２０２２ 入試対策

２次数学ランドマーク

積分法41題

理系 24か年

１９９８ － ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

積 分 法

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1　関数 $f(x)=\int_x^{2x+1}\frac{1}{t^2+1}dt$ について次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　$f'(x)=0$ となる x を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最大値を求めよ。　［1998 筑波大］

2　(1)　$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ。

(2)　(1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

［1998 東北大］

3　2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!$$

を示せ。ここで e は自然対数の底である。　［1999 東京工大］

4　(1)　$a_0<b_0$，$a_1<b_1$ を満たす正の実数 a_0，b_0，a_1，b_1 について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1}>\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}$$

(2)　n 個の自然数 x_1，x_2，……，x_n は互いに相異なり，$1\leqq x_k\leqq n$ （$1\leqq k\leqq n$）を満たしているとする。このとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$$

［1999 京都大］

5　次を示せ。

(1)　$\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin \pi x}{x}\right|dx=\int_0^1\sin \pi y\,dy=\frac{2}{\pi}$　［2000 金沢大］

6 $a>0,\ t>0$ に対して定積分 $S(a,\ t)=\int_0^a\left|e^{-x}-\dfrac{1}{t}\right|dx$ を考える。

(1) a を固定したとき, t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。

［2001 東京工大］

7 $f(t)$ を連続関数, x を実数として, 関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x)=\int_0^1|f(t)-x|\,dt$$

(1) $f(t)=e^t$ のとき, 関数 $g(x)$ の増減を調べ, $y=g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし, $e=2.71828\cdots$ は自然対数の底である。

(2) $f(t)$ は微分可能な単調増加関数で, その逆関数も微分可能とし, $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とおく。このとき, $g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ。

［2001 岡山大］

8 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin nx|\,dx$$

［2001 京都大］

9 $-1<a<1$ とする。

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^a\frac{1}{1-x^2}dx$ を求めよ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき, 次の等式を示せ。

$$\int_0^a\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

(3) 次の等式を示せ。

$$\log\frac{1+a}{1-a}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

［2001 北海道大］

10 関数 $f(x)=4\cos^2x-8\cos x+3$ を考える。n , k を自然数とし

$$g_n(k)=f\left(\frac{\pi}{3n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n\geqq 2$ とする。

(1) n を固定する。$2\leqq k\leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1)\geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。また, k が $1\leqq k\leqq 3n$ の範囲を動くとき, $g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2) (1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}$ を求めよ。

［2001 大阪大］

11　n を２以上の整数とし，$I(x)=\int_0^x \sin t \sin nt\,dt\ (x \geqq 0)$ と定める。

(1)　$n=2$ のとき，$I(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$I(x)$ の最大値が $\dfrac{n}{n^2-1}$ であるならば, n は偶数であることを証明せよ。

［2002　千葉大］

12　次の問いに答えよ。

(1)　すべての正の実数 $x,\ y$ に対して，不等式 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2)　$a,\ b$ は実数で $a<b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で，$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3)　$a,\ b$ は実数で $a<b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。　　［2002　九州大］

13　a は定数とし, n は２以上の整数とする。関数 $f(x)=ax^n\log x - ax\ (x>0)$ の最小値が -1 のとき，定積分 $\int_1^e f(x)\,dx$ の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

［2003　千葉大］

14　n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 $x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n$ と等比数列 $y_0,\ y_1,\ \cdots,\ y_n$ が，$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$，$1=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=2$ を満たすとし，$P(n),\ Q(n),\ R(n),\ S(n)$ を次で定める。

$$P(n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad Q(n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$R(n)=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},\quad S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$$

このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}P(n),\ \lim_{n\to\infty}Q(n),\ \lim_{n\to\infty}R(n),\ \lim_{n\to\infty}S(n)$ をそれぞれ求めよ。

［2004　東北大］

15 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx$ とおく。ただし，$0!=1$ とする。

(1) I_0 の値を求め，$n=1,\ 2,\ \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。 ［2004 九州大］

16 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$，$g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とするとき，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx=m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$$

を証明せよ。

(2) 正の整数 $m,\ n$ が $m\pi\leqq n<(m+1)\pi$ を満たしているとき，

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx\leqq\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx\leqq\frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

を証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ を求めよ。 ［2004 東京工大］

17 多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

を満たすとする。

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^2 f_n(x)dx$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^2 f_n(x)dx$ の値を求めよ。 ［2004 名古屋大］

18 eを自然対数の底とし，数列$\{a_n\}$を次式で定義する。

$$a_n=\int_1^e(\log x)^n\,dx\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $n\geqq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。

$$a_n=(n-1)(a_{n-2}-a_{n-1})$$

(2) $n\geqq 1$ に対し，$a_n>a_{n+1}>0$ となることを示せ。

(3) $n\geqq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n}<\frac{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}(e-2)$$

［2005 東京工大］

19 $f(x)$は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1) 自然数 n, m に対し，$\displaystyle\int_0^n t^m\,dt\leqq\sum_{k=1}^n k^m\leqq\int_0^n(t+1)^m\,dt$ を示せ。

(2) $f(x)$の次数を r とするとき，次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^n f(k)=\frac{1}{r+1}$$

