

2023 入試対策  
2次数学ランドマーク

# 極限22題

理系 25か年

1998 - 2022

---

外林 康治 編著

電送数学舎

---

# 極 限

## 【問題一覧】

---

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1  $n$  を正の整数とする。連立不等式

$$x + y + z \leq n, \quad -x + y - z \leq n, \quad x - y - z \leq n, \quad -x - y + z \leq n$$

をみたす  $xyz$  空間の点  $P(x, y, z)$  で、 $x, y, z$  がすべて整数であるものの個数を  $f(n)$

とおく。極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3}$  を求めよ。

[1998 東京大]

2 関数  $f(x) = 1 - x^2$  について、次の問いに答えよ。

(1)  $f(a) = a$  を満たす正の実数  $a$  を求めよ。

(2)  $a$  を(1)で求めた実数とする。 $x \geq \frac{1}{2}$  ならば、 $|f(x) - f(a)| \geq \frac{\sqrt{5}}{2}|x - a|$  となることを示せ。

(3)  $a$  を(1)で求めた実数とする。 $\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1$  として、

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で決まる数列  $\{x_n\}$  を考える。すべての  $n$  に対して  $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$  が成り立つならば、

$x_1 = a$  であることを示せ。

[1999 九州大]

3 数列  $\{a_n\}$  の初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和を  $S_n$  と表す。この数列が  $a_1 = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ ,  $n(n-2)a_{n+1} = S_n$  ( $n \geq 1$ ) を満たすとき、一般項  $a_n$  を求めよ。

[2002 京都大]

4 関数  $f(x) = 4x - x^2$  に対し、数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \sqrt{f(a_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与える。ただし、 $c$  は  $0 < c < 2$  を満たす定数である。

(1)  $a_n < 2$ ,  $a_n < a_{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ。

(2)  $2 - a_{n+1} < \frac{2-c}{2}(2 - a_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。

[2003 東北大]

〔5〕 座標平面上で、 $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし、辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。 $p, n$  を自然数とし、領域  $D_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x, x^p \leq y \leq n\}$  を考え、その面積を  $S_n$  とする。 $L_n$  と  $M_n$  を、それぞれ  $D_n$  に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1) グラフ  $y = x^p$  ( $0 \leq x \leq n^{\frac{1}{p}}$ ) と交わる単位正方形の個数は  $n$  であることを示せ。

(2) 不等式  $M_n < S_n < M_n + n$  を示せ。また、面積  $S_n$  を求めよ。

(3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{p+1}{p}} L_n$  を求めよ。

[2003 九州大]

〔6〕 曲線  $C: y = e^x$  上の異なる 2 点  $A(a, e^a)$ ,  $P(t, e^t)$  における  $C$  のそれぞれの法線の交点を  $Q$  として、線分  $AQ$  の長さを  $L_a(t)$  で表す。さらに、 $r(a) = \lim_{t \rightarrow a} L_a(t)$

と定義する。

(1)  $r(a)$  を求めよ。

(2)  $a$  が実数全体を動くとき、 $r(a)$  の最小値を求めよ。

[2005 筑波大]

〔7〕  $a_1 = \frac{1}{2}$  とし、数列  $\{a_n\}$  を漸化式  $a_{n+1} = \frac{a_n}{(1+a_n)^2}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) によって

定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 各  $n=1, 2, 3, \dots$  に対し  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とおく。 $n > 1$  のとき、 $b_n > 2n$  となることを示

せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$  を求めよ。

[2006 東京大]

8  $n$  を 2 以上の自然数とする。平面上の  $\triangle OA_1A_2$  は  $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$ ,  $OA_1 = 1$ ,  $A_1A_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$  を満たすとする。  $A_2$  から  $OA_1$  へ垂線を下ろし、交点を  $A_3$  とする。  $A_3$  から  $OA_2$  へ垂線を下ろし、交点を  $A_4$  とする。以下同様に、  $k = 4, 5, \dots$  について、  $A_k$  から  $OA_{k-1}$  へ垂線を下ろし、交点を  $A_{k+1}$  として、順番に  $A_5, A_6, \dots$  を定める。  
 $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$  とおくと、以下の問いに答えよ。

(1)  $k = 1, 2, \dots$  のとき、ベクトル  $\vec{h}_k$  と  $\vec{h}_{k+1}$  の内積  $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$  を  $n$  と  $k$  で表せ。

(2)  $S_n = \sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$  とおくと、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。ここで、自然対数の底  $e$  について、  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  であることを用いてもよい。 [2008 東北大]

