２０２２ 入試対策

２次数学ランドマーク

極限２４題

理系 24か年

１９９８ － ２０２１

外林 康治　編著

電送数学舎

極　　限

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1　n を正の整数とする。連立不等式

$$x+y+z \leqq n,\ -x+y-z \leqq n,\ x-y-z \leqq n,\ -x-y+z \leqq n$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$ を求めよ。　[1998 東京大]

2　A 地点から B 地点まで 0 または 1 の一文字からなる信号を送る。A 地点と B 地点の間に中継点を $2n-1$ 箇所作り AB 間を $2n$ 個の小区間に分割すると, 一つの区間において 0 と 1 が逆転して伝わる確率は $\dfrac{1}{4n}$ である。このとき A 地点を発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わる確率を P_{2n} とする。次の各問いに答えよ。

(1)　偶数回の逆転があると, A 地点で発した信号 0 が B 地点に 0 として伝わることに注意して P_2 を求めよ。

(2)　$\displaystyle (a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}$ を示せ。

(3)　P_{2n} を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}P_{2n}$ を求めよ。　[1998 神戸大]

3　関数 $f(x)=1-x^2$ について, 次の問いに答えよ。

(1)　$f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2)　a を(1)で求めた実数とする。$x\geqq\dfrac{1}{2}$ ならば, $|f(x)-f(a)|\geqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$ となることを示せ。

(3)　a を(1)で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2}\leqq x_1\leqq 1$ として,

$$x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2}\leqq x_n\leqq 1$ が成り立つならば, $x_1=a$ であることを示せ。　[1999 九州大]

4　数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。この数列が $a_1=1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$, $n(n-2)a_{n+1}=S_n\ (n\geqq 1)$ を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ。

[2002 京都大]

5 関数$f(x)=4x-x^2$に対し，数列$\{a_n\}$を

$$a_1=c\,,\quad a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与える。ただし, c は$0<c<2$を満たす定数である。

(1) $a_n<2$，$a_n<a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を示せ。

(2) $2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。 ［2003 東北大］

6 座標平面上で, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし, 辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。p, n を自然数とし，領域$D_n=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x,\ x^p\leqq y\leqq n\}$を考え，その面積を$S_n$とする。$L_n$と$M_n$を，それぞれ$D_n$に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ$y=x^p$ $\left(0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}}\right)$と交わる単位正方形の個数は$n$であることを示せ。

(2) 不等式$M_n<S_n<M_n+n$を示せ。また，面積S_nを求めよ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n$を求めよ。 ［2003 九州大］

7 曲線$C: y=e^x$上の異なる 2 点$\mathrm{A}(a,\ e^a)$，$\mathrm{P}(t,\ e^t)$における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを$L_a(t)$で表す。さらに，$r(a)=\displaystyle\lim_{t\to a}L_a(t)$と定義する。

(1) $r(a)$を求めよ。

(2) aが実数全体を動くとき，$r(a)$の最小値を求めよ。 ［2005 筑波大］

8 $a_1=\dfrac{1}{2}$とし，数列$\{a_n\}$を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し$b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおく。$n>1$のとき，$b_n>2n$となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$を求めよ。 ［2006 東京大］

9　x, y を相異なる正の実数とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 0,\quad a_{n+1} = xa_n + y^{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点$(x,\ y)$の範囲を図示せよ。　［2007 京都大］

10　n を 2 以上の自然数とする。平面上の$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$は$\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90°$，$\mathrm{OA_1} = 1$，$\mathrm{A_1A_2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。$\mathrm{A_2}$から$\mathrm{OA_1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_3}$とする。$\mathrm{A_3}$から$\mathrm{OA_2}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_4}$とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$について，A_kからOA_{k-1}へ垂線を下ろし，交点をA_{k+1}として，順番に$\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，$\cdots$を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$k = 1,\ 2,\ \cdots$のとき，ベクトル$\overrightarrow{h_k}$と$\overrightarrow{h_{k+1}}$の内積$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$を n と k で表せ。

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値$\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。　［2008 東北大］

11　実数xに対し，x以上の最小の整数を$f(x)$とする。$a,\ b$を正の実数とするとき，極限$\lim_{x\to\infty} x^c\left(\dfrac{1}{f(ax-7)} - \dfrac{1}{f(bx+3)}\right)$が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。　［2008 東京工大］