(3) すべての自然数 n に対して$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(k)=\frac{1}{2}f(n)$が成り立つような$f(x)$を求めよ。

［2005 北海道大］

20 $x>0$ を定義域とする関数$f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}$について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数$y=f(x)$ $(x>0)$は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を$y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$とする。このとき，定積分$\displaystyle\int_8^{27}g(x)\,dx$を求めよ。

［2006 東京大］

21 以下の問いに答えよ。

(1) $0<x<a$ を満たす実数 x, a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2) (1)を利用して，次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし，$\log 2$は 2 の自然対数とする。

［2007 東京大］

22 $a>0$ に対し $I_0(a)=\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx$，$I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。

(1) $\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式 $I_n(a)=\dfrac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(3) 自然数 n に対して，$\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。 ［2007 東北大］

23 e は自然対数の底とする。$t>e$ において関数 $f(t)$，$g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}dx,\ \ g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx$$

(1) $f(t)-g(t)$ を t の１次式で表せ。

(2) $1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\lim_{t\to\infty} g(t)=0$ を示せ。

(3) $\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 a, b を求めよ。 ［2008 筑波大］

24 次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1) $0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式 $\dfrac{x}{n+1}\leqq\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\leqq\dfrac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。 ［2008 広島大］

25 $f(x)$ を整式で表される関数とし，$g(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt$ とおく。任意の実数 x について，$x(f(x)-1)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ が成り立つとする。

(1) $xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ は定数または１次式であることを示せ。

(3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。 ［2009 筑波大］

26 関数 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2010 熊本大]

27 (1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

[2010 東京大]

28 自然数 n に対し，$S_n=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。 $\left|S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\right|\leqq\frac{1}{n+1}$

(2) T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。 [2011 東京医歯大]

29 n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1) a_2 および a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_k を求めよ。

(3) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。 [2012 東京工大]

30 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに $f'(0)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。 [2013 新潟大]

31 $n,\ m$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式 $I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3) 次の式 $\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。 [2014 千葉大]

32 自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して，不等式 $\left|\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\leqq\dfrac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。 [2014 新潟大]

$\boxed{33}$ n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1 \text{ のとき}),\ \ g(x)=0\ (|x|>1 \text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1 \text{ のとき}),\ \ h(x)=0\ (|x|>1 \text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$$

［2015 東京大］

$\boxed{34}$ $a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

［2016 北海道大］

$\boxed{35}$ 連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)dt=4ax^3+(1-3a)x+\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du+\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2) $g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3) $f(x)$ を求めよ。

［2017 東京医歯大］

36 自然数 n に対し，定積分 $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $I_n+I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(2) $0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

(4) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

［2018 名古屋大］

37 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2) $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right| \leqq \dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$ の和を求めよ。 ［2018 新潟大］

38 以下の問いに答えよ。ただし，log は自然対数，e はその底とする。

(1) b を実数とする。関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\frac{x}{x^2+1}e^{-\frac{x^2}{2}}$ は単調に減少することを示せ。

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a, b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1}e^{-\frac{a^2}{2}}-\frac{b}{b^2+1}e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}}(b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。$I_n=\displaystyle\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}}dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log I_n$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(n+1)=0$ を用いてもよい。

［2019 大阪大］

39 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で，すべての実数 x に対して

$$f(x)=(1-x)\cos x+x\sin x-\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求めよ。また，$f'(x)=2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) 方程式 $f(x)=0$ は，$0<x<\pi$ の範囲でただ１つの解をもつことを示せ。

(4) (3)のただ１つの解を α とする。曲線 $y=f(x)$ $(0\leqq x\leqq\alpha)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし，曲線 $y=f(x)$ $(\alpha\leqq x\leqq\pi)$，x 軸および直線 $x=\pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

［2019 広島大］

40 xy 平面において，x，y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。２以上の整数 n に対し，

$$0<x<n,\ 1<2^y<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$ を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2)で求めた極限値を L とする。不等式 $\displaystyle L-\frac{P(n)}{n^2}>\frac{1}{2n}$ を示せ。 ［2020 熊本大］

41 n を自然数とし，t を $t\geqq1$ を満たす実数とする。

(1) $x\geqq t$ のとき，不等式 $\displaystyle -\frac{(x-t)^2}{2}\leqq\log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq0$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $\displaystyle -\frac{1}{6n^3}\leqq\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2tn^2}\leqq0$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle a_n=\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ を満たすような実数 p，q の値を求めよ。

［2021 大阪大］

積 分 法

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

$\boxed{1}$ ［1998 筑波大］

(1) $g(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$ とおくと，つねに $g(t)>0$ より，

$2x+1>x$ $(x>-1)$ のとき，$f(x)>0$

$2x+1<x$ $(x<-1)$ のとき，$f(x)<0$

よって，$f(x)=0$ となるのは，$2x+1=x$ のときだけである。

すなわち，$x=-1$

(2) $f'(x)=g(2x+1)\cdot(2x+1)'-g(x)=\dfrac{2}{(2x+1)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$

$$=\frac{1}{2x^2+2x+1}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{-x(x+2)}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)}$$

$f'(x)=0$ とすると，$x(x+2)=0$ から $x=0,\ -2$

(3) (1)より，$f(x)$ の最大値は $x>-1$ に存在するので，$x>-1$ における $f(x)$ の値の増減を調べると，右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

