２０２４ 入試対策

２次数学ランドマーク

複素数30題

理系 26か年

１９９８ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

複 素 数

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 複素平面上で $z_0 = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ （$0° < \theta < 90°$），$z_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$，$z_2 = -\dfrac{1}{z_0}$ を表す点をそれぞれ P_0，P_1，P_2 とする。

(1) z_1 を極形式で表せ。

(2) z_2 を極形式で表せ。

(3) 原点 O，P_0，P_1，P_2 の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ。

［1998 岡山大］

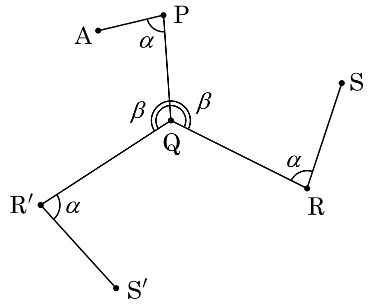
2 平面上において, 7 点 A，P，Q，R，S，R′，S′ を下図のようにとる。ただし，

$AP = a$，$PQ = b$

$QR = QR' = c$，$RS = R'S' = d$

$\angle APQ = \angle SRQ = \angle S'R'Q = \alpha$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi)$

$\angle RQP = \angle PQR' = \beta$ $(0 \leqq \beta \leqq \pi)$



である。このとき，$AS^2 - AS'^2$ を $\sin\alpha$，$\sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。 ［1998 大阪大］

3 2 つの複素数 α，β が，条件 $\alpha^2 + \beta^2 = -\alpha\beta$，$|\alpha + \beta| = 3$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta < 360°$ とする。

(2) α の絶対値を求めよ。

(3) 複素数平面上で，α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ の表す 5 つの点を頂点とする五角形の面積を求めよ。

［1999 岡山大］

4 α，β は $|\alpha + \beta| < 2$ を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x) = \frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2 x^2 - \left(|\alpha| + |\beta|\right)x + 1$$

の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ。 ［2000 東北大］

5 複素数 $z = \cos 20° + i\sin 20°$ と，それに共役な複素数 $\bar{z}$ に対し，$\alpha = z + \bar{z}$ とする。

(1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3) 有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。 ［2000 九州大］

6 原点を O とする複素数平面上で, 0 でない複素数 z, w の表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ とする。z に対して w を, O を始点とする半直線 $\mathrm{OP}(z)$ 上に $\mathrm{Q}(w)$ があり, $|w| = \dfrac{2}{|z|}$ を満たすようにとる。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $w = \dfrac{2}{\overline{z}}$ を示せ。

(2) ± 2, $\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $\mathrm{P}(z)$ が動く。このとき, $\mathrm{Q}(w) = \mathrm{P}(z)$ となる z を求めよ。

(3) $\mathrm{P}(z)$ が(2)の正方形の周上を動くとき, 点 $\mathrm{Q}(w)$ の描く図形を求めて図示せよ。

［2000 岡山大］

7 複素数平面上の点 z を考える。

(1) 実数 a, c と複素数 b が $|b|^2 - ac > 0$ を満たすとき, $az\overline{z} + \overline{b}z + b\overline{z} + c = 0$ を満たす点 z は $a \neq 0$ のとき, どのような図形を描くか。ただし, $\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2) 0 でない複素数 d に対して, $dz(\overline{z}+1) = \overline{d}\,\overline{z}(z+1)$ を満たす点 z はどのような図形を描くか。

［2001 九州大］

8 複素数平面上の点 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, $\cdots$ を

$$a_1 = 1,\ a_2 = i,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め, $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。ただし, i は虚数単位である。

(1) 3 点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 b_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

［2001 東京大］

9 次の問いに答えよ。ただし, 偏角 θ は, $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えるものとする。

(1) $|z+i| = |z-i|$ を満たす複素数 z は, 実数に限ることを示せ。

(2) 複素数平面上で z が実軸上を動くとき, 複素数 $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ の動く範囲を求めよ。

