２０２３ 入試対策
２次数学ランドマーク

積分法３３題

理系 25か年

１９９８ － ２０２２

外林 康治　編著

電送数学舎

積 分 法

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 関数 $f(x)=\int_x^{2x+1}\frac{1}{t^2+1}dt$ について次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2) $f'(x)=0$ となる x を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値を求めよ。 [1998 筑波大]

2 (1) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ。

(2) (1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

[1998 東北大]

3 2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!$$

を示せ。ここで e は自然対数の底である。 [1999 東京工大]

4 (1) $a_0<b_0$，$a_1<b_1$ を満たす正の実数 a_0，b_0，a_1，b_1 について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1}>\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}$$

(2) n 個の自然数 x_1，x_2，……，x_n は互いに相異なり，$1\leqq x_k\leqq n$ （$1\leqq k\leqq n$）を満たしているとする。このとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$$

[1999 京都大]

5 次を示せ。

(1) $\log(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin \pi x}{x}\right|dx=\int_0^1 \sin \pi y\, dy=\frac{2}{\pi}$ [2000 金沢大]

6 $a>0, t>0$ に対して定積分 $S(a,\ t)=\int_0^a \left| e^{-x}-\dfrac{1}{t} \right| dx$ を考える。

(1) a を固定したとき, t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2) $\lim_{a\to 0}\dfrac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。　　［2001 東京工大］

7 $f(t)$ を連続関数, x を実数として, 関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x)=\int_0^1 |f(t)-x|\,dt$$

(1) $f(t)=e^t$ のとき, 関数 $g(x)$ の増減を調べ, $y=g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし, $e=2.71828\cdots$ は自然対数の底である。

(2) $f(t)$ は微分可能な単調増加関数で, その逆関数も微分可能とし, $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とおく。このとき, $g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ。　　［2001 岡山大］

8 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$$

［2001 京都大］

9 関数 $f(x)=4\cos^2 x-8\cos x+3$ を考える。n , k を自然数とし

$$g_n(k)=f\left(\frac{\pi}{3n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n\geqq 2$ とする。

(1) n を固定する。$2\leqq k\leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1)\geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。また, k が $1\leqq k\leqq 3n$ の範囲を動くとき, $g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2) (1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{G_n}{n}$ を求めよ。

［2001 大阪大］

10 n を 2 以上の整数とし, $I(x)=\int_0^x \sin t\sin nt\,dt\ (x\geqq 0)$ と定める。

(1) $n=2$ のとき, $I(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $I(x)$ の最大値が $\dfrac{n}{n^2-1}$ であるならば, n は偶数であることを証明せよ。

［2002 千葉大］

11 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x, y に対して，不等式 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a, b は実数で $a<b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a, b は実数で $a<b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。 [2002 九州大]

12 n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 x_0，x_1，$\cdots$，x_n と等比数列 y_0，y_1，$\cdots$，y_n が，$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$，$1=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=2$ を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$ を次で定める。

$$P(n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad Q(n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$R(n)=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},\quad S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$$

このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(n)$ をそれぞれ求めよ。

[2004 東北大]

13 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$，$g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とするとき,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)dx$$

を証明せよ。

(2) 正の整数 m, n が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

を証明せよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ を求めよ。 [2004 東京工大]

14 多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

を満たすとする。

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x| \leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{x_n}^{2} f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。 ［2004 名古屋大］

15 $x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_{8}^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。 ［2006 東京大］

16 以下の問いに答えよ。

(1) $0<x<a$ を満たす実数 x,a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2) (1)を利用して，次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。 ［2007 東京大］

17 次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式 $\dfrac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqq \dfrac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。 ［2008 広島大］

18 $f(x)$ を整式で表される関数とし，$g(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt$ とおく。任意の実数 x について，$x(f(x)-1)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ が成り立つとする。

(1) $xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。

(3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。 [2009 筑波大]

19 関数 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

(3) 条件 $a_1=f(0)$，$a_{n+1}=f(a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 [2010 熊本大]

20 (1) すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2) $m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

[2010 東京大]