すると，最大値は $f(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$ となり，ここで $t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

［解 説］

逆三角関数は高校数学の範囲外なので，直接的な積分計算を回避して，設問に答えていきます。この考え方が採用できたかどうかで，本問の出来は決まります。

２　　　　［1998 東北大］

(1)　$y=f(x)$を同値変形すると，$x=g(y)$となることより，

$$y=\frac{e^x}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$$ から，$(e^x+1)(1-y)=1$

$$e^x=-1+\frac{1}{1-y}=\frac{y}{1-y},\quad x=\log\frac{y}{1-y}$$

よって，$g(y)=\log\dfrac{y}{1-y}$となり，$g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$

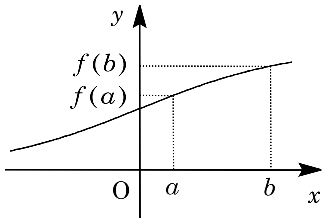
(2)　$x=f(t)$とおくと$dx=f'(t)dt$，また$x=f(a)$のとき$t=a$，$x=f(b)$のとき$t=b$となる。

さらに，$y=f(x)$の逆関数が$y=g(x)$から，$g\bigl(f(x)\bigr)=x$

$$\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=\int_a^b g\bigl(f(t)\bigr)f'(t)dt=\int_a^b tf'(t)dt=\int_a^b xf'(x)dx$$

よって，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b xf'(x)dx$$
$$=\int_a^b\{f(x)+xf'(x)\}dx$$
$$=\int_a^b\bigl(xf(x)\bigr)'dx$$
$$=\bigl[xf(x)\bigr]_a^b$$
$$=bf(b)-af(a)$$



［解 説］

(2)の証明は，まず右上の図で考えました。この位置関係では面積を考えると与式の成立は明らかなのですが，これでは証明とは言えません。積分の第 2 項の積分区間を$[a,\ b]$に変更することから，置換の式をみつけました。

３ [1999 東京工大]

$I_n=\int_0^1 t^n e^t dt$ とおくと，部分積分により，

$$I_n=\Big[\,t^n e^t\,\Big]_0^1-n\int_0^1 t^{n-1}e^t dt=e-nI_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2k+1)(2k-1)!}=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(2k+1)!}$

$$=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

証明すべき式 $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!\cdots\cdots(*)$ は，②より，

$$(*)\ \Leftrightarrow\ \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)=1\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\dfrac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}=J_n$ とおくと，

$$③\ \Leftrightarrow\ J_n=1+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，①から，

$$J_{n+1}=\frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e-(2n+1)I_{2n}}{(2n+1)!}=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{I_{2n}}{(2n)!}$$

$$=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{e-2nI_{2n-1}}{(2n)!}=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{e}{(2n)!}+\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=J_n+e\left(\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{(2n)!}\right)$$

$n\geqq2$ で，$\displaystyle J_n=J_1+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)$

ここで，$\displaystyle J_1=I_1=\int_0^1 te^t dt=\Big[\,te^t\,\Big]_0^1-\int_0^1 e^t dt=e-(e-1)=1$

よって，$n\geqq2$ で④は成立するので，$(*)$は成立する。

［解 説］

最初は③式を数学的帰納法で証明しました。しかし②式を眺めていると，直接的な証明が可能ではないかと思えてきました。それで考え直して書いたのが上の解です。

4 ［1999 京都大］

(1) $$\frac{b_1^2}{a_0^2+1}+\frac{a_1^2}{b_0^2+1}-\frac{a_1^2}{a_0^2+1}-\frac{b_1^2}{b_0^2+1}=\frac{b_1^2-a_1^2}{a_0^2+1}-\frac{b_1^2-a_1^2}{b_0^2+1}$$
$$=\frac{(b_1^2-a_1^2)(b_0^2-a_0^2)}{(a_0^2+1)(b_0^2+1)}$$

$0<a_0<b_0$，$0<a_1<b_1$ より，$\dfrac{b_1^2}{a_0^2+1}+\dfrac{a_1^2}{b_0^2+1}>\dfrac{a_1^2}{a_0^2+1}+\dfrac{b_1^2}{b_0^2+1}$

(2) まず，$1\leqq i<j\leqq n$ とし，$x_i=y_j$，$x_j=y_i$，$x_k=y_k$ $(k\neq i,\ k\neq j)$ とすると，条件より，$\{x_1,\ x_2,\cdots\cdots,x_n\}=\{y_1,\ y_2,\cdots\cdots,y_n\}=\{1,\ 2,\cdots\cdots,n\}$

さらに $x_i>x_j$ のとき，(1)より

$$\frac{x_i^2}{i^2+1}+\frac{x_j^2}{j^2+1}>\frac{x_j^2}{i^2+1}+\frac{x_i^2}{j^2+1}=\frac{y_i^2}{i^2+1}+\frac{y_j^2}{j^2+1}$$

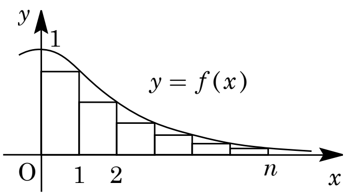
すると，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^2}{k^2+1}$ となり，同様にして $1\leqq p<q\leqq n$ で $x_p>x_q$ のときは，x_p の値と x_q の値を交換していくと，S_n の値は減少していく。よって，S_n の値が最小となるのは $x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n$，すなわち $x_k=k$ のときである。

