２０２３ 入試対策

２次数学ランドマーク

複素数29題

理系 25か年

１９９８ － ２０２２

外林 康治　編著

電送数学舎

複 素 数

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 複素平面上で $z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0°<\theta<90°)$，$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$，$z_2=-\dfrac{1}{z_0}$ を表す点をそれぞれ P_0，P_1，P_2 とする。

(1) z_1 を極形式で表せ。

(2) z_2 を極形式で表せ。

(3) 原点O，P_0，P_1，P_2 の４点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ。

［1998 岡山大］

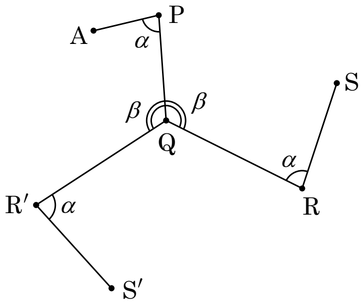
2 平面上において，7 点A，P，Q，R，S，R′，S′を下図のようにとる。ただし，

$AP=a$，$PQ=b$

$QR=QR'=c$，$RS=R'S'=d$

$\angle APQ=\angle SRQ=\angle S'R'Q=\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$

$\angle RQP=\angle PQR'=\beta$ $(0\leqq\beta\leqq\pi)$



である。このとき，$AS^2-AS'^2$ を $\sin\alpha$，$\sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。 ［1998 大阪大］

3 2 つの複素数 α，β が，条件 $\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$，$|\alpha+\beta|=3$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta<360°$ とする。

(2) α の絶対値を求めよ。

(3) 複素数平面上で，α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ の表す 5 つの点を頂点とする五角形の面積を求めよ。

［1999 岡山大］

4 α，β は $|\alpha+\beta|<2$ を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2x^2-(|\alpha|+|\beta|)x+1$$

の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を求めよ。 ［2000 東北大］

5 複素数 $z=\cos 20°+i\sin 20°$ と，それに共役な複素数 $\bar{z}$ に対し，$\alpha=z+\bar{z}$ とする。

(1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。

［2000 九州大］

6　原点をOとする複素数平面上で, 0でない複素数 z, w の表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ とする。z に対して w を，O を始点とする半直線 $\mathrm{OP}(z)$ 上に $\mathrm{Q}(w)$ があり，$|w|=\dfrac{2}{|z|}$ を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$w=\dfrac{2}{\overline{z}}$ を示せ。

(2)　± 2，$\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $\mathrm{P}(z)$ が動く。このとき，$\mathrm{Q}(w)=\mathrm{P}(z)$ となる z を求めよ。

(3)　$\mathrm{P}(z)$ が(2)の正方形の周上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ の描く図形を求めて図示せよ。

［2000　岡山大］

7　複素数平面上の点 z を考える。

(1)　実数 a, c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき，$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ を満たす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2)　0 でない複素数 d に対して，$dz(\overline{z}+1)=\overline{d}\,\overline{z}(z+1)$ を満たす点 z はどのような図形を描くか。

［2001　九州大］

8　複素数平面上の点 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$ を

$$a_1=1,\ \ a_2=i,\ \ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1)　3 点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2)　すべての点 $b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

［2001　東京大］

9　次の問いに答えよ。ただし，偏角 θ は，$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ の範囲で考えるものとする。

(1)　$|z+i|=|z-i|$ を満たす複素数 z は，実数に限ることを示せ。

(2)　複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数 $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ の動く範囲を求めよ。

(3)　z を未知数とする方程式 $(z+i)^9=(z-i)^9$ のすべての解 z について $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ を求めよ。

［2002　名古屋大］

10 aを実数とし, zを複素数とする。複素数平面上で, a, z, z^2, z^3が表す4点が, あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし, a とz^2が表す頂点は対角線上にあるとする。このようなaとzの値をすべて求めよ。 [2003 千葉大]

11 次の問いに答えよ。ただし, iは虚数単位とする。

(1) 複素数 z に対し, $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ とする。z が実軸上を動くとき, 複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。

(2) 複素数 z とその共役複素数$\overline{z}$に対し, $w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$, $w_2=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$ とする。$z\neq\pm i$のとき, 複素数平面上でw_1を表す点をP, w_2を表す点をQとする。P, Qと原点Oが同一直線上にあることを示せ。 [2003 神戸大]

