

2023 入試対策  
2次数学ランドマーク

# 微分と積分33題

文系+理系 25か年

1998 - 2022

---

外林 康治 編著

電送数学舎

---

# 微分と積分

## 【問題一覧】

---

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1  $a$  は 0 でない実数とする。関数  $f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \frac{1}{a}\right)$  の極大値と極小値の差が最小となる  $a$  の値を求めよ。 [1998 東京大]

2 (1) 曲線  $y = x^3$  と直線  $y = 3x + a$  が異なる 3 点で交わるような  $a$  の範囲を求めよ。

(2)  $a$  が(1)の範囲を動くとき、3つの交点を  $A, B, C$  とし、点  $(a, 4a)$  を  $D$  とする。3つの線分の長さの積  $DA \cdot DB \cdot DC$  の最大値を求めよ。 [1999 一橋大]

3  $a$  を実数とする。 $x$  の 2 次方程式  $x^2 - ax = 2 \int_0^1 |t^2 - at| dt$  は  $0 \leq x \leq 1$  の範囲にいくつの解をもつか。 [2000 京都大・文]

4  $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$  とおく。曲線  $y = f(x)$  に点  $(0, a)$  から接線がただ一つ引けるとし、しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの  $a$  の値を求めよ。 [2001 大阪大・理]

5  $xy$  平面上の曲線  $C: y = x^3$  上の点  $P$  における接線を、 $P$  を中心にして反時計回りに  $45^\circ$  回転して得られる直線を  $L$  とする。 $C$  と  $L$  が、相異なる 3 点で交わるような  $P$  の範囲を図示せよ。 [2001 京都大・理]

6  $a, b, c$  を実数とする。 $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$  と  $y = c$  のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき  $a^2 > b$  が成立することを示し、さらにこれらの交点の  $x$  座標のすべては开区間  $(-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$  に含まれていることを示せ。 [2002 京都大・理]

7 実数  $t$  に対して、 $u$  の 3 次方程式  $u^3 - 3u + 2t = 0$  の実数解のうちで絶対値が最小のものを  $f(t)$  とする。

(1) 媒介変数  $t$  を用いて、 $x = f(t)$ ,  $y = -2t$  ( $t$  は実数) と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数  $f(t)$  が連続でない  $t$  の値を求め、 $f(t)$  のグラフをかけ。 [2003 千葉大・理]

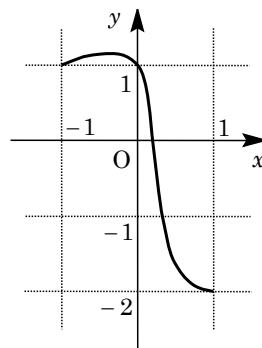
8 放物線  $C: y = -x^2 + 2x + 1$  と  $x$  軸の共有点を  $A(a, 0)$ ,  $B(b, 0)$  とし、 $C$  と直線  $y = mx$  の共有点を  $P(\alpha, m\alpha)$ ,  $Q(\beta, m\beta)$ , 原点を  $O$  とする。ただし、 $a < b$ ,  $m \neq 0$ ,  $\alpha < \beta$  とする。線分  $OP$ ,  $OA$  と  $C$  で囲まれた図形の面積と線分  $OQ$ ,  $OB$  と  $C$  で囲まれた図形の面積が等しいとき  $m$  の値を求めよ。 [2003 大阪大・文]

9 区間  $-1 \leq x \leq 1$  で定義された関数  $f(x)$  が、

$$f(-1) = f(0) = 1, \quad f(1) = -2$$

を満たし、またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき、 $\int_{-1}^1 f(x) dx \geq -1$  を示せ。



[2004 京都大・文]

10 関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  を次で定める。

$$f(x) = x^3 - 3x, \quad g(x) = \{f(x)\}^3 - 3f(x), \quad h(x) = \{g(x)\}^3 - 3g(x)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a$  を実数とする。  $f(x) = a$  を満たす実数  $x$  の個数を求めよ。
- (2)  $g(x) = 0$  を満たす実数  $x$  の個数を求めよ。
- (3)  $h(x) = 0$  を満たす実数  $x$  の個数を求めよ。

[2004 東京大・文]

11  $a$  を正の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $y = |x^2 - a|x||$  のグラフをかけ。
- (2)  $F(a) = \int_{-1}^1 |x^2 - a|x|| dx$  を求めよ。
- (3)  $F(a)$  の最小値を求めよ。