以上より，$S_n\geqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$ ………①

さて，$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ とすると，$x>0$ で

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}<0$ となり，$f(x)$ は

単調に減少する。



右図において，面積を比較して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}f(k)<\int_0^n f(x)\,dx=\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおき，$n=\tan\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^\alpha\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^\alpha d\theta=\alpha<\frac{\pi}{2}<\frac{3.2}{2}=\frac{8}{5}\ \cdots\cdots\cdots③$$

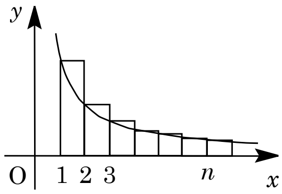
①②③より，$S_n>n-\dfrac{8}{5}$，すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$

［解 説］

(2)の前半は，わかっているのにそれを表現するのが難しく，もどかしく感じてしまいます。87 年に東大・理で同じ考え方をする問題が出ています。

5　　　　[2000 金沢大]

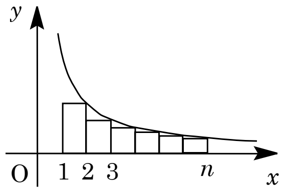
(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ とすると，$f(x)$ は減少関数より，



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}f(x)\,dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　(1)と同様にして，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\displaystyle\int_1^{n}f(x)\,dx=\log n$



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\log(n+1)<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}<\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\frac{1}{\log n}+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて $n\to\infty$ のとき，$\dfrac{\log(n+1)}{\log n}-1=\dfrac{\log(n+1)-\log n}{\log n}=\dfrac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\to 0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}+1\right)=1$ となるので，③より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3)　まず，$\displaystyle\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\ \cdots\cdots\cdots④$

$k\leqq x\leqq k+1$ において，$\dfrac{|\sin\pi x|}{k+1}\leqq\left|\dfrac{\sin\pi x}{x}\right|\leqq\dfrac{|\sin\pi x|}{k}$ より，

$$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx\leqq\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{1}{k}\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$y=x-k$ とおくと，

$$\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx=\int_0^1|\sin\pi(y+k)|\,dy=\int_0^1|\sin\pi y|\,dy=\int_0^1\sin\pi y\,dy$$

$$=-\frac{1}{\pi}\Big[\cos\pi y\Big]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

そこで⑤において，$k=1$ から $k=n$ まで各辺の和をとると，

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

④より，$\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{2}{\pi}$

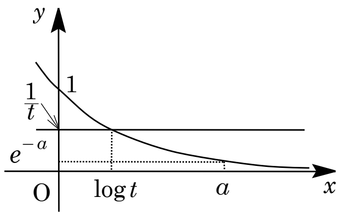
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{\pi}$$

したがって⑥より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\int_0^1\sin\pi y\,dy=\frac{2}{\pi}$

［解 説］

金沢大・理系の入試問題には，よく練られた難問が 1 題出題されますが，今年は本問がそれに当たります。(3)で(2)の極限値をどのように使うかということを考えていると，謎解きの楽しみが味わえます。

6　　[2001 東京工大]



(1)　(i)　$\dfrac{1}{t} \geqq 1\ (0 < t \leqq 1)$ のとき

$$S(a,\ t) = \int_0^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx = \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_0^a$$
$$= e^{-a} - 1 + \frac{a}{t}$$

(ii)　$e^{-a} \leqq \dfrac{1}{t} < 1\ (1 < t \leqq e^a)$ のとき

$e^{-x} = \dfrac{1}{t}$ の解は，$x = \log t$ より，

$$S(a,\ t) = \int_0^{\log t}\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx + \int_{\log t}^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx$$
$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x\right]_0^{\log t} + \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_{\log t}^a = -\frac{2}{t}\log t + \frac{a-2}{t} + e^{-a} + 1$$

(iii)　$\dfrac{1}{t} < e^{-a}\ (t > e^a)$ のとき

$$S(a,\ t) = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx = -e^{-a} + 1 - \frac{a}{t}$$

すると，$0 < t \leqq 1$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = -\dfrac{a}{t^2} < 0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に減少し，$t > e^a$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = \dfrac{a}{t^2} > 0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に増加する。

また，$1 < t \leqq e^a$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = \dfrac{2}{t^2}\log t - \dfrac{2}{t^2} - \dfrac{a-2}{t^2} = \dfrac{2\log t - a}{t^2}$ となる。このとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt} = 0$ の解は，$t = e^{\frac{a}{2}}$ であり，$S(a,\ t)$ の増減は右表のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	e^a
$\dfrac{dS(a,\ t)}{dt}$		$-$	0	$+$	
$S(a,\ t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

さらに，$S(a,\ t)$ は $t = 1,\ t = e^a$ において連続なので，$t = e^{\frac{a}{2}}$ で最小値をとり，

$$m(a) = S\left(a,\ e^{\frac{a}{2}}\right) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1$$

(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{a\to0}\frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a\to0}\frac{-2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1}{a^2} = \lim_{a\to0}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2$