12　正の実数 r と$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$の範囲の実数$\theta$に対して，$a_0 = r\cos\theta$，$b_0 = r$とおく。$a_n$，$b_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$をθで表せ。

(2)　$\dfrac{a_n}{b_n}$を n とθで表せ。

(3)　$\theta \neq 0$のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \dfrac{r\sin\theta}{\theta}$を示せ。　［2010 北海道大］

13　aを正の整数とする。正の実数xについての方程式

$$(*)\qquad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような a を小さい順に並べたものをa_1，a_2，a_3，…とする。ここに[　]はガウス記号で，実数uに対し，$[u]$はu以下の最大の整数を表す。

(1)　$a=7$，8，9の各々について(＊)の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2)　a_1，a_2を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$を求めよ。　［2010 東京工大］

14　aが正の実数のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$を求めよ。　［2012 京都大］

15　数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$のとき，$a_n>1$となることを示せ。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$を満たす正の実数$\alpha$を求めよ。

(3)　すべての自然数nに対して$a_n<\alpha$となることを示せ。

(4)　$0<r<1$を満たすある実数rに対して，不等式

$$\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。さらに，極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。　［2012 東北大］

16　正の整数 n に対し，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$の範囲において$\sin 4nx\geqq\sin x$を満たす x の区間の長さの総和をS_nとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。　［2013 東京工大］

17　数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を，$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。　［2015 東京工大］

18　xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を$[\,a\,]$で表す。記号$[\ \ ]$をガウス記号という。以下の問いではNを自然数とする。

(1)　n を$0\leqq n\leqq N$を満たす整数とする。点$(n,\ 0)$と点$\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2)　直線$y=x$と，x 軸，および直線$x=N$で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を$A(N)$とおく。このとき$A(N)$を求めよ。

(3)　曲線$y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0\leqq x\leqq N)$と，x 軸，および直線$x=N$で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を$B(N)$とおく。(2)の$A(N)$に対して$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$を求めよ。　［2017 筑波大］

19　k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$において，関数$y=f(x)$の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2)　数列$\{x_n\}$が$x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を満たすとき，$x_n>1$を示せ。

(3)　(2)の数列$\{x_n\}$に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$を示せ。また$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$を求めよ。

［2018 神戸大］

20　aを実数とし，数列$\{x_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$x_1=a,\ x_{n+1}=x_n+{x_n}^2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$a>0$のとき，数列$\{x_n\}$が発散することを示せ。

(2)　$-1<a<0$のとき，すべての正の整数 n に対して$-1<x_n<0$が成り立つことを示せ。

(3)　$-1<a<0$のとき，数列$\{x_n\}$の極限を調べよ。　［2019 東北大］

21 数列$\{a_n\}$を$a_n=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t>0$のとき，$1\leqq\dfrac{e^t-1}{t}\leqq e^t$であることを示せ。

(2) 数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$を

$$x_n=\log(e^{a_n}+1),\ \ y_n=\log(e^{a_n}-1),\ \ z_n=y_n+\sum_{k=1}^{n}x_k\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。z_nはnによらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\log\left(\frac{e^{a_k}+1}{2}\right)$を求めよ。 [2019 筑波大]

22 pを正の整数とする。α，βはxに関する方程式$x^2-2px-1=0$の 2 つの解で，$|\alpha|>1$であるとする。

(1) すべての正の整数 n に対し，$\alpha^n+\beta^n$は整数であり，さらに偶数であることを証明せよ。

(2) 極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^n\sin(\alpha^n\pi)$を求めよ。 [2020 京都大]

23 $0<r<1$とし，半径 1 の円C_1と半径rの円C_2の中心は一致しているとする。円C_1に内接し，円C_2に外接する円をできるだけたくさん描く。ただし，どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする。描いた円の円周の長さの総和を$f(r)$とするとき，$\displaystyle\lim_{r\to1-0}f(r)$を求めよ。 [2020 信州大]

24 $a\geqq0$とし，nを正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$のとき，$\dfrac{x}{1+a}\left(1-\dfrac{x}{2(1+a)}\right)<\log\dfrac{1+a+x}{1+a}<\dfrac{x}{1+a}$を示せ。

