２０２４ 入試対策

２次数学ランドマーク

図形と式36題

文系＋理系 26か年

１９９８ ― ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

図 形 と 式

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点$(a,\ b)$の集合を式で表し，図示せよ。

$$x-y<0,\ \ x+y<2,\ \ ax+by<1$$

［1998 北海道大・理］

2 c を$c>\dfrac{1}{4}$を満たす実数とする。xy 平面上の放物線$y=x^2$を A とし，直線$y=x-c$に関してAと対称な放物線をBとする。点 P が放物線A上を動き，点 Q が放物線B上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値をcを用いて表せ。［1999 東京大・文］

3 曲線$y=x^2$の点$(a,\ a^2)$での接線を l とする。l 上の点で x 座標が$a-1$と$a+1$のものをそれぞれ P および Q とする。a が$-1\leqq a\leqq 1$の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。［1999 東北大・理］

4 xy 平面内の領域$-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$において，$1-ax-by-axy$の最小値が正となるような定数a, bを座標とする点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。［2000 東京大・文］

5 放物線$y=x^2$上に，直線$y=ax+1$に関して対称な位置にある異なる 2 点 P，Q が存在するようなaの範囲を求めよ。［2001 一橋大］

6 実数tに対して，xy 平面上の直線$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$は，tの値によらずある円Cに接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円Cの方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2) t が $t\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。［2002 神戸大・文］

7 $a,\ b$ を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域をDとする。

$$x+3y\geqq a,\ \ 3x+y\geqq b,\ \ x\geqq 0,\ \ y\geqq 0$$

領域Dにおける$x+y$の最小値を求めよ。［2003 東京大・文］

8 xy 平面の放物線$y=x^2$上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは$\sqrt{2}$である。

このとき，aの値を求めよ。［2004 東京大］

9　不等式 $y \leqq -(x-1)^2$ の表す領域を A_1，不等式 $y \leqq -(x+1)^2$ の表す領域を A_2 とする。A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また，不等式 $y \geqq (x-a)^2+b$ の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=0$，$b=-1$ とするとき，A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(2)　A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を a, b で表せ。

(3)　A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面に図示せよ。　［2005 金沢大・文］

10　a を定数とし，x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\quad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して，2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。　［2005 一橋大］

11　θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x=t\cos\theta,\quad y=1-t^2+t\sin\theta$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える。t が実数全体を動くとき，点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，Q の x 座標を求めよ。

(2)　θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき，C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3)　θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。　［2005 大阪大・理］

12 座標平面上に 3 点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点$\mathrm{P}(p,\ q)$を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 6)$とするとき，p，q，tの間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点$\mathrm{P}(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点$\mathrm{P}(p,\ q)$を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点$\mathrm{P}(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006 名古屋大・理]

13 座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線$y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$上を自由に動くとき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，$\mathrm{P} = \mathrm{Q}$のときは$\mathrm{R} = \mathrm{P}$とする。

(1) a を$-1 \leqq a \leqq 1$を満たす実数とするとき，点$(a,\ b)$が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。 [2007 東京大・理]

14 a を正の実数とする。点$(x,\ y)$が，不等式$x^2 \leqq y \leqq x$の定める領域を動くとき，つねに$\dfrac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$となる。$a$ の値の範囲を求めよ。 [2008 一橋大]

15 座標平面上の 3 点$\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(x,\ y)$を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2) $\triangle$ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3) 3 つの角$\angle$CAB, $\angle$ABC, $\angle$BCA をそれぞれα，β，γとし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4) x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。[2009 広島大・理]

16 実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax-a^2+2a+2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

[2011 東北大・理]

17 以下の問いに答えよ。

(1) t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) a を $a \geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

$$ax+(2-a)y \geqq 2,\quad y \geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3) a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。 [2011 神戸大・理]

18 座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。 [2012 神戸大]

19 s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s, t が $s \geqq 0, t \geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。$s,\ t$ が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

[2012 東北大・理]

20 $a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2) $b-a \geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

[2013 神戸大・文]

21 座標平面上の 2 点 A$(0,\ 1)$ B$(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y=kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。