ここで，$-\dfrac{a}{2} = b$ とおくと，$a \to 0$ のとき $b \to 0$ となり，

$$\lim_{a\to0}\frac{m(a)}{a^2} = \frac{1}{4}\lim_{b\to0}\left(\frac{e^b - 1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

［解　説］

積分計算についての理解を問う問題です。(2)の極限は e の定義を適用するものです。

７ ［2001 岡山大］

(1) $f(t)=e^t$ のとき，$g(x)=\int_0^1\left|e^t-x\right|dt$ となる。

(i) $x<1$ のとき　$g(x)=\int_0^1(e^t-x)dt=\left[e^t-xt\right]_0^1=-x+e-1$

このとき，関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii) $1\leqq x\leqq e$ のとき

$$g(x)=\int_0^{\log x}-(e^t-x)dt+\int_{\log x}^1(e^t-x)dt=-\left[e^t-xt\right]_0^{\log x}+\left[e^t-xt\right]_{\log x}^1$$

$$=-(x-1)+x\log x+(e-x)-x(1-\log x)=2x\log x-3x+e+1$$

$g'(x)=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}-3=2\log x-1$ となり，関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$g'(x)$		－	0	＋	
$g(x)$	$e-2$	↘		↗	1

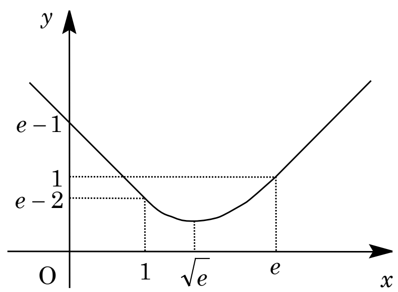
極小値は，$g(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1=(\sqrt{e}-1)^2$ である。

(iii) $x>e$ のとき

$$g(x)=\int_0^1-(e^t-x)dt=x-e+1$$

このとき，関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2) 条件より $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，また $b=f(0)$，$c=f(1)$ とおく。すると，$f(t)$ は単調増加関数なので，$b<a<c$ となる。

さらに，$F'(t)=f(t)$ とおくと，

(i) $x<b$ のとき　$g(x)=\int_0^1\{f(t)-x\}dt=\left[F(t)-xt\right]_0^1=F(1)-F(0)-x$

このとき，関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii) $b\leqq x\leqq c$ のとき

$f(u)=x$，すなわち $u=f^{-1}(x)$ とおくと，

$$g(x)=\int_0^u-\{f(t)-x\}dt+\int_u^1\{f(t)-x\}dt=-\left[F(t)-xt\right]_0^u+\left[F(t)-xt\right]_u^1$$

$$=-2F(u)+2xu-x+F(0)+F(1)$$

$$g'(x)=-2F'(u)\frac{du}{dx}+2u+2x\frac{du}{dx}-1=-2f(u)\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1$$

$$=-2f(f^{-1}(x))\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1=-2x\frac{du}{dx}+2x\frac{du}{dx}+2u-1$$

$$=2u-1=2f^{-1}(x)-1$$

条件より $a=f\left(\frac{1}{2}\right)$なので，$f^{-1}(a)=\frac{1}{2}$である。

さて，$f(t)$が単調増加関数なので，$f^{-1}(x)$も単調増加関数となり，$g'(x)=0$すなわち$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}$の解は$x=a$となる。

さらに$g'(x)$の符号は，$x=a$の前後で負から正に変わる。

すると，関数$g(x)$の増減は右表のようになる。

x	b	$\cdots$	a	$\cdots$	c
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(iii) $x>c$のとき　$g(x)=\int_0^1-\{f(t)-x\}dt=-F(1)+F(0)+x$

このとき，関数$g(x)$は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$g(x)$はすべてのxに対して連続なので，$x=a$で最小値をとる。

［解 説］

(2)は(1)を一般化したもので，同じように論理を展開することができます。しかし，逆関数の扱い方など，かなり難易度はアップします。

$\boxed{8}$ 　　［2001 京都大］

$nx=t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=n$ より，

$$I_n=\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin nx|\,dx=\int_0^{n^2\pi}e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\frac{1}{n}dt$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\,dt=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{t}{n}}\sin t\,dt\right|$$

ここで，$\left(e^{-\frac{t}{n}}\sin t\right)'=-\dfrac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\sin t+e^{-\frac{t}{n}}\cos t$ ………①

$$\left(e^{-\frac{t}{n}}\cos t\right)'=-\frac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\cos t-e^{-\frac{t}{n}}\sin t \cdots\cdots\cdots②$$

①＋②×n より，$\left(e^{-\frac{t}{n}}\sin t+ne^{-\frac{t}{n}}\cos t\right)'=-\dfrac{n^2+1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\sin t$

$$e^{-\frac{t}{n}}\sin t=-\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{t}{n}}(\sin t+n\cos t)\right\}'$$

すると，$\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-\frac{t}{n}}\sin t\,dt=-\frac{n}{n^2+1}\Big[e^{-\frac{t}{n}}(\sin t+n\cos t)\Big]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$

$$=-\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k}{n}\pi}n\cos k\pi-e^{-\frac{k-1}{n}\pi}n\cos(k-1)\pi\right\}$$

$$=-\frac{n^2}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k}{n}\pi}(-1)^k-e^{-\frac{k-1}{n}\pi}(-1)^{k-1}\right\}=-\frac{n^2}{n^2+1}(-1)^k(1+e^{\frac{\pi}{n}})e^{-\frac{k}{n}\pi}$$