9 実数  $x$  に対し、  $x$  以上の最小の整数を  $f(x)$  とする。  $a, b$  を正の実数とすると、極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^c \left( \frac{1}{f(ax-7)} - \frac{1}{f(bx+3)} \right)$  が収束するような実数  $c$  の最大値と、そのときの極限値を求めよ。 [2008 東京工大]

10 正の実数  $r$  と  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲の実数  $\theta$  に対して、  $a_0 = r \cos \theta$ ,  $b_0 = r$  とおく。  
 $a_n, b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を漸化式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)  $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$  を  $\theta$  で表せ。

(2)  $\frac{a_n}{b_n}$  を  $n$  と  $\theta$  で表せ。

(3)  $\theta \neq 0$  のとき、  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{r \sin \theta}{\theta}$  を示せ。 [2010 北海道大]

11  $a$  が正の実数のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$  を求めよ。 [2012 京都大]

**12** 数列  $\{a_n\}$  を,  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める。以下の問

いに答えよ。

- (1)  $n \geq 2$  のとき,  $a_n > 1$  となることを示せ。
- (2)  $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$  を満たす正の実数  $\alpha$  を求めよ。
- (3) すべての自然数  $n$  に対して  $a_n < \alpha$  となることを示せ。
- (4)  $0 < r < 1$  を満たすある実数  $r$  に対して, 不等式  $\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq r$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを示せ。さらに, 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。 [2012 東北大]

**13** 正の整数  $n$  に対し,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲において  $\sin 4nx \geq \sin x$  を満たす  $x$  の区間の長さの総和を  $S_n$  とする。このとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。 [2013 東京工大]

**14** 数列  $\{a_n\}$  を,  $a_1 = 5$ ,  $a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める。また, 数列  $\{b_n\}$  を,  $b_n = \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{1 + 2 + \dots + n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) と定める。

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。
- (2) すべての  $n$  に対して, 不等式  $b_n \leq 3 + \frac{4}{n+1}$  が成り立つことを示せ。
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  を求めよ。 [2015 東京工大]

**15**  $xy$  平面において,  $x$  座標と  $y$  座標がともに整数である点を格子点という。また, 実数  $a$  に対して,  $a$  以下の最大の整数を  $[a]$  で表す。記号  $[ ]$  をガウス記号という。以下の問いでは  $N$  を自然数とする。

- (1)  $n$  を  $0 \leq n \leq N$  を満たす整数とする。点  $(n, 0)$  と点  $(n, N \sin(\frac{\pi n}{2N}))$  を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。
- (2) 直線  $y = x$  と,  $x$  軸, および直線  $x = N$  で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を  $A(N)$  とおく。このとき  $A(N)$  を求めよ。
- (3) 曲線  $y = N \sin(\frac{\pi x}{2N})$  ( $0 \leq x \leq N$ ) と,  $x$  軸, および直線  $x = N$  で囲まれた領域 (境界を含む) にある格子点の個数を  $B(N)$  とおく。(2)の  $A(N)$  に対して  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)}$  を求めよ。 [2017 筑波大]

**16**  $k$  を 2 以上の整数とする。また、 $f(x) = \frac{1}{k} \left( (k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}} \right)$  とおく。以下の問いに答えよ。

- (1)  $x > 0$  において、関数  $y = f(x)$  の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。
- (2) 数列  $\{x_n\}$  が  $x_1 > 1$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を満たすとき、 $x_n > 1$  を示せ。
- (3) (2)の数列  $\{x_n\}$  に対し、 $x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$  を示せ。また  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  を求めよ。

[2018 神戸大]

**17**  $a$  を実数とし、数列  $\{x_n\}$  を次の漸化式によって定める。

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1)  $a > 0$  のとき、数列  $\{x_n\}$  が発散することを示せ。
- (2)  $-1 < a < 0$  のとき、すべての正の整数  $n$  に対して  $-1 < x_n < 0$  が成り立つことを示せ。
- (3)  $-1 < a < 0$  のとき、数列  $\{x_n\}$  の極限を調べよ。

[2019 東北大]

**18** 数列  $\{a_n\}$  を  $a_n = \frac{1}{2^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める。以下の問いに答えよ。

- (1)  $t > 0$  のとき、 $1 \leq \frac{e^t - 1}{t} \leq e^t$  であることを示せ。
- (2) 数列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  を

$$x_n = \log(e^{a_n} + 1), \quad y_n = \log(e^{a_n} - 1), \quad z_n = y_n + \sum_{k=1}^n x_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。 $z_n$  は  $n$  によらない定数であることを示せ。