12 Oを原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A, $7+7i$を表す点を B とする。ただし, iは虚数単位である。正の実数tに対し, $\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$を表す点Pをとる。

(1) $\angle$APBを求めよ。

(2) 線分OPの長さが最大になるtを求めよ。 [2003 東京大]

13 複素数α, βは$|\alpha-1|=1$, $|\beta-i|=1$を満たす。

(1) $\alpha+\beta$が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。 [2003 一橋大]

14 複素数平面上に異なる3点z, z^2, z^3がある。

(1) z, z^2, z^3が同一直線上にあるようなzをすべて求めよ。

(2) z, z^2, z^3が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。また, z, z^2, z^3が正三角形の頂点になるようなzをすべて求めよ。

[2004 一橋大]

15 αは絶対値 1 の複素数とし, 複素数 z に対して, $w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし$\overline{\alpha}$はαの共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で, z が原点と点αを通る直線上（ただし, 点$\dfrac{\alpha}{2}$を除く）を動くとき, wの表す点は原点と点$\overline{\alpha}$を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で, z が不等式$|z|>1$を満たすとき, 複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。 [2005 千葉大]

16 t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について, 次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と, そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1)の虚数解のうち, その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき, 複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め, 図示せよ。

(3) 複素数平面上で, 点 z が(2)の図形 C 上を動くとき, $w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め, 図示せよ。 [2005 九州大]

17 α を実数でない複素数とし, β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) 複素数平面上で, 関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき, C は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で, $(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また, その 2 点を P, Q とするとき, 線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P, Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき, β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。 [2015 筑波大]

18 多項式 $P(x)$ を, $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$ により定める。ただし, i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき, 係数 a_0, …, a_7 をすべて求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ に対して, $P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて, 多項式 $Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として, $k=1,\ 2,\ 3$ について, $x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき, $Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し, $x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ。 [2016 東北大]

19 z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(z)$, $\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め, 図示せよ。 [2016 東京大]

20 α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0\cdots\cdots(*)$を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ を仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき，$(*)$を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。

［2017 東北大］

21 w を 0 でない複素数，x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

［2017 京都大］

22 複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

［2017 東京大］

23 複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする△OAB がある。ただし，O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ α，β，z とするとき，$\alpha\beta=z$ が成り立つとする。

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。

［2017 北海道大］

24 α を複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

［2018 九州大］

25 複素数平面上で$|z+i|-|z-i|=1$を満たす点zの全体をHとおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角θの範囲は$0 \leqq \theta < 2\pi$とする。

(1) Hの点zに対して，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) Hの点zに対して$w=\dfrac{1}{z}$とする。wの絶対値r_2と偏角θ_2のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 ［2018 熊本大］

26 複素数αに対して，複素数平面上の 3 点O(0)，A(α)，B(α^2)を考える。次の条件(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)をすべて満たす複素数α全体の集合をSとする。

(Ⅰ) αは実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ) $|\alpha|>1$である。

(Ⅲ) 三角形OABは直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) αがSに属するとき，$\angle \mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$であることを示せ。

(2) 集合Sを複素数平面上に図示せよ。

(3) $x,\ y$を$\alpha^2=x+yi$を満たす実数とする。αがSを動くとき，xy平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求め，図示せよ。 ［2018 筑波大］

27 $|z|^2+3=2(z+\overline{z})$を満たす複素数$z$全体の集合を$A$とする。ただし$\overline{z}$は$z$の共役複素数である。

(1) 集合Aを複素数平面上に図示せよ。

(2) Aの要素zの偏角をθとする。ただし$-\pi<\theta \leqq \pi$とする。zがAを動くとき，θのとりうる値の範囲を求めよ。

(3) z^{60}が正の実数となるAの要素zの個数を求めよ。 ［2019 筑波大］

28 iは虚数単位とする。複素数平面において，複素数zの表す点PをP(z)または点zとかく。$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$とおき，3 点A$(1)$，B$(\omega)$，C$(\omega^2)$を頂点とする△ABCを考える。