よって，$\displaystyle I_n=\frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k}{n}\pi}=\frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}(1-e^{-\frac{\pi}{n}\cdot n^2})}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$

$$=\frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})(1-e^{-n\pi})\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin nx|\,dx=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{\pi}\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1=\frac{2}{\pi}$

［解　説］

積分と数列の和に関する超頻出問題です。正確な計算力がすべてです。

9 [2001 北海道大]

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[-\log|1-x|+\log|1+x|\Big]_0^a$

$\displaystyle= \frac{1}{2}\Big[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big]_0^a = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$ （$-1<a<1$ より）

(2) $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \int_0^a \frac{1-1+x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx - \int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}dx$

ここで, (1)より, $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$

また, $\displaystyle\int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}dx = \int_0^a (1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n})dx$

$\displaystyle= \Big[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big]_0^a$

$\displaystyle= a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\cdots+\frac{a^{2n+1}}{2n+1}$

よって, $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$

(3) (i) $0\leqq a<1$ のとき　$0\leqq x\leqq a$ において, $\displaystyle 0\leqq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\leqq \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$

$\displaystyle 0\leqq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \leqq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}dx = \frac{1}{1-a^2}\Big[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big]_0^a = \frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$

よって, $n\to\infty$ のとき, $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

(ii) $-1<a<0$ のとき　$a\leqq x\leqq 0$ において, $\displaystyle 0\leqq \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\leqq \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$

$\displaystyle 0\leqq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \leqq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}dx = \frac{1}{1-a^2}\Big[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big]_a^0 = -\frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$

よって, $n\to\infty$ のとき, $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = -\int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

(i)(ii)より, $-1<a<1$ のとき, $n\to\infty$ とすると, $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

すると, (2)より, $\displaystyle\log\frac{1+a}{1-a} - 2\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$ なので,

$$\log\frac{1+a}{1-a} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

［解 説］

無限級数の値を積分を用いて求めるという頻出題です。パズルのような誘導がついているおもしろい問題です。

$\boxed{10}$　　[2001 大阪大]

(1)　$g_n(k-1)\geqq g_n(k)$ より，$g_n(k)-g_n(k-1)\leqq 0$ なので，$f\left(\dfrac{k\pi}{3n}\right)\leqq 0$………①

さて，$f(x)=4\cos^2 x-8\cos x+3=(2\cos x-3)(2\cos x-1)$

$f(x)\leqq 0$ とすると，$\cos x\geqq \dfrac{1}{2}$ なので，①より $\cos\dfrac{k\pi}{3n}x\geqq\dfrac{1}{2}$………②

$2\leqq k\leqq 3n$ から，$\dfrac{2\pi}{3n}\leqq\dfrac{k\pi}{3n}\leqq\pi$ となり，②を満たすのは，$\dfrac{2\pi}{3n}\leqq\dfrac{k\pi}{3n}\leqq\dfrac{1}{3}\pi$

よって, $2\leqq k\leqq n$ となり，求める k は，$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n$

すると，$g_n(k-1)>g_n(k)$ となるのは $2\leqq k\leqq n-1$，また $g_n(k-1)=g_n(k)$ となるのは $k=n$，さらに $g_n(k-1)<g_n(k)$ となるのは $n+1\leqq k\leqq 3n$ なので，

$$g_n(1)>g_n(2)>\cdots>g_n(n-1)=g_n(n)<g_n(n+1)<\cdots<g_n(3n)$$

よって，$g_n(k)$ が最小となる k は，$n-1$ または n である。

(2)　(1)より，$G_n=g_n(n)=f\left(\dfrac{\pi}{3n}\right)+f\left(\dfrac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\dfrac{n\pi}{3n}\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{\pi}{3n}k\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)=\frac{3}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\cos^2 x-8\cos x+3)\,dx=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos 2x-8\cos x+5)\,dx$$

$$=\frac{3}{\pi}\Big[\sin 2x-8\sin x+5x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-4\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{21\sqrt{3}}{2\pi}+5$$

［解　説］

(1)は階差数列を用いた最大・最小問題, (2)は区分求積法による極限計算となっています。一見, 畑違いの分野が 1 つの問題にうまく収まっています。

11 ［2002 千葉大］

(1) $n=2$ のとき，$I(x)=\int_0^x \sin t\sin 2t\,dt=\int_0^x -\frac{1}{2}(\cos 3t-\cos t)\,dt$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\right]_0^x=-\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x$$

$$I'(x)=-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos x)=\sin 2x\sin x$$

$I(x)$ は周期 2π の周期関数なので，$0\leqq x\leqq 2\pi$ で考えても一般性は失われない。したがって，上表より，最大値は $I\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ となる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$I'(x)$	0	＋	0	－	0	－	0	＋	0
$I(x)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0

(2) $I(x)=\int_0^x \sin t\sin nt\,dt=\int_0^x -\frac{1}{2}\{\cos(n+1)t-\cos(n-1)t\}dt$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)t-\frac{1}{n-1}\sin(n-1)t\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{2(n+1)}\sin(n+1)x+\frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x$$