［2013 広島大・理］

22 座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

［2014 東京大・理］

23 座標平面上の原点を O とする。点 A$(a,\ 0)$，点 B$(0,\ b)$ および点 C が，OC$=1$，AB$=$BC$=$CA を満たしながら動く。

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) △ABC の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

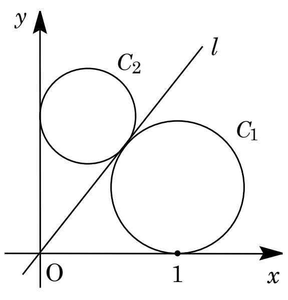
［2015 一橋大］

24 l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i) 円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii) 円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。



円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。

［2015 東京大・文］

25　座標平面上の２点$A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$を考える。また，Pを座標平面上の点とし，そのx座標の絶対値は１以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点Pの範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i)　頂点のx座標の絶対値が１以上の２次関数のグラフで，点A，P，Bをすべて通るものがある。

(ii)　点A, P, Bは同一直線上にある。　［2015 東京大・文］

26　座標平面上の３点$P(x,\ y)$，$Q(-x,\ -y)$，$R(1,\ 0)$が鋭角三角形をなすための$(x,\ y)$についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点$P(x,\ y)$の範囲を図示せよ。　［2016 東京大・文］

27　$a,\ b$を実数とする。$y=|x^2-4|$で表される曲線をCとし，$y=ax+b$で表される直線をlとする。

(1)　lが点$(-2,\ 0)$を通り，lとCがちょうど３つの共有点をもつようなa, bの条件を求めよ。

(2)　lとCがちょうど３つの共有点をもつような点$(a,\ b)$の軌跡をab平面上に図示せよ。　［2017 東北大・理］

28　次の問いに答えよ。

(1)　次の条件(A)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(A)　２次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$を満たす実数$x,\ y$を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(2)　次の条件(B)を満たす座標平面上の点$(u,\ v)$の存在範囲を図示せよ。

(B)　２次式t^2-ut+vは，$0\leqq x\leqq 1$，$1\leqq y\leqq 2$を満たす実数$x,\ y$を用いて$t^2-ut+v=(t-x)(t-y)$と因数分解される。

(3)　座標平面上の点$(x,\ y)$が４点$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$を頂点とする長方形の周および内部を動くとき，点$(x+y,\ xy)$の動く範囲の面積を求めよ。

［2018 広島大・理］

29　xy平面における２つの放物線$C: y=(x-a)^2+b$，$D: y=-x^2$を考える。

(1)　CとDが異なる２点で交わり，その２交点のx座標の差が１となるように実数a, bが動くとき，Cの頂点$(a,\ b)$の軌跡を図示せよ。

(2)　実数a, bが(1)の条件を満たしながら動くとき，CとDの２交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め，図示せよ。　［2018 東北大・理］

30 θ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，座標平面上の直線 $y=(\sin\theta)x+\cos\theta$ 上の点$(x,\ y)$について，不等式 $-|x| \leqq y \leqq \sqrt{x^2+1}$ が成り立つことを示せ。

［2018 信州大・医］

31 放物線 $y=x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を満たす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。 ［2018 東京大・文］

32 座標平面上の直線 l を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 l と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし, a, b は l と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 A$(1,\ -2)$，点 B$(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) △APB の面積が最大となるときの a の値を求めよ。 ［2019 熊本大・医］

33 x の 2 次関数で，そのグラフが $y=x^2$ のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし, 2 つの関数のグラフがある点で直交するとは，その点が 2 つのグラフの共有点であり，かつ接線どうしが直交することをいう。 ［2020 京都大・文］

34 a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $C : y=x^2+ax+b$ は放物線 $y=-x^2$ と 2 つの共有点をもち，一方の共有点の x 座標は $-1<x<0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0<x<1$ を満たす。

(1) 点$(a,\ b)$のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。 ［2021 東京大］

$\boxed{35}$ α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。$\angle\mathrm{A}=\alpha$ および $\angle\mathrm{P}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす直角三角形 APB が，次の 2 つの条件(a)，(b)を満たしながら，時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ まで xy 平面上を動くとする。