[2005 神戸大・文]

12  $0 \leq k \leq 1$  を満たす実数  $k$  に対して、 $xy$  平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域  $D, E, F$  を考える。

$D$  は連立不等式  $y \geq x^2$ ,  $y \leq kx$  で表される領域

$E$  は連立不等式  $y \leq x^2$ ,  $y \geq kx$  で表される領域

$F$  は連立不等式  $y \leq -x^2 + 2x$ ,  $y \geq kx$  で表される領域

- (1) 領域  $D \cup (E \cap F)$  の面積  $m(k)$  を求めよ。
- (2) (1) で求めた面積  $m(k)$  を最小にする  $k$  の値と、その最小値を求めよ。

[2006 名古屋大・文]

13 (1) 関数  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$  のグラフをかけ。

(2) 方程式  $f(x) = a$  ( $a$  は実数) が相異なる 3 つの実数解  $\alpha < \beta < \gamma$  をもつとする。  
 $l = \gamma - \alpha$  を  $\beta$  のみを用いて表せ。

(3)  $a$  が(2)の条件のもとで変化するとき  $l$  の動く範囲を求めよ。 [2007 名古屋大・理]

**14**  $xy$  平面において、放物線  $y=x^2$  を  $C$  とする。また、実数  $k$  を与えたとき、 $y=x+k$  で定まる直線を  $l$  とする。

- (1)  $-2 < x < 2$  の範囲で  $C$  と  $l$  が 2 点で交わるとき、 $k$  の満たす条件を求めよ。
- (2)  $k$  が(1)の条件を満たすとき、 $C$  と  $l$  および 2 直線  $x=-2$ ,  $x=2$  で囲まれた 3 つの部分の面積の和  $S$  を  $k$  の式で表せ。 [2007 大阪大・文]

**15** 放物線  $C: y=x^2$  上の点  $P$  における法線とは、点  $P$  における  $C$  の接線と点  $P$  で垂直に交わる直線である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点  $(p, p^2)$  における  $C$  の法線の方程式を求めよ。
- (2)  $y$  軸上の点  $(0, a)$  を通る  $C$  の法線の本数を求めよ。 [2008 九州大・文]

**16**  $f(x)=x^3-3x+1$ ,  $g(x)=x^2-2$  とし、方程式  $f(x)=0$  について考える。このとき、以下のことを示せ。

- (1)  $f(x)=0$  は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。
- (2)  $\alpha$  が  $f(x)=0$  の解ならば、 $g(\alpha)$  も  $f(x)=0$  の解となる。
- (3)  $f(x)=0$  の解を小さい順に  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  とすれば、

$$g(\alpha_1)=\alpha_3, g(\alpha_2)=\alpha_1, g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。 [2009 神戸大・理]

**17**  $k$  は定数で、 $k > 0$  とする。曲線  $C: y=kx^2 (x \geq 0)$  と 2 つの直線  $l: y=kx + \frac{1}{k}$ ,  $m: y=-kx + \frac{1}{k}$  との交点の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta (0 < \beta < \alpha)$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha - \beta$  の値を求めよ。
- (2)  $\alpha\beta, \alpha^2 + \beta^2$  および  $\alpha^3 - \beta^3$  を  $k$  を用いて表せ。
- (3) 曲線  $C$  と 2 直線  $l, m$  とで囲まれた部分の面積を最小にする  $k$  の値を求めよ。また、そのときの面積を求めよ。 [2010 広島大・文]

**18** 3 辺の長さが  $a$  と  $b$  と  $c$  の直方体を、長さが  $b$  の 1 辺を回転軸として  $90^\circ$  回転させるとき、直方体が通過する点全体がつくる立体を  $V$  とする。

- (1)  $V$  の体積を  $a, b, c$  を用いて表せ。
- (2)  $a+b+c=1$  のとき、 $V$  の体積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2010 東京大・理]

**19**  $xyz$  空間で、原点  $O$  を中心とする半径  $\sqrt{6}$  の球面  $S$  と 3 点  $(4, 0, 0)$ ,  $(0, 4, 0)$ ,  $(0, 0, 4)$  を通る平面  $\alpha$  が共有点をもつことを示し、点  $(x, y, z)$  がその共有点全体の集合を動くとき、積  $xyz$  が取り得る値の範囲を求めよ。 [2011 京大・理]