(2) $I_n(a)=\left(1+\dfrac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2(1+a)}\right)$とおく。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)$を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$を求めよ。 [2021 新潟大]

極　　限

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 [1998 東京大]

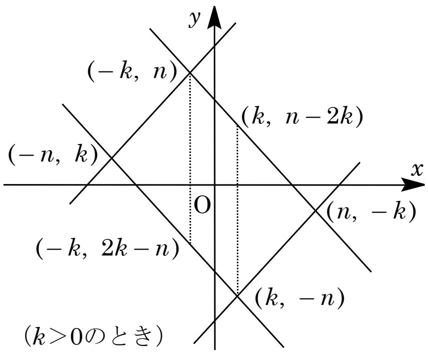
$z=k$ での切り口を考える。

$x+y+k \leqq n$ より，$y \leqq -x+n-k$

$-x+y-k \leqq n$ より，$y \leqq x+n+k$

$x-y-k \leqq n$ より，$y \geqq x-(n+k)$

$-x-y+k \leqq n$ より，$y \geqq -x-(n-k)$



切り口の存在する条件は,

$n-k \geqq -(n-k)$ かつ $n+k \geqq -(n+k)$

よって，$-n \leqq k \leqq n$

境界線の交点は,

$y=-x+n-k$ かつ $y=x+n+k$ より，$(x,\ y)=(-k,\ n)$

$y=-x+n-k$ かつ $y=x-(n+k)$ より，$(x,\ y)=(n,\ -k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x+n+k$ より，$(x,\ y)=(-n,\ k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x-(n+k)$ より，$(x,\ y)=(k,\ -n)$

$z=k$ 上での格子点の個数を $f_k(n)$ とすると,

$$f_k(n)=2\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-2k+1)\}+(2n-2k+1)(2k-1)$$

$$=2\cdot\frac{1+(2n-2k+1)}{2}\cdot(n-k+1)+(2n-2k+1)(2k-1)$$

$$=2(n-k+1)^2+\{2(n-k+1)-1\}(2k-1)$$

以上より，$f(n)=\displaystyle\sum_{k=-n}^{n}f_k(n)=\sum_{k=-n}^{n}\left[\,2(n-k+1)^2+\{2(n-k+1)-1\}(2k-1)\,\right]$

ここで，$n-k+1=l$ とおくと,

$$f(n)=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{2l^2+(2l-1)(2n+1-2l)\right\}=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{-2l^2+4(n+1)l-(2n+1)\right\}$$

$$=-\frac{2}{3}(2n+1)(n+1)(4n+3)+4(n+1)^2(2n+1)-(2n+1)^2$$

$$=\frac{1}{3}(2n+1)(4n^2+4n+3)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\frac{8}{3}$

［解 説］

4 平面で囲まれた領域にある格子点の個数を求める頻出問題です。平面の方程式は知っていて当然というのが，出題者からのメッセージです。

$\boxed{2}$ ［1998 神戸大］

(1) $n=1$ のとき, A 地点から B 地点まで信号の逆転が起こらない確率は $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2$, 逆転が 2 回起こる確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ より,

$$P_2=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$$

(2) $$(a+b)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}+\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}b^{2k-1}\cdots\cdots\cdots①$$

$$(a-b)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}(-b)^{2k}+\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}(-b)^{2k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}-\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}b^{2k-1}\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より

$$(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}\cdots\cdots\cdots③$$

(3) A 地点から B 地点まで信号の逆転が, 0, 2, 4, ……, $2n$ 回のとき, 0 が 0 として伝わるので, $p_n=\dfrac{1}{4n}$, $q_n=1-\dfrac{1}{4n}$ とおくと,

$$P_{2n}=q_n{}^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_2p_n{}^2q_n{}^{2n-2}+{}_{2n}\mathrm{C}_4p_n{}^4q_n{}^{2n-4}+\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-2}p_n{}^{2n-2}q_n{}^2+p_n{}^{2n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,q_n{}^{2n-2k}p_n{}^{2k}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(q_n+p_n)^{2n}+(q_n-p_n)^{2n}\right\}\quad（③より）$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}$$