(a) 時刻 t での点 A, B の座標は，それぞれ $\mathrm{A}(\sin t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \cos t)$ である。

(b) 点 P は第 1 象限内にある。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し，その直線の方程式を α を用いて表せ。

(2) 時刻 $t=0$ から時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ までの間に点 P が動く道のりを α を用いて表せ。

(3) xy 平面内において，連立不等式 $x^2-x+y^2<0$，$x^2+y^2-y<0$ により定まる領域を D とする。このとき，点 P は領域 D には入らないことを示せ。［2022 東京工大］

$\boxed{36}$ 関数 $f(x)$ に対して，座標平面上の 2 つの点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$，$\mathrm{Q}(x+1,\ f(x)+1)$ を考える。実数 x が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形の面積を S とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=-2|x-1|+2$ に対して，S の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，曲線 $y=f(x)$ の接線で，傾きが 1 のものの方程式を求めよ。

(3) 設問(2)の関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2$ に対して，S の値を求めよ。［2023 東北大・文］

図 形 と 式

【解答例と解説】

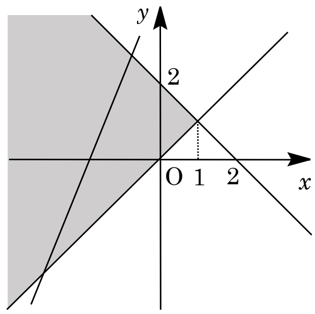
（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 北海道大・理］

条件より，$x-y<0$ ………①，$x+y<2$ ………②

$ax+by<1$ ………③

①かつ②の表す領域は右図の網点部。



③に$(x,\ y)=(0,\ 0)$を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，直線$ax+by=1$……④を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線$x-y=0$と④との交点は，

$$(a+b)x=1,\ \ x=\frac{1}{a+b}\ \ (a\neq -b)$$

また，直線$x+y=2$と④との交点は，

$$ax+b(2-x)=1,\ \ x=\frac{1-2b}{a-b}\ \ (a\neq b)$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{a+b}<0\ \text{……⑤かつ}\ \frac{1-2b}{a-b}<1\ \text{……⑥}$$

⑤より，$a+b<0$，$b<-a$ ………⑦

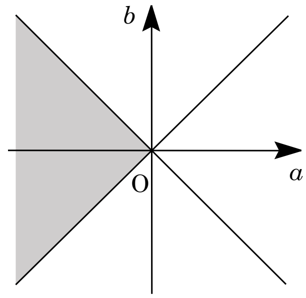
⑥より，$(1-2b)(a-b)<(a-b)^2$となり，

$$(a-b)(a-b-1+2b)>0$$

$$(a-b)(a+b-1)>0$$

⑦から$a+b-1<0$なので，$a-b<0$，$b>a$ ………⑦

⑥⑦より，$a<b<-a$

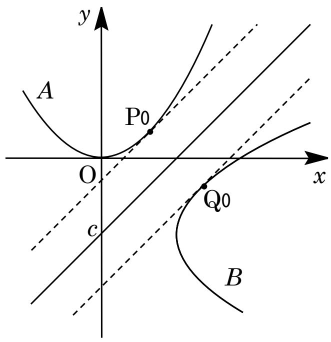


点$(a,\ b)$の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

［解 説］

③の領域については，直線④を境界とし，原点を含むか否かで決定しました。また，直線④と直線$y=x$および$y=-x+2$との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。

$\boxed{2}$ ［1999 東京大・文］



放物線 A と，A と線対称な放物線 B に，対称軸 $y=x-c$ に平行な直線を引き，放物線 A との接点を P_0，放物線 B との接点を Q_0 としたとき，線分 P_0Q_0 は対称軸と直交する。