**20** 関数  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$  を考える。曲線  $C: y = f(x)$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $t \geq 0$  のとき、曲線  $C$  は傾きが  $t$  である接線を 2 本もつことを示せ。
- (2) (1)において、傾きが  $t$  である 2 本の接線と曲線  $C$  との接点を、それぞれ  $P(p, f(p))$ ,  $Q(q, f(q))$  とする (ただし  $p < q$ )。このとき、点  $P$  と点  $Q$  は点  $A(-1, 0)$  に関して対称の位置にあることを示せ。
- (3)  $t \geq 0$  のとき、2 点  $P, Q$  の距離の最小値を求めよ。また、最小値を与えるときの  $P, Q$  の  $x$  座標  $p, q$  もそれぞれ求めよ。 [2012 九州大・文]

**21**  $a$  を正の定数とし、 $xy$  平面上の曲線  $C$  の方程式を  $y = x^3 - a^2x$  とする。

- (1)  $C$  上の点  $A(t, t^3 - a^2t)$  における  $C$  の接線を  $l$  とする。 $l$  と  $C$  で囲まれた図形の面積  $S(t)$  を求めよ。ただし、 $t$  は 0 でないとする。
- (2)  $b$  を実数とする。 $C$  の接線のうち  $xy$  平面上の点  $B(2a, b)$  を通るものの本数を求めよ。
- (3)  $C$  の接線のうち点  $B(2a, b)$  を通るものが 2 本の場合を考え、それらの接線を  $l_1, l_2$  とする。ただし、 $l_1$  と  $l_2$  はどちらも原点  $(0, 0)$  を通らないとする。 $l_1$  と  $C$  で囲まれた図形の面積を  $S_1$  とし、 $l_2$  と  $C$  で囲まれた図形の面積を  $S_2$  とする。 $S_1 \geq S_2$  として、 $\frac{S_1}{S_2}$  の値を求めよ。 [2012 名古屋大・理]

**22**  $c$  を  $0 < c < 1$  を満たす実数とする。 $f(x)$  を 2 次以下の多項式とし、曲線  $y = f(x)$  が 3 点  $(0, 0)$ ,  $(c, c^3 - 2c)$ ,  $(1, -1)$  を通るとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $f(x)$  を求めよ。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  と曲線  $y = x^3 - 2x$  で囲まれた部分の面積  $S$  を  $c$  を用いて表せ。
- (3) (2)で求めた  $S$  を最小にするような  $c$  の値を求めよ。 [2013 神戸大・理]

**23** 原点を  $O$  とする  $xy$  平面上に、放物線  $C: y=1-x^2$  がある。  $C$  上に 2 点  $P(p, 1-p^2)$ ,  $Q(q, 1-q^2)$  を  $p < q$  となるようにとる。

(1) 2 つの線分  $OP$ ,  $OQ$  と放物線  $C$  で囲まれた部分の面積  $S$  を、  $p$  と  $q$  の式で表せ。

(2)  $q = p+1$  であるとき  $S$  の最小値を求めよ。

(3)  $pq = -1$  であるとき  $S$  の最小値を求めよ。 [2013 一橋大]

**24**  $a > 0$  を実数とする。関数  $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$  の  $0 \leq t \leq 1$  における最大値を  $M(a)$  とする。

(1)  $M(a)$  を求めよ。

(2) 実数  $x > 0$  に対し、  $g(x) = M(x)^2$  とおく。  $xy$  平面において、関数  $y = g(x)$  のグラフに点  $(s, g(s))$  で接する直線が原点を通るとき、実数  $s > 0$  とその接線の傾きを求めよ。

(3)  $a$  が正の実数全体を動くとき、  $k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$  の最小値を求めよ。 [2015 東北大・文]

**25** 実数  $a, b$  に対し、  $f(x) = x^3 - 3ax + b$  とおく。  $-1 \leq x \leq 1$  における  $|f(x)|$  の最大値を  $M$  とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)  $a > 0$  のとき、  $f(x)$  の極値を  $a, b$  を用いて表せ。

(2)  $b \geq 0$  のとき、  $M$  を  $a, b$  を用いて表せ。

(3)  $a, b$  が実数全体を動くとき、  $M$  のとりうる値の範囲を求めよ。

[2015 東京医歯大・医]