21 自然数 n に対し，$S_n=\int_0^1\dfrac{1-(-x)^n}{1+x}dx$，$T_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。 $\left|S_n-\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx\right|\leqq\dfrac{1}{n+1}$

(2) T_n-2S_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。 [2011 東京医歯大]

22 n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1) a_2 および a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_k を求めよ。

(3) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。 [2012 東京工大]

23 微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに $f'(0)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。 [2013 新潟大]

24 $n,\ m$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式 $I_{2n+1,\,2m+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3) 次の式 $\frac{n!m!}{(n+m+1)!}=\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\frac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。 [2014 千葉大]

25 自然数 n に対して，$a_n=\int_0^1 \frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して，不等式 $\left|\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right| \leqq \frac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。 ［2014 新潟大］

26 n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1 \text{ のとき}),\ g(x)=0\ (|x|>1 \text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\frac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1 \text{ のとき}),\ h(x)=0\ (|x|>1 \text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$$

［2015 東京大］

27 $a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\int_{-a}^{a} f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。 ［2016 北海道大］

28 連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t)dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t)dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2) $g(x) = e^{-2x} f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3) $f(x)$ を求めよ。 ［2017 東京医歯大］

29 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^{n} (-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1}$ を示せ。

(2) $\left| \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \right| \leqq \dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right)$ の和を求めよ。 ［2018 新潟大］

30 以下の問いに答えよ。ただし，log は自然対数，e はその底とする。

(1) b を実数とする。関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{x}{x^2+1} e^{-\frac{x^2}{2}}$ は単調に減少することを示せ。

(2) $a \leqq b$ を満たす正の実数 a, b に対し，不等式

$$\frac{a}{a^2+1} e^{-\frac{a^2}{2}} - \frac{b}{b^2+1} e^{-\frac{b^2}{2}} \leqq \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leqq e^{-\frac{a^2}{2}} (b-a)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 数列 $\{I_n\}$ を次のように定める。 $I_n = \displaystyle\int_1^2 e^{-\frac{nt^2}{2}} dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log I_n$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(n+1) = 0$ を用いてもよい。 ［2019 大阪大］

31 xy 平面において，x, y がともに整数であるとき，点 $(x,\ y)$ を格子点とよぶ。2 以上の整数 n に対し，

$$0<x<n\ ,\ 1<2^y<\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

をみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を $P(n)$ で表す。以下の問いに答えよ。

(1) 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)-1\right\}\leqq P(n)<\sum_{k=1}^{n-1}n\log_2\left(1+\frac{k}{n}\right)$ を示せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{n^2}$ を求めよ。

(3) (2)で求めた極限値を L とする。不等式 $L-\dfrac{P(n)}{n^2}>\dfrac{1}{2n}$ を示せ。 ［2020 熊本大］

32 n を自然数とし，t を $t\geqq 1$ を満たす実数とする。

(1) $x\geqq t$ のとき，不等式 $-\dfrac{(x-t)^2}{2}\leqq\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)\leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $-\dfrac{1}{6n^3}\leqq\displaystyle\int_t^{t+\frac{1}{n}}\log x\,dx-\frac{1}{n}\log t-\frac{1}{2tn^2}\leqq 0$ が成り立つことを示せ。

(3) $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-pn)=q$ を満たすような実数 p，q の値を求めよ。 ［2021 大阪大］

33 p は正の実数とする。関数 $f(x)$ は，すべての実数 x について $f(x+p)=f(x)$ を満たし，$0\leqq x\leqq p$ において，$f(x)=\dfrac{p}{2}-\left|x-\dfrac{p}{2}\right|$ であるとする。また，

$$I_k=\int_{p(k-1)}^{pk}e^{-x}f(x)\,dx\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) I_1 を求めよ。

(2) $\dfrac{I_k}{I_1}$ を求めよ。

(3) n は自然数とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{pn}e^{-x}f(x)\,dx$ を求めよ。 ［2022 信州大］

積 分 法

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 筑波大］

(1) $g(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$ とおくと，つねに $g(t)>0$ より，