(4) $$\lim_{n\to\infty}P_{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\left(1+\frac{1}{-2n}\right)^{-2n}\right)^{-1}\right\}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

［解 説］

最近はやりの通信を題材とした問題です。非常にていねいな誘導がついています。特に(1)は親切すぎるのではないかと思えるほどです。

3 ［1999 九州大］

(1) $f(a)=a$ より，$1-a^2=a$，$a^2+a-1=0$

$a>0$ より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2) $|f(x)-f(a)|=|1-x^2-(1-a^2)|=|-(x+a)(x-a)|=|x+a||x-a|$

ここで条件より，$|x+a|\geqq\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

よって，$|f(x)-f(a)|\geqq\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$

(3) $x_{n+1}=f(x_n)$，$a=f(a)$ なので，$x_n\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき(2)より，

$$|x_{n+1}-a|=|f(x)-f(a)|\geqq\frac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$$

よって，$|x_n-a|\geqq|x_1-a|\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

(i) $x_1-a\neq0$ のとき

$n\to\infty$ のとき $|x_n-a|\to\infty$ となるので，すべての n に対しては $x_n\leqq1$ が成立しない。

(ii) $x_1-a=0$ のとき

$a=f(a)$ なので，すべての n に対して $x_n=a$ となる。

(1)より，$\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq1$ なので，すべての n に対して $\dfrac{1}{2}\leqq x_n\leqq1$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x_1=a$ の場合のみ題意が成立する。

［解 説］

(2)の不等式は，(3)で定義された数列の発散条件に対応することがわかります。これを(3)の題意に結びつけることがポイントです。

$\boxed{4}$　　[2002 京都大]

条件より，$n(n-2)a_{n+1}=S_n\ (n\geqq 1)$ ………①

$(n-1)(n-3)a_n=S_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………②

①－②より，$n(n-2)a_{n+1}-(n-1)(n-3)a_n=a_n$，$n(n-2)a_{n+1}=(n-2)^2a_n$

$n\geqq 3$ で，$na_{n+1}=(n-2)a_n$

$n(n-1)a_{n+1}=(n-1)(n-2)a_n$

よって，$(n-1)(n-2)a_n=(3-1)(3-2)a_3=2a_3$

$$a_n=\frac{2a_3}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$$

ここで，①に $n=1$ を代入すると，$1\cdot(-1)a_2=S_1$，$-a_2=a_1$ より，$a_2=-a_1=-1$

さて，$n\geqq 3$ で，$S_n=a_1+a_2+\sum_{k=3}^{n}a_k=1-1+\sum_{k=3}^{n}\frac{2a_3}{(k-1)(k-2)}$

$$=2a_3\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)=2a_3\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$$

条件より，$\lim_{n\to\infty}S_n=1$ なので，$2a_3=1$，$a_3=\frac{1}{2}$

以上より，$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_n=\frac{1}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$

［解　説］

①に $n=2$ を代入して a_3 の値を求めようとしましたが，$0\cdot a_3=0$ となり，何も得られませんでした。そこで，$\lim_{n\to\infty}S_n=1$ の利用となったわけです。

$\boxed{5}$ ［2003 東北大］

(1) $0<a_n<2$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき $a_1=c$ $(0<c<2)$ より成立する。

(ii) $n=k$ のとき $0<a_k<2$ が成立すると仮定する。

ここで，$f(a_k)=4a_k-{a_k}^2=-(a_k-2)^2+4$ で，$0<a_k<2$ より，$0<f(a_k)<4$ すなわち $0<\sqrt{f(a_k)}<2$ となる。よって，$0<a_{k+1}<2$ が成立する。

(i)(ii)より，$0<a_n<2$ が成立する。

また，$a_{n+1}-a_n=\sqrt{4a_n-{a_n}^2}-a_n=\dfrac{4a_n-{a_n}^2-{a_n}^2}{\sqrt{4a_n-{a_n}^2}+a_n}=\dfrac{2a_n(2-a_n)}{\sqrt{4a_n-{a_n}^2}+a_n}>0$

よって，$a_n<a_{n+1}$ が成立する。

(2) まず，$2-a_{n+1}=2-\sqrt{4a_n-{a_n}^2}=\dfrac{4-(4a_n-{a_n}^2)}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}=\dfrac{2-a_n}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}(2-a_n)$