- (3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right)$  を求めよ。

[2019 筑波大]

**19**  $p$  を正の整数とする。 $\alpha$ ,  $\beta$  は  $x$  に関する方程式  $x^2 - 2px - 1 = 0$  の 2 つの解で、 $|\alpha| > 1$  であるとする。

- (1) すべての正の整数  $n$  に対し、 $\alpha^n + \beta^n$  は整数であり、さらに偶数であることを証明せよ。
- (2) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\alpha)^n \sin(\alpha^n \pi)$  を求めよ。

[2020 京都大]

**20**  $0 < r < 1$  とし、半径 1 の円  $C_1$  と半径  $r$  の円  $C_2$  の中心は一致しているとする。円  $C_1$  に内接し、円  $C_2$  に外接する円をできるだけたくさん描く。ただし、どの 2 つの円も共有点の個数は 1 以下とする。描いた円の円周の長さの総和を  $f(r)$  とするとき、 $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(r)$  を求めよ。 [2020 信州大]

**21**  $a \geq 0$  とし、 $n$  を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1)  $x > 0$  のとき、 $\frac{x}{1+a} \left(1 - \frac{x}{2(1+a)}\right) < \log \frac{1+a+x}{1+a} < \frac{x}{1+a}$  を示せ。

(2)  $I_n(a) = \left(1 + \frac{1}{n^2(1+a)}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2(1+a)}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2(1+a)}\right)$  とおく。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log I_n(a)$  を求めよ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+n}{2n^2+n} \frac{C_n}{C_n} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  を求めよ。 [2021 新潟大]

**22** 次の問いに答えよ。

(1)  $\sqrt{2}^{(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})}$  と  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$  との大きさを比較せよ。

(2) 関数  $f(x)$  を  $f(x) = \sqrt{2}^x$  と定義し、座標平面上の曲線  $y = f(x)$  を  $C$  とする。 $C$  上の点  $(2, f(2))$  における接線の方程式を、実数  $m, k$  を用いて  $y = mx + k$  と表すとき、 $m$  と  $k$  の値をそれぞれ求めよ。

(3)  $f(x)$  および  $m$  と  $k$  を (2) のように定める。すべての実数  $x$  に対して  $f(x) \geq mx + k$  が成り立つことを示せ。

(4) 数列  $\{a_n\}$  を  $a_1 = \sqrt{2}$  および漸化式  $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) により定義する。自然数  $n$  に対して、 $2 - a_{n+1} \leq (\log 2) \cdot (2 - a_n)$  が成り立つことを示し、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。必要ならば、自然対数の底が  $e = 2.718 \dots$  であることを用いてよ

い。

[2022 広島大]



---

# 極 限

## 【解答例と解説】

---

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 東京大]

$z = k$  での切り口を考える。

$$x + y + k \leq n \text{ より, } y \leq -x + n - k$$

$$-x + y - k \leq n \text{ より, } y \leq x + n + k$$

$$x - y - k \leq n \text{ より, } y \geq x - (n + k)$$

$$-x - y + k \leq n \text{ より, } y \geq -x - (n - k)$$

切り口の存在する条件は,

$$n - k \geq -(n - k) \text{ かつ } n + k \geq -(n + k)$$

よって,  $-n \leq k \leq n$

境界線の交点は,

$$y = -x + n - k \text{ かつ } y = x + n + k \text{ より, } (x, y) = (-k, n)$$

$$y = -x + n - k \text{ かつ } y = x - (n + k) \text{ より, } (x, y) = (n, -k)$$

$$y = -x - (n - k) \text{ かつ } y = x + n + k \text{ より, } (x, y) = (-n, k)$$

$$y = -x - (n - k) \text{ かつ } y = x - (n + k) \text{ より, } (x, y) = (k, -n)$$

$z = k$  上での格子点の個数を  $f_k(n)$  とすると,

$$\begin{aligned} f_k(n) &= 2\{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 2k + 1)\} + (2n - 2k + 1)(2k - 1) \\ &= 2 \cdot \frac{1 + (2n - 2k + 1)}{2} \cdot (n - k + 1) + (2n - 2k + 1)(2k - 1) \\ &= 2(n - k + 1)^2 + \{2(n - k + 1) - 1\}(2k - 1) \end{aligned}$$

$$\text{以上より, } f(n) = \sum_{k=-n}^n f_k(n) = \sum_{k=-n}^n [2(n - k + 1)^2 + \{2(n - k + 1) - 1\}(2k - 1)]$$

