

2023 入試対策  
2次数学ランドマーク

# 曲線17題

理系 25か年

1998 — 2022

---

外林 康治 編著

電送数学舎

---

# 曲 線

## 【問題一覧】

---

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 (1) 点  $P(p, q)$  と円  $C : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) との距離  $d$  とは,  $P$  と  $C$  上の点  $(x, y)$  との距離の最小値をいう。  $P$  が  $C$  の外部にある場合と内部にある場合に分けて,  $d$  を表す式を求めよ。

(2) 2 つの円  $C_1 : (x+4)^2 + y^2 = 81$  と  $C_2 : (x-4)^2 + y^2 = 49$  から等距離にある点  $P$  の軌跡の方程式を求めよ。 [1998 東北大]

2 (1) 平面上に半径が  $R, r$  ( $R > r$ ) の 2 円があり, それらの中心間の距離が  $l$  であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を  $R, r, l$  を用いて表せ。

(2) 座標平面上で  $x$  軸を準線とし, 定点  $A(0, a)$  を通る放物線について考える。ただし,  $a > 0$  とする。

① そのような放物線の焦点  $F(s, t)$  の全体はどのような図形を描くか。

②  $x$  軸上にない点  $P(p, q)$  がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。 [1998 九州大]

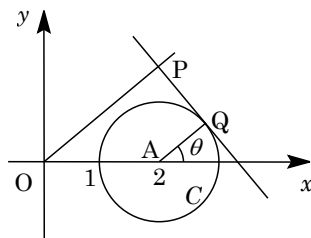
3 平面上に 2 定点  $A, B$  をとる。  $c$  は正の定数として, 平面上の点  $P$  が

$$|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$$

を満たすとき, 点  $P$  の軌跡を求めよ。

[1999 京都大]

4  $xy$  平面上において, 点  $A(2, 0)$  を中心とする半径 1 の円を  $C$  とする。  $C$  上の点  $Q$  における  $C$  の接線に原点  $O(0, 0)$  から下ろした垂線の足を  $P$  とする。図のように  $x$  軸と線分  $AQ$  のなす角を  $\theta$  とする。ただし,  $\theta$  は  $-\pi < \theta \leq \pi$  を動くものとする。

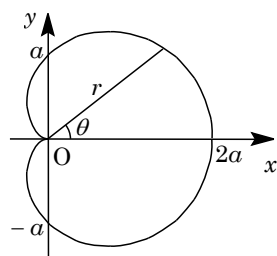


(1) 点  $P(x, y)$  の座標  $(x, y)$  を  $\theta$  を用いて表せ。

(2) 点  $P(x, y)$  の  $x$  座標が最小になるとき,  $P$  の座標  $(x, y)$  を求めよ。

(3) 直線  $x = k$  が点  $P$  の軌跡と相異なる 4 点で交わるとき,  $k$  のとりうる値の範囲を求めよ。 [1999 筑波大]

5  $a > 0$  を定数として、極方程式  $r = a(1 + \cos \theta)$  により表される曲線  $C_a$  を考える。次の問いに答えよ。



(1) 極座標が  $(\frac{a}{2}, 0)$  の点を中心とし半径が  $\frac{a}{2}$  である円  $S$  を、

極方程式で表せ。

(2) 点  $O$  と曲線  $C_a$  上の点  $P \neq O$  とを結ぶ直線が円  $S$  と交わ

る点を  $Q$  とするとき、線分  $PQ$  の長さは一定であることを示せ。

(3) 点  $P$  が曲線  $C_a$  上を動くとき、極座標が  $(2a, 0)$  の点と  $P$  との距離の最大値を求めよ。 [2000 神戸大]

6  $C$  を双曲線  $2x^2 - 2y^2 = 1$  とする。  $l, m$  を点  $(1, 0)$  を通り、  $x$  軸とそれぞれ  $\theta, \theta + \frac{\pi}{4}$  の角をなす 2 直線とする。ここで  $\theta$  は  $\frac{\pi}{4}$  の整数倍でないとする。

(1) 直線  $l$  は双曲線  $C$  と相異なる 2 点  $P, Q$  で交わることを示せ。

(2)  $PQ^2$  を、  $\theta$  を用いて表せ。

(3) 直線  $m$  と曲線  $C$  の交点を  $R, S$  とするとき、  $\frac{1}{PQ^2} + \frac{1}{RS^2}$  は  $\theta$  によらない定数と

なることを示せ。 [2001 筑波大]

7  $C$  を曲線  $a^2x^2 + y^2 = 1$ ,  $l$  を直線  $y = ax + 2a$  とする。ただし、  $a$  は正の定数である。