ここで，$c=a_1\leqq a_n$ より $0<2-a_n\leqq 2-c$，また $2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}>2$ なので，

$$0<\frac{2-a_n}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}<\frac{2-c}{2}$$

よって，$2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ となる。

(3) (2)より，$0<2-a_n\leqq(2-a_1)\left(\dfrac{2-c}{2}\right)^{n-1}$ （等号は $n=1$ のとき成立）

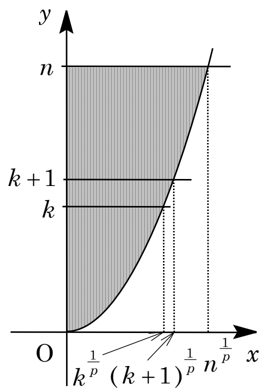
$0<\dfrac{2-c}{2}<1$ より，$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{2-c}{2}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$2-a_n\to 0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=2$

［解 説］

毎年，出題を見かける有名問題です。誘導も詳しいので，解の道筋は明快です。

$\boxed{6}$ ［2003 九州大］



(1) まず，二項定理より，$0 \leqq k \leqq n-1$, p を自然数として，

$$(k^{\frac{1}{p}}+1)^p \geqq k+1,\ \ k^{\frac{1}{p}}+1 \geqq (k+1)^{\frac{1}{p}}$$

$$(k+1)^{\frac{1}{p}} - k^{\frac{1}{p}} \leqq 1$$

なお，等号は $p=1$ または $k=0$ のときに成立する。

これより，$k \leqq y \leqq k+1$ において，$y=x^p$ のグラフと交わる単位正方形は，ただ 1 つとなる。したがって，$0 \leqq x \leqq n^{\frac{1}{p}}$ すなわち $0 \leqq y \leqq n$ のとき，$y=x^p$ と交わる単位正方形の個数は n である。

(2) $k \leqq y \leqq k+1$ において，$y=x^p$ のグラフと y 軸にはさまれた部分の面積を $S_{n,k}$，この部分にあり，$y=x^p$ と交わらない単位正方形の個数を $M_{n,k}$ とすると，

$$1\times M_{n,k} < S_{n,k} < 1\times(M_{n,k}+1),\ \ \sum_{k=0}^{n-1} M_{n,k} < \sum_{k=0}^{n-1} S_{n,k} < \sum_{k=0}^{n-1}(M_{n,k}+1)$$

条件より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} S_{n,k} = S_n$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} M_{n,k} = M_n$ なので，$M_n < S_n < M_n + n$ である。

また，$S_n = n^{\frac{1}{p}}\cdot n - \displaystyle\int_0^{n^{\frac{1}{p}}} x^p dx = n^{\frac{1}{p}+1} - \frac{1}{p+1}\Big[x^{p+1}\Big]_0^{n^{\frac{1}{p}}} = n^{\frac{1}{p}+1} - \frac{1}{p+1} n^{\frac{1}{p}+1}$

$$= \left(1-\frac{1}{p+1}\right) n^{\frac{p+1}{p}} = \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}}$$

(3) $y=k$ 上の格子点の個数は $M_{n,k}+1$，$y=n$ 上の格子点の個数は $[\,n^{\frac{1}{p}}\,]+1$ より，

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1}(M_{n,k}+1) + [\,n^{\frac{1}{p}}\,]+1 = M_n + n + [\,n^{\frac{1}{p}}\,]+1$$

(2)より，$S_n - n < M_n < S_n$ なので，$S_n + [\,n^{\frac{1}{p}}\,]+1 < L_n < S_n + [\,n^{\frac{1}{p}}\,]+n+1$

さらに，$n^{\frac{1}{p}}-1 < [\,n^{\frac{1}{p}}\,] \leqq n^{\frac{1}{p}}$ より，$S_n + n^{\frac{1}{p}} < L_n < S_n + n^{\frac{1}{p}} + n + 1$

$$\frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} < L_n < \frac{p}{p+1} n^{\frac{p+1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} + n + 1$$

