f((2k+1)\pi)=-1-\frac{1-(2k+1)^2\pi^2}{1+(2k+1)^2\pi^2}=\frac{-2}{1+(2k+1)^2\pi^2}<0$$

これより，$f(x)=0$ は $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。すなわち，C_1 と C_2 はこの区間に少なくとも 1 つの共有点をもつ。

この共有点を $(\alpha,\ \cos\alpha)$ とすると，①②より，$\cos\alpha=\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ ………③

さて，点 $(\alpha,\ \cos\alpha)$ における C_1 の接線は，①より $y'=-\sin x$ なので，

$$y-\cos\alpha=-\sin\alpha(x-\alpha)\ \cdots\cdots\cdots④$$

$x=0$ のとき，$y=\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$ ………⑤

ここで，$2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$ において $\sin\alpha>0$ より，③から，

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}}=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

⑤から，$y=\alpha\cdot\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}+\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}=\dfrac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2}=1$ となり，接線④は点 $(0,\ 1)$ を通る。

(2) 点 $(0,\ 1)$ から C_1 に引いた接線は，接点を $(t,\ \cos t)$ とすると，

$$y-\cos t=-\sin t(x-t)\quad (2k\pi<t<(2k+1)\pi)$$

$(0,\ 1)$ を通ることより，$1-\cos t=t\sin t$，$t\sin t+\cos t-1=0$

ここで，$g(t)=t\sin t+\cos t-1$ とおくと，

$$g'(t)=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$$

右表より，$g(t)=0$ となる t は，$2k\pi<t<(2k+1)\pi$ にただ 1 つだけ存在し，言い換えると，点 $(0,\ 1)$ を通る接線の C_1 上の接点は，1 個だけしか存在しない。すなわち，C_1 と C_2 の共有点の個数は多くとも 1 つであり，(1)と合わせると，ただ 1 つとなる。

t	$2k\pi$	…	$\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$	…	$(2k+1)\pi$
$g'(t)$		＋	0	－	
$g(t)$	0	↗		↘	-2

［解 説］

(2)は(1)の後半で示した C_1 と C_2 の共有点における C_1 の接線は，必ず点 $(0,\ 1)$ を通るということを用いています。ややくどく記述しましたが。