(1)  $C$  と  $l$  とが異なる 2 点で交わるための  $a$  の範囲を求めよ。

(2)  $C$  上の点  $(x_0, y_0)$  における接線の方程式を求めよ。

(3) (1)における交点を  $P, Q$  とし、点  $P$  における  $C$  の接線と点  $Q$  における  $C$  の接線との交点を  $R(X, Y)$  とする。  $a$  が(1)の範囲を動くとき、  $X, Y$  の関係式と  $Y$  の範囲を求めよ。 [2002 広島大]

8  $\theta$  を  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  である定数とする。座標平面上で、 $a^2 > 4b$  を満たす点  $P(a, b)$  から放物線  $y = \frac{1}{4}x^2$  に引いた 2 つの接線の接点を  $Q, R$  とし、接線  $PQ, PR$  の傾きをそれぞれ  $m_1, m_2$  とおく。点  $P$  は  $\angle QPR = \theta$  を満たしている。点  $P$  の全体が作る図形を  $G$  とする。

- (1)  $m_1 < 0 < m_2$  のとき、 $\tan \theta$  を  $m_1$  と  $m_2$  で表せ。
- (2)  $G$  を数式で表せ。
- (3)  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき  $G$  を図示せよ。

[2003 九州大]

9 楕円  $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  上の点で、 $x \geq 0$  の範囲にあり、定点  $A(0, -1)$  との距離が最大となる点を  $P$  とする。

- (1) 点  $P$  の座標と線分  $AP$  の長さを求めよ。
- (2) 点  $Q$  は楕円  $C$  上を動くとする。 $\triangle APQ$  の面積が最大となるとき、点  $Q$  の座標および  $\triangle APQ$  の面積を求めよ。

[2004 筑波大]

10 実数  $a$  に対して、曲線  $C_a$  を方程式  $(x-a)^2 + ay^2 = a^2 + 3a + 1$  によって定める。

- (1)  $C_a$  は  $a$  の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し、その 4 定点の座標を求めよ。
- (2)  $a$  が正の実数全体を動くとき、 $C_a$  が通過する範囲を図示せよ。

[2005 筑波大]

11 直線  $y = x$  を  $l$  で、直線  $y = -x$  を  $l'$  で表す。直線  $l, l'$  のどちらの上にもない点  $A(a, b)$  をとる。点  $A$  を通る直線  $m$  が 2 直線  $l, l'$  とそれぞれ点  $P, P'$  で交わるとする。点  $Q$  を、 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$  を満たすようにとる。ただし、 $O$  は  $xy$  平面の原点である。直線  $m$  を変化させるとき、点  $Q$  の軌跡は  $l$  と  $l'$  を漸近線とする双曲線となることを示せ。

[2006 大阪大]

12  $d$  を正の定数とする。2 点  $A(-d, 0), B(d, 0)$  からの距離の和が  $4d$  である点  $P$  の軌跡として定まる楕円  $E$  を考える。点  $A, B, O$  から楕円  $E$  上の点  $P$  までの距離をそれぞれ  $AP, BP, OP$  とかく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円  $E$  の長軸と短軸の長さを求めよ。
- (2)  $AP^2 + BP^2$  および  $AP \cdot BP$  を、 $OP$  と  $d$  を用いて表せ。
- (3) 点  $P$  が楕円  $E$  全体を動くとき、 $AP^3 + BP^3$  の最大値と最小値を  $d$  を用いて表せ。

[2011 筑波大]

**13** 2つの双曲線  $C: x^2 - y^2 = 1$ ,  $H: x^2 - y^2 = -1$  を考える。双曲線  $H$  上の点  $P(s, t)$  に対して、方程式  $sx - ty = 1$  で定まる直線を  $l$  とする。

- (1) 直線  $l$  は点  $P$  を通らないことを示せ。
- (2) 直線  $l$  と双曲線  $C$  は異なる2点  $Q, R$  で交わることを示し、 $\triangle PQR$  の重心  $G$  の座標を  $s, t$  を用いて表せ。
- (3) (2)における3点  $G, Q, R$  に対して、 $\triangle GQR$  の面積は点  $P(s, t)$  の位置によらず一定であることを示せ。

[2012 筑波大]

**14** 楕円  $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  の、直線  $y = mx$  と平行な2接線を  $l_1, l_1'$  とし、 $l_1, l_1'$  に直交する  $C$  の2接線を  $l_2, l_2'$  とする。