(3) z を未知数とする方程式 $(z+i)^9 = (z-i)^9$ のすべての解 z について $z+i$ の偏角 $\arg(z+i)$ を求めよ。

［2002 名古屋大］

10 aを実数とし，zを複素数とする。複素数平面上で，a，z，z^2，z^3が表す4点が，あるひし形の4頂点になるとする。ただし，aとz^2が表す頂点は対角線上にあるとする。このようなaとzの値をすべて求めよ。 ［2003 千葉大］

11 次の問いに答えよ。ただし，iは虚数単位とする。

(1) 複素数zに対し，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$とする。zが実軸上を動くとき，複素数平面上でwを表す点が描く図形を求めよ。

(2) 複素数zとその共役複素数$\overline{z}$に対し，$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$とする。$z\neq\pm i$のとき，複素数平面上で$w_1$を表す点をP，$w_2$を表す点をQとする。P, Qと原点Oが同一直線上にあることを示せ。 ［2003 神戸大］

12 Oを原点とする複素数平面上で6を表す点をA，$7+7i$を表す点をBとする。ただし，iは虚数単位である。正の実数tに対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$を表す点Pをとる。

(1) $\angle$APBを求めよ。

(2) 線分OPの長さが最大になるtを求めよ。 ［2003 東京大］

13 複素数α，βは$|\alpha-1|=1$，$|\beta-i|=1$を満たす。

(1) $\alpha+\beta$が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。

(2) $(\alpha-1)(\beta-1)$が存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。 ［2003 一橋大］

14 複素数平面上に異なる3点z，z^2，z^3がある。

(1) z，z^2，z^3が同一直線上にあるようなzをすべて求めよ。

(2) z，z^2，z^3が二等辺三角形の頂点になるようなzの全体を複素数平面上に図示せよ。また，z，z^2，z^3が正三角形の頂点になるようなzをすべて求めよ。

［2004 一橋大］

15 αは絶対値1の複素数とし，複素数zに対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$とおく。ただし$\overline{\alpha}$は$\alpha$の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で，zが原点と点αを通る直線上（ただし，点$\dfrac{\alpha}{2}$を除く）を動くとき，wの表す点は原点と点$\overline{\alpha}$を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で，zが不等式$|z|>1$を満たすとき，複素数wを表す点はどのような図形上を動くか。 ［2005 千葉大］

16 t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について, 次の問いに答えよ。

(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と, そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2) (1)の虚数解のうち, その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき, 複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め, 図示せよ。

(3) 複素数平面上で, 点 z が(2)の図形 C 上を動くとき, $w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め, 図示せよ。 [2005 九州大]

17 α を実数でない複素数とし, β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) 複素数平面上で, 関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき, C は原点を通る円であることを示せ。

(2) 複素数平面上で, $(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また, その 2 点を P, Q とするとき, 線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3) β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P, Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき, β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。 [2015 筑波大]

18 多項式 $P(x)$ を, $P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$ により定める。ただし, i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき, 係数 a_0, …, a_7 をすべて求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ に対して, $P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めた a_1, a_3, a_5, a_7 を用いて, 多項式 $Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として, $k=1,\ 2,\ 3$ について, $x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき, $Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し, $x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ。 [2016 東北大]

19 z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(z)$, $\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め, 図示せよ。 [2016 東京大]

20 α，β，γを複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0\cdots\cdots(*)$を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) zは，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$を仮定し，またγは負の実数であると仮定する。このとき，$(*)$を満たすzがちょうど2個あるための必要十分条件をα，βを用いて表せ。

［2017 東北大］

21 wを0でない複素数，x, yを$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$を満たす実数とする。

(1) 実数Rは$R>1$を満たす定数とする。wが絶対値Rの複素数全体を動くとき，xy平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2) 実数αは$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$を満たす定数とする。w が偏角αの複素数全体を動くとき，xy平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。 ［2017 京都大］