すると，線分 PQ の長さの最小値は線分 P_0Q_0 の長さとなる。

ここで，放物線 $A: y=x^2$ ……①と対称軸に平行な直線 $y=x+k$ ……②が接するとき，①②より，

$$x^2-x-k=0 \text{ ………③}$$

判別式 $D=1+4k=0$ より，$k=-\dfrac{1}{4}$

このとき，接点は③から $x=\dfrac{1}{2}$，①から $y=\dfrac{1}{4}$

よって，$P_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

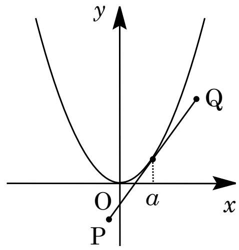
点 P_0 と点 Q_0 は対称軸 $y=x-c$ に関して対称なので，線分 PQ の長さの最小値 P_0Q_0 は点 $P_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と対称軸 $x-y-c=0$ との距離の 2 倍となるので，

$$P_0Q_0=2\cdot\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-c\right|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-c\right|=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$$

［解 説］

本問は求値問題ですので,, 直観に依存した解で記述しています。

3 ［1999 東北大・理］



$y=x^2$ より，$y'=2x$

点 $(a,\ a^2)$ での接線は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$

よって，線分 PQ は，$y=2ax-a^2\ (a-1\leqq x\leqq a+1)$ ………①

a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は，明らかに y 軸対称となる。

さて，①において $x=t\ (t\geqq 0)$ 上での通過領域を考えると，

$$y=2at-a^2=-(a-t)^2+t^2\ (t-1\leqq a\leqq t+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

そこで，②式を $y=f(a)$ とおき，a が $-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲を動くとき, y の値のとりうる範囲を求める。

ここで，$y=f(a)$ のグラフの軸が $a=t$ なので, t の値で場合分けをする。

(i) $t>2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は存在しない。

(ii) $1<t\leqq 2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲には, $y=f(a)$ の軸は存在しないので，$f(a)$ は単調増加となる。

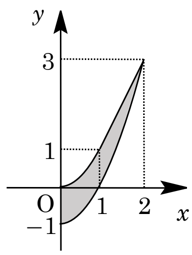
$f(t-1)\leqq y\leqq f(1)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq 2t-1$

(iii) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲に $y=f(a)$ の軸は存在し，しかも $t-1<\dfrac{(t-1)+1}{2}\leqq t\leqq 1$ なので,

$f(t-1)\leqq y\leqq f(t)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq t^2$

(i)(ii)(iii)より, $x\geqq 0$ で線分 PQ の通過領域は，右図のようになる。



求める面積を S とおくと，

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\left\{x^2-(x^2-1)\right\}dx+\int_1^2\left\{2x-1-(x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx=\frac{5}{3}$$

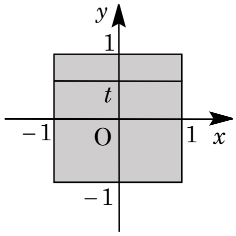
よって，$S=\dfrac{10}{3}$

［解 説］

x を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし，本問では 2 点 P，Q だけの軌跡を求めて，直観的に考えることも可能です。

$\boxed{4}$ ［2000 東京大・文］

$P=1-ax-by-axy$ とおき，まず y の値を固定し，$y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ において, P の最小値を求める。