- (1)  $l_1, l_1'$  の方程式を  $m$  を用いて表せ。
- (2)  $l_1$  と  $l_1'$  の距離  $d_1$  および  $l_2$  と  $l_2'$  の距離  $d_2$  をそれぞれ  $m$  を用いて表せ。ただし、平行な2直線  $l, l'$  の距離とは、 $l$  上の1点と直線  $l'$  の距離である。
- (3)  $(d_1)^2 + (d_2)^2$  は  $m$  によらず一定であることを示せ。
- (4)  $l_1, l_1', l_2, l_2'$  で囲まれる長方形の面積  $S$  を  $d_1$  を用いて表せ。さらに  $m$  が変化するとき、 $S$  の最大値を求めよ。

[2013 筑波大]

**15** 曲線  $C: x^2 + 4y^2 = 4$  上を動く点  $P$  と、 $C$  上の定点  $Q(2, 0)$ ,  $R(0, 1)$  がある。次の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle PQR$  の面積の最大値と、そのときの  $P$  の座標を求めよ。
- (2) (1)で求めた点  $P$  に対して直線  $PQ$  を考える。曲線  $C$  によって囲まれた図形を直線  $PQ$  で2つに分けたとき、直線  $PQ$  の下方にある部分の面積を求めよ。

[2016 金沢大]

**16** 3辺の長さの和が2である三角形  $ABC$  において、辺  $BC$  の長さを  $a$ 、辺  $CA$  の長さを  $b$  で表す。三角形  $ABC$  を辺  $BC$  を軸として1回転させてできる回転体の体積を  $V$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $a$  の値を固定して  $b$  の値を変化させたとき、 $V$  が最大になるのは、三角形  $ABC$  が辺  $BC$  を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。
- (2)  $a, b$  の値をともに変化させるとき、 $V$  の最大値と、最大値を与える  $a, b$  の値をそれぞれ求めよ。

[2020 大阪大]

17 座標平面において、 $O(0, 0)$ ,  $A(4, 0)$ ,  $P(3, 0)$ とする。線分  $OA$  に点  $P$  で接する円  $C$  を内接円とする  $\triangle OAB$  を考える。ただし、円  $C$  の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $OB$  と  $AB$  の差は一定であることを証明せよ。
- (2) 円  $C$  の半径を  $r$  とするとき、 $r$  のとる値の範囲を求めよ。
- (3)  $r$  が(2)の範囲で変化するとき、点  $B$  の軌跡の方程式を求めよ。また、その概形をかけ。

[2021 広島大]

---

# 曲 線

## 【解答例と解説】

---

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。



1

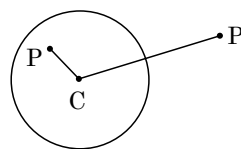
[1998 東北大]

(1) 円  $C$  の中心を  $C(a, b)$  とすると、(i)  $P$  が円  $C$  の外部にあるとき

$$d = PC - r = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} - r$$

(ii)  $P$  が円  $C$  の内部にあるとき

$$d = r - PC = r - \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2}$$

(2)  $C_1$  の中心を  $A(-4, 0)$ ,  $C_2$  の中心を  $B(4, 0)$  とし、 $C_1$  と  $C_2$  の交点を  $Q(2, 3\sqrt{5})$ ,  $R(2, -3\sqrt{5})$  とおく。(i)  $P$  が円  $C_1, C_2$  の外部にあるとき

$$PA - 9 = PB - 7 \text{ より } PA - PB = 2$$

 $P$  は 2 点  $A, B$  を焦点とする双曲線の点  $B$  に近い方の枝である。

$$\text{その方程式を } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 + b^2 = c^2) \text{ とすると, } 2a = 2, \quad c = 4$$

$$a = 1, \quad b = \sqrt{15} \text{ から, } x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$$

(ii)  $P$  が円  $C_1, C_2$  の内部にあるとき

$$9 - PA = 7 - PB \text{ より } PA - PB = 2 \text{ なので, (i) と同じく } x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$$

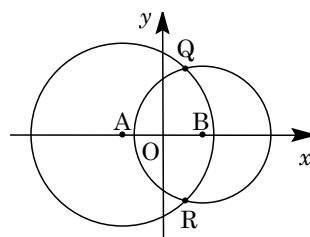
(iii)  $P$  が円  $C_1$  の外部, 円  $C_2$  の内部にあるとき $PA - 9 = 7 - PB$  より  $PA + PB = 16$  で,  $P$  は 2 点  $A, B$  を焦点とする楕円である。

$$\text{その方程式を } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 - b^2 = c^2) \text{ とすると, } 2a = 16, \quad c = 4$$

$$a = 8, \quad b = 4\sqrt{3} \text{ から, } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