$2x+1>x\ \ (x>-1)$ のとき，$f(x)>0$

$2x+1<x\ \ (x<-1)$ のとき，$f(x)<0$

よって，$f(x)=0$ となるのは，$2x+1=x$ のときだけである。

すなわち，$x=-1$

(2) $f'(x)=g(2x+1)\cdot(2x+1)'-g(x)=\dfrac{2}{(2x+1)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$

$$=\frac{1}{2x^2+2x+1}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{-x(x+2)}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)}$$

$f'(x)=0$ とすると，$x(x+2)=0$ から $x=0,\ -2$

(3) (1)より，$f(x)$ の最大値は $x>-1$ に存在するので，$x>-1$ における $f(x)$ の値の増減を調べると，右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	

すると，最大値は $f(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$ となり，ここで $t=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

［解 説］

逆三角関数は高校数学の範囲外なので，直接的な積分計算を回避して，設問に答えていきます。この考え方が採用できたかどうかで，本問の出来は決まります。

$\boxed{2}$ ［1998 東北大］

(1) $y=f(x)$を同値変形すると，$x=g(y)$となることより，

$$y=\frac{e^x}{e^x+1}=1-\frac{1}{e^x+1}\text{ から，}(e^x+1)(1-y)=1$$

$$e^x=-1+\frac{1}{1-y}=\frac{y}{1-y},\quad x=\log\frac{y}{1-y}$$

よって，$g(y)=\log\dfrac{y}{1-y}$ となり，$g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$

(2) $x=f(t)$ とおくと $dx=f'(t)dt$，また $x=f(a)$ のとき $t=a$，$x=f(b)$ のとき $t=b$ となる。

さらに，$y=f(x)$の逆関数が$y=g(x)$から，$g\big(f(x)\big)=x$

$$\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx=\int_a^b g\big(f(t)\big)f'(t)dt=\int_a^b tf'(t)dt=\int_a^b xf'(x)dx$$

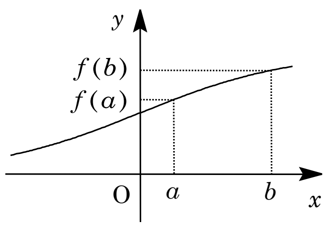
よって，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)}g(x)dx$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b xf'(x)dx$$

$$=\int_a^b\{f(x)+xf'(x)\}dx$$

$$=\int_a^b\big(xf(x)\big)'dx$$

$$=\big[xf(x)\big]_a^b=bf(b)-af(a)$$



［解 説］

(2)の証明は，まず右上の図で考えました。この位置関係では面積を考えると与式の成立は明らかなのですが，これでは証明とは言えません。積分の第 2 項の積分区間を$[a,\ b]$に変更することから，置換の式をみつけました。

3 [1999 東京工大]

$I_n=\int_0^1 t^n e^t dt$ とおくと，部分積分により，

$$I_n=\left[t^n e^t\right]_0^1-n\int_0^1 t^{n-1}e^t dt=e-nI_{n-1}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2k+1)(2k-1)!}=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(2k+1)!}$

$$=(2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

証明すべき式 $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e=(2n-1)!\cdots\cdots(*)$ は，②より，

$$(*)\Leftrightarrow\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!}\right)=1\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\displaystyle\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}=J_n$ とおくと，

$$③\Leftrightarrow J_n=1+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，①から，

$$J_{n+1}=\frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{e-(2n+1)I_{2n}}{(2n+1)!}=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{I_{2n}}{(2n)!}$$
$$=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{e-2nI_{2n-1}}{(2n)!}=\frac{e}{(2n+1)!}-\frac{e}{(2n)!}+\frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}$$
$$=J_n+e\left(\frac{1}{(2n+1)!}-\frac{1}{(2n)!}\right)$$

$n\geqq 2$ で，$\displaystyle J_n=J_1+e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!}-\frac{1}{(2k)!}\right)$

ここで，$\displaystyle J_1=I_1=\int_0^1 te^t dt=\left[te^t\right]_0^1-\int_0^1 e^t dt=e-(e-1)=1$