$-1\leqq\sin(n+1)x\leqq 1$，$-1\leqq\sin(n-1)x\leqq 1$ より，

$$I(x)\leqq\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{n-1+n+1}{2(n+1)(n-1)}=\frac{n}{n^2-1}\cdots\cdots\cdots①$$

これより，$I(x)$ の最大値が $\frac{n}{n^2-1}$ であるのは，①の等号が成立するときなので，

$\sin(n+1)x=-1\cdots\cdots②$，$\sin(n-1)x=1\cdots\cdots③$

②より，m を 0 以上の整数として，$(n+1)x=2m\pi+\frac{3}{2}\pi\cdots\cdots\cdots④$

③より，l を 0 以上の整数として，$(n-1)x=2l\pi+\frac{1}{2}\pi\cdots\cdots\cdots⑤$

④＋⑤より，$2nx=2m\pi+2l\pi+2\pi$，$nx=(m+l+1)\pi\cdots\cdots\cdots⑥$

④－⑤より，$2x=2m\pi-2l\pi+\pi$，$x=\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\pi\cdots\cdots\cdots⑦$

⑥⑦より，$n\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\pi=(m+l+1)\pi$，$\frac{1}{2}n=(m+l+1)-n(m-l)$

以上より，$l,\ m,\ n$ は整数なので，n は偶数となる。

［解 説］

(2)でも，(1)と同じように微分して増減表と考えました。ところが，それを実行するのは複雑そうに思えましたので，見方を変えたところ，あっさり結論が導けました。おもしろい問題です。

12 ［2002 九州大］

(1) $x>0,\ y>0$ に対して，$t=\dfrac{x}{y}>0$ とおくと，

$$x\log x-x\log y-x+y\geqq 0 \iff \frac{x}{y}\log\frac{x}{y}-\frac{x}{y}+1\geqq 0 \iff t\log t-t+1\geqq 0$$

ここで，$h(t)=t\log t-t+1$ とおくと，

$$h'(t)=\log t+t\cdot\frac{1}{t}-1=\log t$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$		↘	0	↗

右表より，$t>0$ のとき，$h(t)\geqq 0$ となる。

よって，$x\log x-x\log y-x+y\geqq 0$ ………①

(2) 区間 $[a,\ b]$ において，$f(x)>0$，$g(x)>0$ なので，①より，

$$f(x)\log f(x)-f(x)\log g(x)-f(x)+g(x)\geqq 0$$

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\log g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ ……②なので，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq\int_a^b f(x)\log g(x)\,dx \text{ ………③}$$

(3) $M=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)M=\int_a^b M\,dx$ ………④

これより，$g(x)=M$ とおくと，②をみたすので，③より，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq\int_a^b f(x)\log M\,dx=\log M\int_a^b f(x)\,dx$$

④の関係から，$\displaystyle\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq(b-a)M\log M$ となり，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx\geqq M\log M$$

［解 説］

(1)から(2)へはスムーズに流れ，(2)から(3)へはちょっと引っかかるという，うまい誘導がついています。

13 ［2003 千葉大］

$f(x)=ax^n\log x-ax=a(x^n\log x-x)$に対して,

$$f'(x)=a(nx^{n-1}\log x+x^{n-1}-1)=a\{x^{n-1}(n\log x+1)-1\}$$

ここで，$g(x)=x^{n-1}(n\log x+1)-1$とおくと，$f'(x)=ag(x)$となり,

$$g'(x)=(n-1)x^{n-2}(n\log x+1)+nx^{n-2}=x^{n-2}\{n(n-1)\log x+2n-1\}$$

$x>0$において，$g'(x)=0$の解は, $n\geqq 2$より,

$$\log x=-\frac{2n-1}{n(n-1)}，\ x=e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$$

この値を$x=\alpha$とおくと，$g(x)$の増減は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=-1$，$g(1)=0$に注意すると，

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘		↗

$0<x<1$で$g(x)<0$, $x>1$で$g(x)>0$である。

(i)　$a>0$のとき

$f(x)$の増減は，右表のようになり，最小値は$f(1)=-a$となる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-a$	↗

条件から$-a=-1$，$a=1$となり, $a>0$も満たす。

(ii)　$a=0$のとき

$f(x)=0$より，最小値が-1にはならない。

(iii) $a<0$のとき

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$より，最小値は存在しない。

(i)(ii)(iii)より，$f(x)=x^n\log x-x$である。

このとき，$\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e(x^n\log x-x)\,dx$

$$=\frac{1}{n+1}\Big[x^{n+1}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\,dx-\frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_1^e$$

$$=\frac{1}{n+1}e^{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big[x^{n+1}\Big]_1^e-\frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$=\frac{n}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

［解　説］

$g(1)=0$は式の形から見つけます。ただ，$g(x)$の増減について，チェックが少々面倒です。なお，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^n\log x=0$は証明なしで用いています。

$\boxed{14}$ [2004 東北大]

等差数列 x_0, x_1, $\cdots$, x_n の公差は $\frac{1}{n}$, 等比数列 y_0, y_1, $\cdots$, y_n の公比は $2^{\frac{1}{n}}$ より,

$$x_k = 1 + \frac{k}{n},\quad y_k = 2^{\frac{k}{n}}$$

すると, $P(n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ より,

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \int_0^1 (1+x)\,dx = \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