(1) △ABCは正三角形であることを示せ。

(2) 点zが辺AC上を動くとき，点$-z$が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点zが辺AB上を動くとき，点z^2が描く図形をE_1とする。また，点zが辺AC上を動くとき，点z^2が描く図形をE_2とする。E_1とE_2の共有点をすべて求めよ。

［2021 筑波大］

$\boxed{29}$　$a,\ b$ を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする。$a,\ b$ が，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。 [2022 東京工大]

複 素 数

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[1998 岡山大]

(1)　$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0=\dfrac{1}{2}\{\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\}\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=\cos(\theta-60^\circ)+i\sin(\theta-60^\circ)$$

(2)　$z_2=-\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{2}\{\cos(180^\circ-\theta)+i\sin(180^\circ-\theta)\}$

(3)　$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\theta-60^\circ<\theta<180^\circ-\theta$

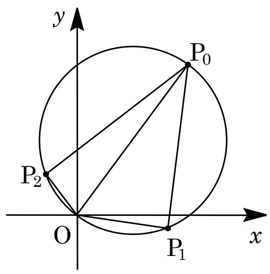
$\angle P_0OP_1=\theta-(\theta-60^\circ)=60^\circ$ で，$OP_0=2$，$OP_1=1$ から，

$\angle OP_1P_0=90^\circ$

よって，OP_0 は円の直径となり，$\angle OP_2P_0=90^\circ$

ここで，$\angle P_0OP_2=(180^\circ-\theta)-\theta=180^\circ-2\theta$ で，$OP_0=2$，

$OP_2=\dfrac{1}{2}$ から，



$$\cos(180^\circ-2\theta)=\frac{OP_2}{OP_0}=\frac{1}{4}$$

よって，$\cos 2\theta=-\dfrac{1}{4}$，$2\cos^2\theta-1=-\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

以上より，$z_0=2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{10}}{4}i\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

［解　説］

(3)では，最初は一般的に 4 点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが，たいへんな計算が待ち構えていました。そこで，これは何か特別な事情があると推測したところ，やはりその通りでした。この発見がポイントです。

$\boxed{2}$ [1998 大阪大]

Q を原点とし, QP を実軸の正の部分とする複素数平面を設定する。

また, $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $w = \cos\beta + i\sin\beta$ とおく。

すると, 点 P を表す複素数は b となり, 点 A を表す複素数は,

$$b + (0 - b)\cdot\frac{a}{b}\{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\} = b - a\bar{z}$$

点 R, R′ を表す複素数は, それぞれ $c\bar{w}$, cw となる。

点 S を表す複素数は,

$$c\bar{w} + (0 - c\bar{w})\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\} = c\bar{w} - d\bar{w}\bar{z} = \bar{w}(c - d\bar{z})$$

点 S′ を表す複素数は,

$$cw + (0 - cw)\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)\} = cw - dw\bar{z} = w(c - d\bar{z})$$

ここで $b - a\bar{z} = u$, $c - d\bar{z} = v$ とおくと, A(u), S$(\bar{w}v)$, S′(wv) となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AS}'^2 &= |\bar{w}v - u|^2 - |wv - u|^2 \\ &= (\bar{w}v - u)(w\bar{v} - \bar{u}) - (wv - u)(\bar{w}\bar{v} - \bar{u}) \\ &= -\bar{w}\bar{u}v - wu\bar{v} + w\bar{u}v + \bar{w}u\bar{v} = (\bar{u}v - u\bar{v})(w - \bar{w})\end{aligned}$$

そこで,
$$\begin{aligned}\bar{u}v - u\bar{v} &= (b - az)(c - d\bar{z}) - (b - a\bar{z})(c - dz) \\ &= -bd\bar{z} - acz + bdz + ac\bar{z} \\ &= (bd - ac)(z - \bar{z}) = (bd - ac)\cdot 2i\sin\alpha\end{aligned}$$

また, $w - \bar{w} = 2i\sin\beta$ より,

$$\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AS}'^2 = (bd - ac)(4i^2)\sin\alpha\sin\beta = 4(ac - bd)\sin\alpha\sin\beta$$

［解 説］

いろいろな方針が考えられますが, 上の解では複素数平面を利用してみました。それさえ決まれば, 計算を簡略化するための置き換えを適当に行っていくと, 結論を導くことはさほど困難ではありません。