**26** 座標平面において、  $x$  軸上に 3 点  $(0, 0)$ ,  $(\alpha, 0)$ ,  $(\beta, 0)$  ( $0 < \alpha < \beta$ ) があり、曲線  $C: y = x^3 + ax^2 + bx$  が  $x$  軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし、  $a, b$  は実数である。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を  $S$  とする。  $S$  を  $\alpha$  と  $\beta$  の式で表せ。

(2)  $\beta$  の値を固定して、  $0 < \alpha < \beta$  の範囲で  $\alpha$  を動かすとき、  $S$  を最小とする  $\alpha$  を  $\beta$  の式で表せ。 [2016 九州大・文]

**27**  $a, b, c$  を実数とし、 $\beta, m$  をそれぞれ  $0 < \beta < 1, m > 0$  を満たす実数とする。また、関数  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  は  $x = \beta, -\beta$  で極値をとり、 $f(-1) = f(\beta) = -m, f(1) = f(-\beta) = m$  を満たすとする。

- (1)  $a, b, c$  および  $\beta, m$  の値を求めよ。
- (2) 関数  $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$  は、 $-1 \leq x \leq 1$  に対して  $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$  を満たすとする。 $h(x) = f(x) - g(x)$  とおくとき、 $h(-1), h(-\beta), h(\beta), h(1)$  それぞれと  $0$  との大きさを比較することにより、 $h(x)$  を求めよ。 [2017 筑波大・理]

**28**  $a > 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(t) = t^3 - 2at + 1$  の区間  $t \geq 0$  における最小値を、 $a$  を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた最小値が  $0$  となるときの  $a$  の値を  $A$  とおく。 $A^3$  を求めよ。
- (3) 座標平面上の曲線  $y = x^4$  を  $C_1$ 、点  $(0, a)$  を中心とする半径  $a$  の円を  $C_2$  とする。 $C_1$  と  $C_2$  の共有点の個数を調べよ。
- (4) 座標平面において、点  $P$  が曲線  $y = x^4$  上を動くときの点  $P$  と点  $(0, a)$  の距離の最小値を考える。その最小値が  $a$  に等しくなるような  $a$  の値の範囲を求めよ。

[2017 広島大・理]

**29**  $a$  を正の定数とする。2次関数  $f(x) = ax^2$  と 3次関数  $g(x) = x(x-4)^2$  について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数  $y = g(x)$  について、極値を求め、そのグラフを描け。
- (2) 2つの曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  は相異なる 3 点で交わることを示せ。
- (3) 2つの曲線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように  $a$  の値を定めよ。またそのとき、2つの曲線の交点の  $x$  座標を求めよ。

[2017 名古屋大・文]

**30** 実数  $a, b, c$  に対し、関数  $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$  を考える。1次関数  $g(x)$  があり、 $f(x)$  とその導関数  $f'(x)$  は、すべての  $x$  に対し等式  $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$  を満たしているとする。

- (1)  $b$  と  $c$  を  $a$  で表せ。
- (2) 3次方程式  $f(x) = 0$  が異なる 3 個の実数解をもつように、 $a$  の値の範囲を定めよ。

[2019 北海道大・文]



**31**  $s$  を実数とする。等式

$$f(x) = |x^2 - x| - s - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x \{f(t) - |t|\} dt$$

を満たす関数  $f(x)$  が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 関数  $f(x)$  を求めよ。
- (2)  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸が異なる 3 点で交わる  $s$  の値の範囲を求めよ。
- (3)  $s$  が(2)で求めた範囲にあるとする。  $y = f(x)$  のグラフと  $x$  軸で囲まれる部分の面積  $A(s)$  を求めよ。
- (4) (3)における  $A(s)$  の最小値を与える  $s$  を求めよ。 [2020 岡山大・文]

**32**  $a$  を正の実数とする。座標平面上の曲線  $C$  を  $y = ax^3 - 2x$  で定める。原点を中心とする半径 1 の円と  $C$  の共有点の個数が 6 個であるような  $a$  の範囲を求めよ。

[2021 東京大・文]

**33** 座標平面上の曲線  $y = x^3 + x^2$  を  $C$  とする。また、 $a$  を実数とし、 $L_a$  を点  $(-1, 0)$  を通る傾き  $a$  の直線とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $C$  と  $L_a$  がちょうど 2 つの共有点をもつような  $a$  の値をすべて求めよ。
- (2)  $a$  が(1)の条件を満たすそれぞれの場合について、 $C$  と  $L_a$  で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3)  $C$  と  $L_a$  がちょうど 3 つの共有点を持ち、さらに  $C$  と  $L_a$  で囲まれた 2 つの部分の面積の差の絶対値が  $\frac{3}{2}$  となるとき、 $a$  の値を求めよ。 [2022 広島大・理]