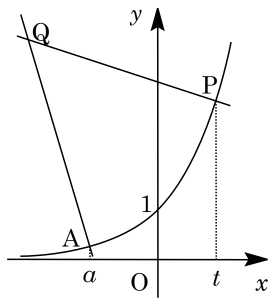
$$\frac{p}{p+1} + n^{-1} < n^{-\frac{p+1}{p}} L_n < \frac{p}{p+1} + n^{-1} + n^{-\frac{1}{p}} + n^{-\frac{p+1}{p}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n = \frac{p}{p+1}$ である。

［解 説］

S_n，M_n，L_n の 3 者がうまく連関するように誘導がつけられています。

7 ［2005 筑波大］



(1) $C: y=e^x$ より，$y'=e^x$

$\mathrm{A}(a,\ e^a)$ における法線の方程式は，

$$y-e^a=-\frac{1}{e^a}(x-a)\cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における法線の方程式は，

$$y-e^t=-\frac{1}{e^t}(x-t)\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$y-e^a+e^a-e^t=-\dfrac{1}{e^t}(x-a+a-t)$

①を代入すると，$-\dfrac{1}{e^a}(x-a)+\dfrac{1}{e^t}(x-a)=e^t-e^a+\dfrac{1}{e^t}(t-a)$

$$x-a=-e^ae^t-e^a\frac{t-a}{e^t-e^a}$$

さて，条件より，$L_a(t)=\sqrt{(x-a)^2+(y-e^a)^2}=\sqrt{(x-a)^2+\dfrac{1}{e^{2a}}(x-a)^2}$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\,|x-a|$$

ここで，$\displaystyle\lim_{t\to a}|x-a|=\lim_{t\to a}\left(e^ae^t+e^a\frac{t-a}{e^t-e^a}\right)=(e^a)^2+e^a\cdot\frac{1}{e^a}=e^{2a}+1$ から，

$$r(a)=\lim_{t\to a}L_a(t)=\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}(e^{2a}+1)=\frac{\sqrt{(e^{2a}+1)^3}}{e^a}$$

(2) $e^{2a}=s>0$，$f(s)=\dfrac{(s+1)^3}{s}$ とおくと，(1)より，$r(a)=\sqrt{f(s)}$ となる。

$$f'(s)=\frac{3(s+1)^2s-(s+1)^3}{s^2}$$

$$=\frac{(s+1)^2(2s-1)}{s^2}$$

s	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$		$\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$

右表より，$f(s)$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとるので，

$r(a)$ の最小値は $\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ である。

［解 説］

計算量が多いので，少し工夫をしています。なお，$\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{t-a}{e^t-e^a}$ は，微分係数の定義を利用して，極限値を求めています。

８ ［2006 東京大］

(1) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ より，帰納的に $a_n>0$ である。

さて，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(1+a_n)^2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+2+a_n$ ……(∗)から，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+2+\frac{1}{b_n}$$

以下，数学的帰納法を用いて，$n>1$ のとき $b_n>2n$ となることを示す。

(i) $n=2$ のとき

$b_2=b_1+2+\dfrac{1}{b_1}=2+2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}>2\times2$ となり，$n=2$ のとき成立する。

(ii) $n=k$ のとき

$b_k>2k$ と仮定すると，$b_{k+1}=b_k+2+\dfrac{1}{b_k}>b_k+2>2(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n>1$ のとき $b_n>2n$ である。

(2) (1)より，$n\geqq2$ において $b_n=\dfrac{1}{a_n}>2n$ より，$a_n<\dfrac{1}{2n}$ となるので，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

よって，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\dfrac{1}{2}\left(1+\left[\log x\right]_1^n\right)=\dfrac{1}{2}(1+\log n)$ となり，

$$0<\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$

(3) (∗)より，$a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}-2$ なので，

$$\sum_{k=1}^n a_k=\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}-2\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}-2n=\frac{1}{a_{n+1}}-2n-2$$

よって，$\displaystyle\frac{1}{a_{n+1}}=\sum_{k=1}^n a_k+2n+2$ より，$\displaystyle\frac{1}{na_{n+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k+2+\frac{2}{n}$

すると，(2)より，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k+2+\frac{2}{n}\to2$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\frac{1}{2}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot na_{n+1}=\frac{1}{2}$

［解 説］

適切な誘導のついている数列と微積分の総合問題で，演習すべき１題です。