よって，$n\geqq 2$ で④は成立するので，$(*)$は成立する。

［解 説］

最初は③式を数学的帰納法で証明しました。しかし②式を眺めていると，直接的な証明が可能ではないかと思えてきました。それで考え直して書いたのが上の解です。

$\boxed{4}$ ［1999 京都大］

(1) $\dfrac{b_1{}^2}{a_0{}^2+1}+\dfrac{a_1{}^2}{b_0{}^2+1}-\dfrac{a_1{}^2}{a_0{}^2+1}-\dfrac{b_1{}^2}{b_0{}^2+1}=\dfrac{b_1{}^2-a_1{}^2}{a_0{}^2+1}-\dfrac{b_1{}^2-a_1{}^2}{b_0{}^2+1}$

$=\dfrac{(b_1{}^2-a_1{}^2)(b_0{}^2-a_0{}^2)}{(a_0{}^2+1)(b_0{}^2+1)}$

$0<a_0<b_0$，$0<a_1<b_1$より，$\dfrac{b_1{}^2}{a_0{}^2+1}+\dfrac{a_1{}^2}{b_0{}^2+1}>\dfrac{a_1{}^2}{a_0{}^2+1}+\dfrac{b_1{}^2}{b_0{}^2+1}$

(2) まず，$1\leqq i<j\leqq n$とし，$x_i=y_j$，$x_j=y_i$，$x_k=y_k$ $(k\neq i,\ k\neq j)$とすると，条件より，$\{x_1,\ x_2,\cdots\cdots,x_n\}=\{y_1,\ y_2,\cdots\cdots,y_n\}=\{1,\ 2,\cdots\cdots,n\}$

さらに$x_i>x_j$のとき, (1)より

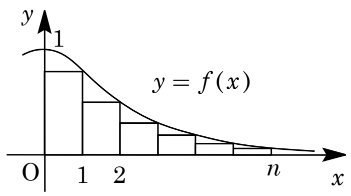
$$\frac{x_i{}^2}{i^2+1}+\frac{x_j{}^2}{j^2+1}>\frac{x_j{}^2}{i^2+1}+\frac{x_i{}^2}{j^2+1}=\frac{y_i{}^2}{i^2+1}+\frac{y_j{}^2}{j^2+1}$$

すると，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k{}^2}{k^2+1}>\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k{}^2}{k^2+1}$となり，同様にして$1\leqq p<q\leqq n$で$x_p>x_q$のときは，$x_p$の値と$x_q$の値を交換していくと，$S_n$の値は減少していく。よって，$S_n$の値が最小となるのは$x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n$，すなわち$x_k=k$のときである。

以上より，$S_n\geqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$ ………①

さて，$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$とすると, $x>0$で

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}<0$となり，$f(x)$は単調に減少する。



右図において，面積を比較して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}f(k)<\int_0^n f(x)dx=\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおき，$n=\tan\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$とすると，

$$\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^\alpha\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^\alpha d\theta=\alpha<\frac{\pi}{2}<\frac{3.2}{2}=\frac{8}{5}\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$S_n>n-\dfrac{8}{5}$，すなわち$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k{}^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$

［解 説］

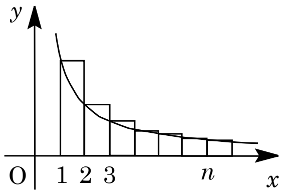
(2)の前半は，わかっているのにそれを表現するのが難しく，もどかしく感じてしまいます。87 年に東大・理で同じ考え方をする問題が出ています。

5 ［2000 金沢大］

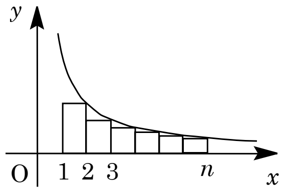
(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ とすると，$f(x)$ は減少関数より，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}f(x)\,dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$



(2) (1)と同様にして，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\displaystyle\int_1^{n}f(x)\,dx=\log n$



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\log(n+1)<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}<\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\frac{1}{\log n}+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて $n\to\infty$ のとき，$\dfrac{\log(n+1)}{\log n}-1=\dfrac{\log(n+1)-\log n}{\log n}=\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n}\to 0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}+1\right)=1$ となるので，③より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3) まず，$\displaystyle\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\ \cdots\cdots\cdots④$