---

# 微分と積分

## 【解答例と解説】

---

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 東京大]

$$f(x) = (3x^2 - 4)\left(x - a + \frac{1}{a}\right) \text{ より,}$$

$$f'(x) = 6x\left(x - a + \frac{1}{a}\right) + (3x^2 - 4) = 9x^2 - 6\left(a - \frac{1}{a}\right)x - 4$$

$f'(0) = -4 < 0$  から,  $f'(x) = 0$  は 2 つの実数解をもち, これを  $x = \alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とおくと,

$$\alpha = \frac{a - \frac{1}{a} - \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4}}{3}, \quad \beta = \frac{a - \frac{1}{a} + \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4}}{3}$$

極大値と極小値の差を  $g(a)$  とすると,

$$g(a) = f(\alpha) - f(\beta)$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} 9(x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= 9 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (\alpha - \beta)^3 = \frac{3}{2} (\beta - \alpha)^3$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4} \right\}^3 = \frac{4}{9} \left\{ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 4 \right\}^{\frac{3}{2}}$$

$g(a)$  は  $a - \frac{1}{a} = 0$ , すなわち  $a = \pm 1$  のとき最小になる。

$x$	...	$\alpha$	...	$\beta$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

### [解 説]

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題で, 特殊な解法があります。ただし本問では,  $f'(x) = 0$  の解が  $x = \frac{2}{3}a, -\frac{2}{3a}$  となりますので,  $a$  の正負で場合分けをして, 直接  $g(a)$  を求めても, 計算量がやや増える程度ですみます。

2

[1999 一橋大]

(1)  $y = x^3 \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $y = 3x + a \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より,  $x^3 - 3x = a \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ が異なる3点で交わる条件は, 曲線  $y = x^3 - 3x$  と直線  $y = a$  が異なる3点  
で交わる条件と同値である。

ここで,  $f(x) = x^3 - 3x$  とおくと,  
 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$x$	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

右表より, 求める条件は  $-2 < a < 2$

(2)  $\textcircled{3}$ の解を  $x = \alpha, \beta, \gamma$  ( $\alpha < \beta < \gamma$ ) とし,  $A(\alpha, 3\alpha + a)$ ,  
 $B(\beta, 3\beta + a)$ ,  $C(\gamma, 3\gamma + a)$  とおく。

このとき,  $\textcircled{3}$ を  $x^3 - 3x - a = 0$  と変形すると,

$x^3 - 3x - a = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots \cdots \textcircled{4}$

このとき,  $DA = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (3\alpha + a - 4a)^2}$   
 $= \sqrt{10(\alpha - a)^2} = \sqrt{10}|\alpha - a|$

同様にして,  $DB = \sqrt{10}|\beta - a|$ ,  $DC = \sqrt{10}|\gamma - a|$

$DA \cdot DB \cdot DC = 10\sqrt{10}|\alpha - a||\beta - a||\gamma - a|$   
 $= 10\sqrt{10}|(a - \alpha)(a - \beta)(a - \gamma)|$   
 $= 10\sqrt{10}|a^3 - 3a - a|$  ( $\textcircled{4}$ より)  
 $= 10\sqrt{10}|a^3 - 4a|$

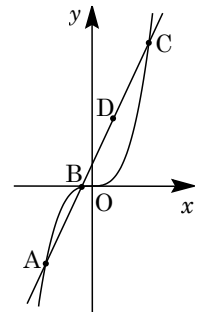
ここで,  $g(a) = a^3 - 4a$  とおくと,  $g'(a) = 3a^2 - 4 = (\sqrt{3}a + 2)(\sqrt{3}a - 2)$

右表より,  $|g(a)|$  は  
 $a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$  のとき最大値

$\frac{16}{9}\sqrt{3}$  をとる。

よって,  $DA \cdot DB \cdot DC$

の最大値は  $10\sqrt{10} \cdot \frac{16}{9}\sqrt{3} = \frac{160}{9}\sqrt{30}$  となる。



$a$	-2	...	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	...	2
$g'(a)$		+	0	-	0	+	
$g(a)$	0	↗	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	↘	$-\frac{16}{9}\sqrt{3}$	↗	0