22 複素数平面上の原点以外の点zに対して，$w=\dfrac{1}{z}$とする。

(1) αを 0 でない複素数とし，点αと原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点zが直線L上を動くとき，点wの軌跡は円から1点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものをβとする。点βと点β^2を結ぶ線分上を点zが動くときの点wの軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。 ［2017 東京大］

23 複素数平面上に3点O，A，Bを頂点とする△OABがある。ただし，Oは原点とする。△OABの外心をPとする。3点A，B，Pが表す複素数を，それぞれα，β，zとするとき，$\alpha\beta=z$が成り立つとする。

(1) 複素数αの満たすべき条件を求め，点$\mathrm{A}(\alpha)$が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点$\mathrm{P}(z)$の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。 ［2017 北海道大］

24 αを複素数とする。等式 $\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$を満たす複素数$z$をすべて求めよ。ただし，$i$は虚数単位である。 ［2018 九州大］

25 複素数平面上で$|z+i|-|z-i|=1$を満たす点zの全体をHとおく。以下の問いに答えよ。ただし，複素数の偏角θの範囲は$0\leqq\theta<2\pi$とする。

(1) Hの点zに対して，zの偏角θ_1のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) Hの点zに対して$w=\dfrac{1}{z}$とする。wの絶対値r_2と偏角θ_2のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。 [2018 熊本大]

26 複素数αに対して，複素数平面上の3点O(0)，A(α)，B(α^2)を考える。次の条件(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)をすべて満たす複素数α全体の集合をSとする。

(Ⅰ) αは実数でも純虚数でもない。

(Ⅱ) $|\alpha|>1$である。

(Ⅲ) 三角形OABは直角三角形である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) αがSに属するとき，$\angle\mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$であることを示せ。

(2) 集合Sを複素数平面上に図示せよ。

(3) $x,\ y$を$\alpha^2=x+yi$を満たす実数とする。αがSを動くとき，xy平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求め，図示せよ。 [2018 筑波大]

27 $|z|^2+3=2(z+\overline{z})$を満たす複素数$z$全体の集合を$A$とする。ただし$\overline{z}$は$z$の共役複素数である。

(1) 集合Aを複素数平面上に図示せよ。

(2) Aの要素zの偏角をθとする。ただし$-\pi<\theta\leqq\pi$とする。zがAを動くとき，θのとりうる値の範囲を求めよ。

(3) z^{60}が正の実数となるAの要素zの個数を求めよ。 [2019 筑波大]

28 iは虚数単位とする。複素数平面において，複素数zの表す点PをP(z)または点zとかく。$\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$とおき，3点A$(1)$，B$(\omega)$，C$(\omega^2)$を頂点とする△ABCを考える。

(1) △ABCは正三角形であることを示せ。

(2) 点zが辺AC上を動くとき，点$-z$が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(3) 点zが辺AB上を動くとき，点z^2が描く図形をE_1とする。また，点zが辺AC上を動くとき，点z^2が描く図形をE_2とする。E_1とE_2の共有点をすべて求めよ。

[2021 筑波大]

29 $a,\ b$ を実数とし，$f(z)=z^2+az+b$ とする。$a,\ b$ が，$|a|\leqq 1$，$|b|\leqq 1$ を満たしながら動くとき，$f(z)=0$ を満たす複素数 z がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ。 ［2022 東京工大］

30 以下の問いに答えよ。

(1) 4 次方程式 $x^4-2x^3+3x^2-2x+1=0$ を解け。

(2) 複素数平面上の△ABC の頂点を表す複素数をそれぞれ α，β，γ とする。$(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4=0$ が成り立つとき，△ABC はどのような三角形になるか答えよ。 ［2023 九州大］

複 素 数

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

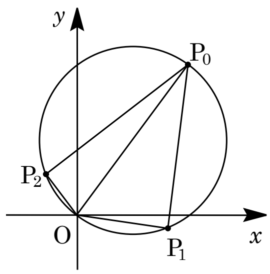
1 ［1998 岡山大］

(1) $z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0=\dfrac{1}{2}\{\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\}\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta)$