$k\leqq x\leqq k+1$ において，$\dfrac{|\sin\pi x|}{k+1}\leqq\left|\dfrac{\sin\pi x}{x}\right|\leqq\dfrac{|\sin\pi x|}{k}$ より，

$$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx\leqq\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{1}{k}\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$y=x-k$ とおくと，

$$\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx=\int_0^1|\sin\pi(y+k)|\,dy=\int_0^1|\sin\pi y|\,dy=\int_0^1\sin\pi y\,dy$$

$$=-\frac{1}{\pi}\Big[\cos\pi y\Big]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

そこで⑤において，$k=1$ から $k=n$ まで各辺の和をとると，

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

④より，$\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin \pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{2}{\pi}$

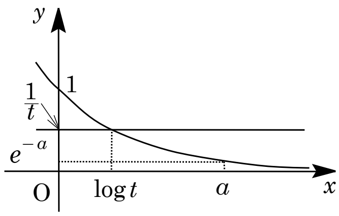
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{\pi}$$

したがって⑥より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin \pi x}{x}\right|dx=\int_0^1\sin \pi y\,dy=\frac{2}{\pi}$

［解 説］

金沢大・理系の入試問題には，よく練られた難問が 1 題出題されますが，今年は本問がそれに当たります。(3)で(2)の極限値をどのように使うかということを考えていると，謎解きの楽しみが味わえます。

$\boxed{6}$ [2001 東京工大]



(1) (i) $\frac{1}{t} \geqq 1\ (0 < t \leqq 1)$ のとき

$$S(a,\ t) = \int_0^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx = \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_0^a$$
$$= e^{-a} - 1 + \frac{a}{t}$$

(ii) $e^{-a} \leqq \frac{1}{t} < 1\ (1 < t \leqq e^a)$ のとき

$e^{-x} = \frac{1}{t}$ の解は，$x = \log t$ より，

$$S(a,\ t) = \int_0^{\log t}\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx + \int_{\log t}^a -\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx$$
$$= \left[-e^{-x} - \frac{1}{t}x\right]_0^{\log t} + \left[e^{-x} + \frac{1}{t}x\right]_{\log t}^a = -\frac{2}{t}\log t + \frac{a-2}{t} + e^{-a} + 1$$

(iii) $\frac{1}{t} < e^{-a}\ (t > e^a)$ のとき

$$S(a,\ t) = \int_0^a\left(e^{-x} - \frac{1}{t}\right)dx = -e^{-a} + 1 - \frac{a}{t}$$

すると，$0 < t \leqq 1$ のとき $\frac{dS(a,\ t)}{dt} = -\frac{a}{t^2} < 0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に減少し，$t > e^a$ のとき $\frac{dS(a,\ t)}{dt} = \frac{a}{t^2} > 0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に増加する。

また，$1 < t \leqq e^a$ のとき $\frac{dS(a,\ t)}{dt} = \frac{2}{t^2}\log t - \frac{2}{t^2} - \frac{a-2}{t^2} = \frac{2\log t - a}{t^2}$ となる。このとき $\frac{dS(a,\ t)}{dt} = 0$ の解は，$t = e^{\frac{a}{2}}$ であり，$S(a,\ t)$ の増減は右表のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	e^a
$\frac{dS(a,\ t)}{dt}$		$-$	0	$+$	
$S(a,\ t)$		↘		↗	

さらに，$S(a,\ t)$ は $t = 1$，$t = e^a$ において連続なので，$t = e^{\frac{a}{2}}$ で最小値をとり，

$$m(a) = S\left(a,\ e^{\frac{a}{2}}\right) = -2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1$$

(2) (1)より，$\lim_{a \to 0}\frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a \to 0}\frac{-2e^{-\frac{a}{2}} + e^{-a} + 1}{a^2} = \lim_{a \to 0}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2$

ここで，$-\frac{a}{2} = b$ とおくと，$a \to 0$ のとき $b \to 0$ となり，

$$\lim_{a \to 0}\frac{m(a)}{a^2} = \frac{1}{4}\lim_{b \to 0}\left(\frac{e^b - 1}{b}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

［解 説］

積分計算についての理解を問う問題です。(2)の極限は e の定義を適用するものです。