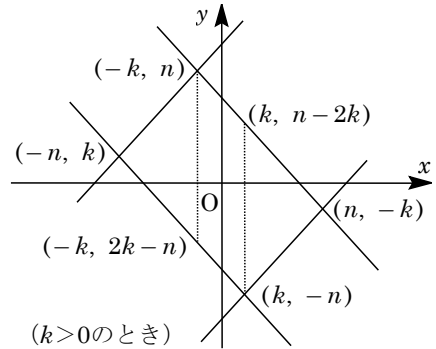
ここで,  $n - k + 1 = l$  とおくと,

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{l=1}^{2n+1} \{2l^2 + (2l - 1)(2n + 1 - 2l)\} = \sum_{l=1}^{2n+1} \{-2l^2 + 4(n + 1)l - (2n + 1)\} \\ &= -\frac{2}{3}(2n + 1)(n + 1)(4n + 3) + 4(n + 1)^2(2n + 1) - (2n + 1)^2 \\ &= \frac{1}{3}(2n + 1)(4n^2 + 4n + 3) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(4 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

### [解 説]

4 平面で囲まれた領域にある格子点の個数を求める頻出問題です。平面の方程式は知っていて当然というのが、出題者からのメッセージです。



2

[1999 九州大]

$$(1) f(a) = a \text{ より, } 1 - a^2 = a, \quad a^2 + a - 1 = 0$$

$$a > 0 \text{ より, } a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(2) |f(x) - f(a)| = |1 - x^2 - (1 - a^2)| = |-(x+a)(x-a)| = |x+a||x-a|$$

$$\text{ここで条件より, } |x+a| \geq \left| \frac{1}{2} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{よって, } |f(x) - f(a)| \geq \frac{\sqrt{5}}{2} |x-a|$$

$$(3) x_{n+1} = f(x_n), \quad a = f(a) \text{ なので, } x_n \geq \frac{1}{2} \text{ のとき (2) より,}$$

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \geq \frac{\sqrt{5}}{2} |x_n - a|$$

$$\text{よって, } |x_n - a| \geq |x_1 - a| \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

(i)  $x_1 - a \neq 0$  のとき

$n \rightarrow \infty$  のとき  $|x_n - a| \rightarrow \infty$  となるので, すべての  $n$  に対しては  $x_n \leq 1$  が成立しない。

(ii)  $x_1 - a = 0$  のとき

$a = f(a)$  なので, すべての  $n$  に対して  $x_n = a$  となる。

(1) より,  $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$  なので, すべての  $n$  に対して  $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$  が成り立つ。

(i)(ii) より,  $x_1 = a$  の場合のみ題意が成立する。

### [解 説]

(2) の不等式は, (3) で定義された数列の発散条件に対応することがわかります。これを(3)の題意に結びつけることがポイントです。

3

[2002 京都大]

条件より,  $n(n-2)a_{n+1} = S_n \ (n \geq 1) \cdots \cdots \textcircled{1}$

$(n-1)(n-3)a_n = S_{n-1} \ (n \geq 2) \cdots \cdots \textcircled{2}$

①-②より,  $n(n-2)a_{n+1} - (n-1)(n-3)a_n = a_n$ ,  $n(n-2)a_{n+1} = (n-2)^2 a_n$

$n \geq 3$  で,  $na_{n+1} = (n-2)a_n$

$$n(n-1)a_{n+1} = (n-1)(n-2)a_n$$

よって,  $(n-1)(n-2)a_n = (3-1)(3-2)a_3 = 2a_3$

$$a_n = \frac{2a_3}{(n-1)(n-2)} \ (n \geq 3)$$

ここで, ①に  $n=1$  を代入すると,  $1 \cdot (-1)a_2 = S_1$ ,  $-a_2 = a_1$  より,  $a_2 = -a_1 = -1$

さて,  $n \geq 3$  で,  $S_n = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^n a_k = 1 - 1 + \sum_{k=3}^n \frac{2a_3}{(k-1)(k-2)}$

$$= 2a_3 \sum_{k=3}^n \left( \frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} \right) = 2a_3 \left( 1 - \frac{1}{n-1} \right)$$

条件より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$  なので,  $2a_3 = 1$ ,  $a_3 = \frac{1}{2}$

以上より,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \ (n \geq 3)$

### [解 説]

①に  $n=2$  を代入して  $a_3$  の値を求めようとしたのですが,  $0 \cdot a_3 = 0$  となり, 何も得られませんでした。そこで,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$  の利用となったわけです。