$R(n) = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{n}}$ より,

$$\lim_{n\to\infty} R(n) = \int_0^1 2^x\,dx = \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1 = \frac{1}{\log 2}$$

また, $Q(n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ より,

$$\log Q(n) = \frac{1}{n}\log(x_1 x_2 \cdots x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\log Q(n) = \int_0^1 \log(1+x)\,dx = \left[(1+x)\log(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 dx$$

$$= 2\log 2 - 1 = \log\frac{4}{e}$$

ここで, $f(x) = \log x$ は $x>0$ において連続であることより, $\lim_{n\to\infty} Q(n) = \frac{4}{e}$

同様にして, $S(n) = \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}$ より,

$$\log S(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log 2^{\frac{k}{n}} = \frac{\log 2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{\log 2}{2n}(n+1)$$

よって, $\lim_{n\to\infty}\log S(n) = \frac{\log 2}{2} = \log\sqrt{2}$ より, $\lim_{n\to\infty} S(n) = \sqrt{2}$

［解　説］

単純な構図の問題ですが, 4 つの極限とも, きれいな数値として求まります。いろいろな解法がありますが, 最初に考えたものを記しました。

15 ［2004 九州大］

(1) $I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0e^x dx=\int_0^2 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^2=e^2-1$

また，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx=\dfrac{(-1)^n}{n!}\left\{\Big[x^ne^x\Big]_0^2-\int_0^2 nx^{n-1}e^x dx\right\}$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}2^ne^2-\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1}e^x dx=\frac{(-1)^n2^ne^2}{n!}+I_{n-1}$$

すると，$I_1=\dfrac{-2e^2}{1!}+(e^2-1)=-e^2-1$，$I_2=\dfrac{4e^2}{2!}+(-e^2-1)=e^2-1$ より，

$$I_3=\frac{-8e^2}{3!}+(e^2-1)=-\frac{1}{3}e^2-1$$

(2) $0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ より，

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^x dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^2 x^ne^2 dx=\frac{e^2}{n!}\Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_0^2=\frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!}$$

ここで, $n\geqq 2$ のとき,

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{2^{n-1}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+1)}\leqq 2\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$n=1$ のときも $\dfrac{2^2}{2!}=2\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^0$ となり, $(*)$は成立している。

よって，$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx\leqq 2e^2\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1}$

(3) (1)から，$I_n-I_{n-1}=\dfrac{(-1)^n2^ne^2}{n!}$ より，$\dfrac{(-1)^n2^n}{n!}=\dfrac{1}{e^2}(I_n-I_{n-1})\ \ (n\geqq 1)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k-1})=\frac{1}{e^2}(I_n-I_0)=\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=1+\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)=\frac{1}{e^2}(I_n+1)$

さて, (2)より，$|I_n|=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^ne^x dx\leqq 2e^2\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1}$

$n\to\infty$ のとき，$|I_n|\to 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}$$

［解 説］

(3)が本題ですが，それを解くのに無理が生じないように，(1)と(2)が設けられています。配慮の深い問題です。

16 ［2004 東京工大］

(1) まず，積分区間$0 \leqq x \leqq m\pi$を m 等分して，

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$t = x-(k-1)\pi$ とおくと，

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f\big(\sin(t+(k-1)\pi)\big)g\big(\cos(t+(k-1)\pi)\big)dt$$

さて，$\sin(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\sin t$，$\cos(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\cos t$ と表すことができ，さらに$f(x)$，$g(x)$は偶関数より，

$$f\big(\sin(t+(k-1)\pi)\big) = f\big((-1)^{k-1}\sin t\big) = f(\sin t)$$

$$g\big(\cos(t+(k-1)\pi)\big) = g\big((-1)^{k-1}\cos t\big) = g(\cos t)$$

よって，$\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = \int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)dt \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$\displaystyle\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$

(2) $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ として，$nx = t$ とおくと，

$$I_n = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}\cdot\frac{dt}{n} = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

ここで，$m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ において，$\displaystyle\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} \geqq 0$ なので，

$$I_n \geqq \frac{1}{n}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \geqq \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ③$$

$$I_n \leqq \frac{1}{n}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ④$$

さて，$f(x) = |x|$，$\displaystyle g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$ とおくと，$f(x)$，$g(x)$は連続な偶関数なので，(1)の結論から，

$$\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑤$$

同様にして，$\displaystyle\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = (m+1)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑥$

③～⑥より，$\displaystyle\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$

(3) まず，$\cos x = u$ とおくと，

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx = \int_1^{-1}\frac{1}{(1+u^2)^2}(-du) = 2\int_0^1\frac{1}{(1+u^2)^2}du$$

さらに，$u = \tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$2\int_0^1 \frac{1}{(1+u^2)^2}du = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta = \Big[\,\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

そこで, (2)の結論から,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big) \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big)$$

$n\to\infty$のとき $m\to\infty$となるので, はさみうちの原理を用いると,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \lim_{m\to\infty} I_n = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$$

［解 説］

(3)の極限値が到達点となりますが, このために与えられた誘導の意味を考えながら, (1)と(2)の証明を進めます。決して易しくはありませんが, 演習する価値の大きな一題です。