3 ［1999 岡山大］

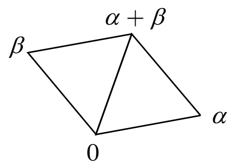
(1) $\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$ で $\alpha\neq 0$ より，$1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm 120^\circ)+i\sin(\pm 120^\circ)$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ は $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より，$\theta=120^\circ$，240°

(2) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$ より，$\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=1$，$|\alpha|=|\beta|$

すると，4 点 0，α，$\alpha+\beta$，β を結ぶ四角形はひし形となり，しかも(1)より，3 点 0，α，$\alpha+\beta$ を結ぶ三角形は正三角形となる。



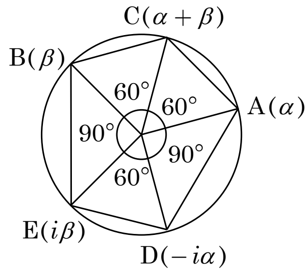
条件より $|\alpha+\beta|=3$ なので，$|\alpha|=|\beta|=3$

(3) 点 $-i\alpha$ は点 α を原点まわりに -90° 回転した点，点 $i\beta$ は点 β を原点まわりに 90° 回転した点である。

(i) $\theta=120^\circ$ のとき

5 点 α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{BOE}=\angle\mathrm{AOD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EOD}=60^\circ$ より，五角形 ACBED の面積は,

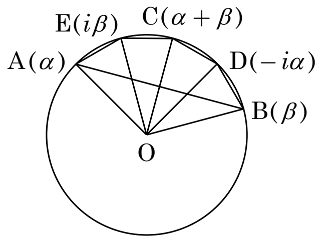
$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 60^\circ\right)\times 3+\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\times 2=9+\frac{27}{4}\sqrt{3}$$



(ii) $\theta=240^\circ$ のとき

5 点 α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{AOE}=\angle\mathrm{COE}=\angle\mathrm{COD}=\angle\mathrm{BOD}=30^\circ$ より，五角形 ABDCE の面積は,

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 30^\circ\right)\times 4-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 120^\circ=9-\frac{9}{4}\sqrt{3}$$



［解 説］

複素数と図形に関する頻出問題です。(3)において，位置関係の異なる 2 つの五角形を考えるのがポイントです。

4 ［2000 東北大］

$|\alpha+\beta|=k\ (0\leqq k<2)$，$|\alpha|+|\beta|=l$ とおくと，$f(x)=\dfrac{1}{4}k^2x^2-lx+1$ となる。

(i) $k=0\ (|\alpha+\beta|=0)$ のとき

$f(x)=-lx+1$ となり, $l\geqq 0$ なので, $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$$f(1)=-l+1=-|\alpha|-|\beta|+1$$

(ii) $0<k<2\ (0<|\alpha+\beta|<2)$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{4}k^2\left(x-\frac{2l}{k^2}\right)^2-\frac{l^2}{k^2}+1$$

ここで，$\dfrac{2l}{k^2}-1=\dfrac{1}{k^2}(2l-k^2)=\dfrac{1}{k^2}\left\{2\left(|\alpha|+|\beta|\right)-|\alpha+\beta|^2\right\}$

さて，複素数 α，β に対して，$|\alpha|+|\beta|\geqq|\alpha+\beta|$ が成り立つので,

$$2\left(|\alpha|+|\beta|\right)-|\alpha+\beta|^2\geqq 2|\alpha+\beta|-|\alpha+\beta|^2=2k-k^2=-(k-1)^2+1$$

$0<k<2$ において，$-(k-1)^2+1>0$ なので，$\dfrac{2l}{k^2}-1>0$，$\dfrac{2l}{k^2}>1$

すると, $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$$f(1)=\frac{1}{4}k^2-l+1=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$$

(i)(ii)より，$f(x)$ の最小値は，$f(1)=\dfrac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$

［解 説］

(ii)の場合をさらに分けて最小値を求めるのでは，条件の $|\alpha+\beta|<2$ の意味が不明です。ここは $|\alpha|+|\beta|$ と $|\alpha+\beta|$ の関係がポイントとなりますが，その両者をつなぐのは，どう考えても三角不等式しかありません。なお，昨年，東大・理で，この不等式を利用する問題が出ています。