$$P=1-ax-bt-axt=-a(1+t)x+1-bt$$

$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，$1+t\geqq 0$ となるので,

(i) $-a\geqq 0$ $(a\leqq 0)$ のとき $x=-1$ で P は最小となる。

このとき，$P=a(1+t)+1-bt=(a-b)t+a+1$

(i-i) $a-b\geqq 0$ $(b\leqq a)$ のとき

$t=-1$ で最小値 $P=-(a-b)+a+1=b+1$ をとり，条件より，$b+1>0$

(i-ii) $a-b<0$ $(b>a)$ のとき

$t=1$ で最小値 $P=(a-b)+a+1=2a-b+1$ をとり，条件より，$2a-b+1>0$

(ii) $-a<0$ $(a>0)$ のとき $x=1$ で P は最小となる。

このとき，$P=-a(1+t)+1-bt=-(a+b)t-a+1$

(ii-i) $a+b\geqq 0$ $(b\geqq -a)$ のとき

$t=1$ で最小値 $P=-(a+b)-a+1=-2a-b+1$ をとり，条件より，$-2a-b+1>0$

(ii-ii) $a+b<0$ $(b<-a)$ のとき

$t=-1$ で最小値 $P=(a+b)-a+1=b+1$ をとり，条件より，$b+1>0$

(i)(ii)をまとめると,

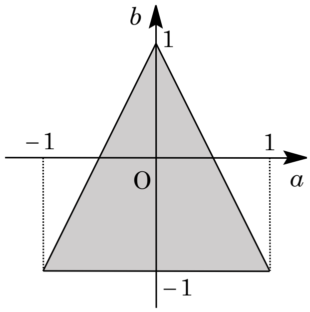
$a\leqq 0$ かつ $b\leqq a$ のとき，$b>-1$

$a\leqq 0$ かつ $b>a$ のとき，$b<2a+1$

$a>0$ かつ $b\geqq -a$ のとき，$b<-2a+1$

$a>0$ かつ $b<-a$ のとき，$b>-1$

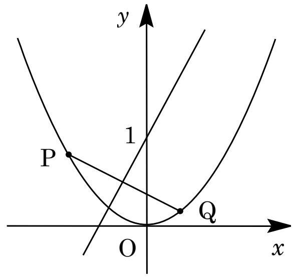
この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲は右図の網点部になる。ただし，境界は含まない。



［解 説］

今年もまた出ましたという感のある 1 文字固定の最大・最小問題です。しかし，対象が 1 次関数のため，そんなに複雑ではありません。

$\boxed{5}$ ［2001 一橋大］



$p \neq q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ と直線 $y = ax + 1$ が直交することより，

$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} \cdot a = -1,\quad p + q = -\frac{1}{a} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，PQ の中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ が，直線 $y = ax + 1$ 上にあることより，

$$\frac{p^2 + q^2}{2} = a \cdot \frac{p+q}{2} + 1,\quad p^2 + q^2 = a(p+q) + 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①を②に代入すると，$p^2 + q^2 = 1 \cdots\cdots\cdots ③$

①③を満たす異なる p，q が存在する条件は，直線①と円③が 2 つの共有点を持つ条件に等しいので，

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}} < 1,\quad 1 < \sqrt{2}\,|a|$$

よって，$a < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < a$

［解 説］

線対称移動を題材にした問題です。後半の a の範囲を求めるところは，図をイメージしています。

6 ［2002 神戸大・文］

(1) $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$……①より，$(1-t^2)x-2ty-1-t^2=0$……①′

円 C の中心を$(a,\ b)$，半径を r とすると，①′が接することより，

$$\frac{\left|(1-t^2)a-2tb-1-t^2\right|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r,\quad \frac{\left|(-a-1)t^2-2bt+a-1\right|}{\sqrt{1+2t^2+t^4}}=r$$

$$(-a-1)t^2-2bt+a-1=\pm r(1+t^2)\text{………②}$$

②がどんな t に対しても成立する条件は,

$$-a-1=\pm r,\ -2b=0,\ a-1=\pm r$$

これより，$-a-1=a-1$ から $a=0$，また $b=0$ となり, $r>0$ から $r=1$ である。

よって，円 C の方程式は，$x^2+y^2=1$ である。

すると，①を $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x+\dfrac{-2t}{1+t^2}y=1$ と変形すると，接点の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$ となる。

(2) 接点を$(x,\ y)$とおくと, (1)より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$……③，$y=\dfrac{-2t}{1+t^2}$……④

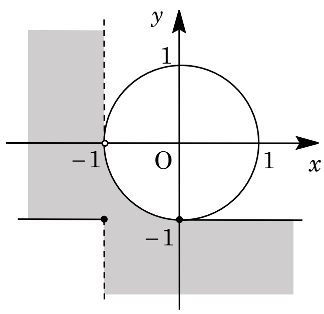
③より，$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ となり, $t\geqq 1$ で $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leqq 1$ より，$-1<x\leqq 0$ となる。

④より，$y=\dfrac{-2}{\frac{1}{t}+t}$ となり，$t\geqq 1$ で $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

（等号は $t=1$ のとき）より，$-1\leqq y<0$ である。

よって，接点は円 C 上の $-1<x\leqq 0$，$-1\leqq y<0$ の部分にある。

以上より，直線①の通過領域は右図の網点部となる。なお，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解 説］

直線の通過領域を求める有名問題です。(1)の誘導があるために，(2)はずいぶん解きやすくなっています。