[解説]

微分法の実用に関する問題です。本問のポイントは、強いて言えば、(2)で $\textcircled{4}$ 式に注目することです。

3

[2000 京都大・文]

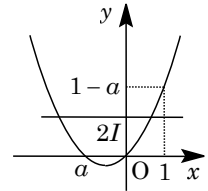
$I = \int_0^1 |t^2 - at| dt$  とおくと、 $x^2 - ax = 2I$  の解の個数は、 $y = x^2 - ax$  と  $y = 2I$  のグラフの共有点の個数と一致する。

(i)  $a < 0$  のとき

$$I = \int_0^1 (t^2 - at) dt = \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$$

$$2I - (1 - a) = \frac{2}{3} - a - 1 + a = -\frac{1}{3} < 0$$

よって、 $0 < 2I < 1 - a$  となるので、右図より、 $0 \leq x \leq 1$  の範囲に解は 1 個である。



(ii)  $0 \leq a \leq 1$  のとき

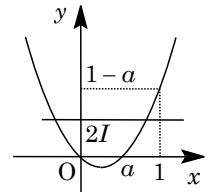
$$I = \int_0^a -(t^2 - at) dt + \int_a^1 (t^2 - at) dt = -\left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 \right]_0^a + \left[ \frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2 \right]_a^1$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

$$2I - (1 - a) = \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3} - 1 + a = \frac{1}{3}(2a^3 - 1)$$

(ii-i)  $2I \leq 1 - a$  ( $0 \leq a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ) のとき

$0 < 2I \leq 1 - a$  となるので、右図より、 $0 \leq x \leq 1$  の範囲に解は 1 個である。



(ii-ii)  $2I > 1 - a$  ( $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a \leq 1$ ) のとき

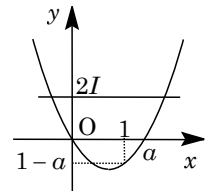
$0 < 1 - a < 2I$  となるので、 $0 \leq x \leq 1$  の範囲に解はない。

(iii)  $1 < a$  のとき

$0 < 2I$  となるので、右図より、 $0 \leq x \leq 1$  の範囲に解はない。

(i)~(iii)より、求める解の個数は、

$$a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ のとき } 1 \text{ 個, } \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$



### [解説]

当然ですが、 $I > 0$  です。これが場合分けを少なくし、議論をスッキリさせるポイントです。

4

[2001 大阪大・理]

$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$  より,  $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$

接点を  $(t, t^4 + t^3 - 3t^2)$  とおくと, 接線の方程式は,

$$y - (t^4 + t^3 - 3t^2) = (4t^3 + 3t^2 - 6t)(x - t)$$

$$y = (4t^3 + 3t^2 - 6t)x - 3t^4 - 2t^3 + 3t^2 \dots\dots\dots ①$$

①が点  $(0, a)$  を通るので,

$$a = -3t^4 - 2t^3 + 3t^2 \dots\dots\dots ②$$

ここで,  $g(t) = -3t^4 - 2t^3 + 3t^2$  とおくと,

$$g'(t) = -12t^3 - 6t^2 + 6t$$

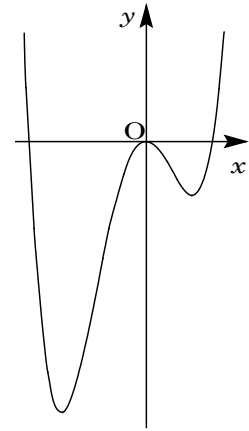
$$= -6t(2t - 1)(t + 1)$$

点  $(0, a)$  を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は,

②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

すると, 右表において  $2 > \frac{5}{16}$

なので,  $a = 2$  のときである。



$t$	...	-1	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(t)$	↗	2	↘	0	↗	$\frac{5}{16}$	↘

**[解 説]**

問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは, 4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。

5

[2001 京都大・理]

$C: y = x^3$  より  $y' = 3x^2$  となるので、点  $P(t, t^3)$  における接線の傾きは  $3t^2$  となる。この接線と  $x$  軸の正の向きとのなす角を  $\theta$  とすると、 $\tan \theta = 3t^2$  である。

また、この接線を  $P$  のまわりに  $45^\circ$  回転して得られる直線  $L$  と、 $x$  軸の正の向きとのなす角を  $\varphi$  とすると、

$$\tan \varphi = \tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan \theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \theta \tan 45^\circ} = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}$$