(iv)  $P$  が円  $C_1$  の内部, 円  $C_2$  の外部にあるとき

$$9 - PA = PB - 7 \text{ より } PA + PB = 16 \text{ なので, (iii) と同じく } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

以上より,  $P$  の軌跡の方程式は,  $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1 \quad (1 \leq x)$ ,  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ 

## [解 説]

今年、頻出の 2 次曲線の定義を利用する問題の 1 つです。おもしろい設定ですので、丁寧に書いてみました。なお、2 交点  $Q, R$  に点  $P$  が一致したときも条件をみやすのは明らかですので、軌跡は曲線全体になります。

2

[1998 九州大]

(1) 2円が共有点をもつ条件は、中心間距離が半径の差以上、半径の和以下より、

$$R - r \leq l \leq R + r$$

(2) 放物線は、準線が  $x$  軸で  $y$  軸と正の部分で交わることでより  $x$  軸の上方にあり、焦点  $F(s, t)$  から頂点  $(s, \frac{t}{2})$  で、頂点と焦点の距離が  $\frac{t}{2}$  から、その方程式は、

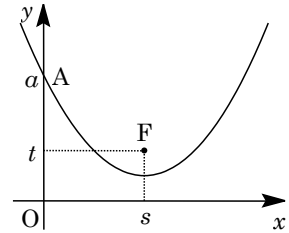
$$(x - s)^2 = 4 \cdot \frac{t}{2} \left( y - \frac{t}{2} \right) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点  $A(0, a)$  を通るので、 $s^2 = 2t \left( a - \frac{t}{2} \right)$

$$s^2 + t^2 - 2at = 0$$

$$s^2 + (t - a)^2 = a^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

よって②から、点  $F$  は中心  $(0, a)$ 、半径  $a$  の円を描く。



ただし、 $t > 0$  より原点を除く。

さて、①が点  $P(p, q)$  ( $q > 0$ ) を通るとき、 $(p - s)^2 = 4 \cdot \frac{t}{2} \left( q - \frac{t}{2} \right)$  から、

$$(s - p)^2 + (t - q)^2 = q^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{は、} s^2 + (t - a)^2 = a^2 \quad (t \neq 0) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ここで、③と④をとともにみたす  $(s, t)$  が存在する  $p, q$  の関係が求める条件なので、

(1)の結果から、

(i)  $p \neq 0$  のとき

$$|q - a| \leq \sqrt{p^2 + (q - a)^2} \leq q + a \text{ より、} (q - a)^2 \leq p^2 + (q - a)^2 \leq (q + a)^2$$

左側の不等式はつねに成立するので、右側の不等式を変形して、

$$p^2 - 4aq \leq 0, \quad q \geq \frac{1}{4a} p^2$$

(ii)  $p = 0$  のとき

③は  $s^2 + (t - q)^2 = q^2$  となり、求める条件は  $q = a$

(i)(ii)より、 $q \geq \frac{1}{4a} p^2$  ( $p \neq 0$ )、 $q = a$  ( $p = 0$ )

### [解説]

(2)の設問は、一見(1)とは無関係と見えるものの、解のネックとなる部分で(1)の結果を利用します。

3

[1999 京都大]

$\triangle ABP$  に余弦定理を適用して、

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} \dots\dots\dots ①$$

なお、①は3点 P, A, B が同一直線上にあるときも成立する。

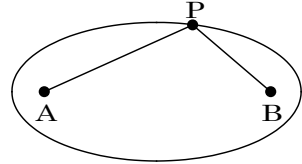
$$\text{条件より、} |\overrightarrow{PA}| \parallel |\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c \dots\dots\dots ②$$

①を②に代入して、

$$|\overrightarrow{PA}| \parallel |\overrightarrow{PB}| + \frac{|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2}{2} = c$$

$$\left( |\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| \right)^2 = 2c + |\overrightarrow{AB}|^2$$

$$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{2c + |\overrightarrow{AB}|^2} \dots\dots\dots ③$$



$\sqrt{2c + |\overrightarrow{AB}|^2}$  は定数なので、③より点 P は2点 A, B を焦点とする楕円を描く。

長軸の長さは  $\sqrt{2c + |\overrightarrow{AB}|^2}$  , 短軸の長さは  $2\sqrt{\frac{1}{4}(2c + |\overrightarrow{AB}|^2) - \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2} = \sqrt{2c}$  と

なる。

### [解 説]

2点 A, B の中点を原点として座標設定しようかと思いましたが、条件式②の形に注目して、ベクトルの大きさと内積を余弦定理で関連づけてみました。すると、楕円の定義式が導けました。