よって、 $t \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき、直線  $L: y - t^3 = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}(x - t)$

なお、 $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  のときは、直線  $L$  は  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  となり、条件を満たさない。

すると、 $C$  と  $L$  の共有点は、 $x^3 = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}(x - t) + t^3$  より、

$$x^3 - t^3 - \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}(x - t) = 0, \quad (x - t)\left(x^2 + tx + t^2 + \frac{3t^2 + 1}{3t^2 - 1}\right) = 0$$

よって、 $x = t$  または  $x^2 + tx + t^2 + \frac{3t^2 + 1}{3t^2 - 1} = 0 \dots\dots\dots ①$

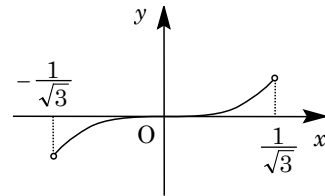
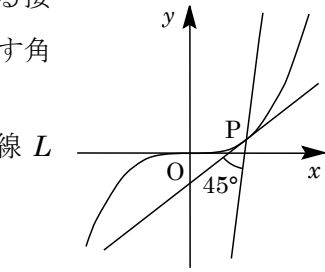
求める条件は、①が  $x \neq t$  の異なる 2 実数解をもつことより、

$$t^2 + t^2 + t^2 + \frac{3t^2 + 1}{3t^2 - 1} \neq 0 \dots\dots\dots ②, \quad D = t^2 - 4\left(t^2 + \frac{3t^2 + 1}{3t^2 - 1}\right) > 0 \dots\dots\dots ③$$

②は  $\frac{9t^4 + 1}{3t^2 - 1} \neq 0$  となるので、つねに成立する。

③より、 $\frac{9t^4 + 9t^2 + 4}{3t^2 - 1} < 0, \quad 3t^2 - 1 < 0$

よって、 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$  より、点  $P$  の範囲を図示すると



右図のようになる。

**[解 説]**

方針に迷いが生ずることはなく、どんどん計算を進めていくことができます。

6

[2002 京都大・理]

$y = x^3 + 3ax^2 + 3bx \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、 $y' = 3x^2 + 6ax + 3b = 3(x^2 + 2ax + b)$

$y' = 0$ の判別式 $D/4 = a^2 - b$ より、 $a^2 > b$ のときは  
 $y' = 0$ は2つの異なる実数解 $x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$ をもち、これを $x = \alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )とすると、 $\textcircled{1}$ のグラフ増減は右表のようになる。

$x$	...	$\alpha$	...	$\beta$	...
$y'$	+	0	-	0	+
$y$		↗		↘	

これより、ある $c$ に対して、 $\textcircled{1}$ と $y = c$ のグラフは相異なる3つの交点をもつ。

また、 $a^2 \leq b$ のときは $y' \geq 0$ となり、 $\textcircled{1}$ は単調増加関数になる。これより、どんな $c$ をとっても、 $\textcircled{1}$ と $y = c$ のグラフは1個の共有点しかもたない。

以上より、 $\textcircled{1}$ と $y = c$ のグラフが相異なる3つの交点をもつ条件は、 $a^2 > b$ である。

さて、 $a^2 > b$ のとき、 $\textcircled{1}$ と $y = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha \cdots \cdots \textcircled{2}$ のグラフの共有点は、

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha$$

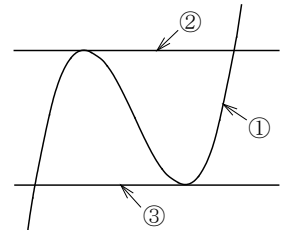
$$(x - \alpha)^2(x + 2\alpha + 3a) = 0$$

$$x = \alpha, x = -2\alpha + 3a$$

同様にして、 $\textcircled{1}$ と $y = \beta^3 + 3a\beta^2 + 3b\beta \cdots \cdots \textcircled{3}$ のグラフの共有点は、

$$x = \beta, x = -2\beta + 3a$$

右図より、 $\textcircled{1}$ と $y = c$ のグラフが相異なる3つの交点をもつとき、これらの交点の $x$ 座標のすべては、开区間 $(-2\beta + 3a, -2\alpha + 3a) = (-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$ に含まれている。



### [解説]

3次関数のグラフについての文系風の基本問題です。