$=\cos(\theta-60^\circ)+i\sin(\theta-60^\circ)$

(2) $z_2=-\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{2}\{\cos(180^\circ-\theta)+i\sin(180^\circ-\theta)\}$

(3) $0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\theta-60^\circ<\theta<180^\circ-\theta$



$\angle P_0OP_1=\theta-(\theta-60^\circ)=60^\circ$ で，$OP_0=2$，$OP_1=1$ から，

$\angle OP_1P_0=90^\circ$

よって，OP_0 は円の直径となり，$\angle OP_2P_0=90^\circ$

ここで，$\angle P_0OP_2=(180^\circ-\theta)-\theta=180^\circ-2\theta$ で，$OP_0=2$，

$OP_2=\dfrac{1}{2}$ から，

$$\cos(180^\circ-2\theta)=\frac{OP_2}{OP_0}=\frac{1}{4}$$

よって，$\cos 2\theta=-\dfrac{1}{4}$，$2\cos^2\theta-1=-\dfrac{1}{4}$，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

以上より，$z_0=2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{10}}{4}i\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

［解 説］

(3)では，最初は一般的に 4 点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが，たいへんな計算が待ち構えていました。そこで，これは何か特別な事情があると推測したところ，やはりその通りでした。この発見がポイントです。

$\boxed{2}$ ［1998 大阪大］

Q を原点とし, QP を実軸の正の部分とする複素数平面を設定する。

また, $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $w=\cos\beta+i\sin\beta$ とおく。

すると, 点 P を表す複素数は b となり, 点 A を表す複素数は,

$$b+(0-b)\cdot\frac{a}{b}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=b-a\overline{z}$$

点 R, R′ を表す複素数は, それぞれ $c\overline{w}$, cw となる。

点 S を表す複素数は,

$$c\overline{w}+(0-c\overline{w})\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=c\overline{w}-d\overline{w}\overline{z}=\overline{w}(c-d\overline{z})$$

点S′ を表す複素数は,

$$cw+(0-cw)\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=cw-dw\overline{z}=w(c-d\overline{z})$$

ここで $b-a\overline{z}=u$, $c-d\overline{z}=v$ とおくと, $\mathrm{A}(u)$, $\mathrm{S}(\overline{w}v)$, $\mathrm{S}'(wv)$ となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2&=|\overline{w}v-u|^2-|wv-u|^2\\&=(\overline{w}v-u)(w\overline{v}-\overline{u})-(wv-u)(\overline{w}\overline{v}-\overline{u})\\&=-\overline{w}\overline{u}v-wu\overline{v}+w\overline{u}v+\overline{w}u\overline{v}=(\overline{u}v-u\overline{v})(w-\overline{w})\end{aligned}$$

そこで,
$$\begin{aligned}\overline{u}v-u\overline{v}&=(b-az)(c-d\overline{z})-(b-a\overline{z})(c-dz)\\&=-bd\overline{z}-acz+bdz+ac\overline{z}\\&=(bd-ac)(z-\overline{z})=(bd-ac)\cdot 2i\sin\alpha\end{aligned}$$

また, $w-\overline{w}=2i\sin\beta$ より,

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2=(bd-ac)(4i^2)\sin\alpha\sin\beta=4(ac-bd)\sin\alpha\sin\beta$$

［解 説］

いろいろな方針が考えられますが, 上の解では複素数平面を利用してみました。それさえ決まれば, 計算を簡略化するための置き換えを適当に行っていくと, 結論を導くことはさほど困難ではありません。

３ ［1999 岡山大］

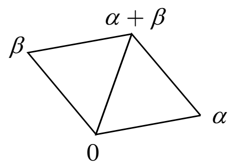
(1) $\alpha^2+\beta^2=-\alpha\beta$ で $\alpha\neq 0$ より，$1+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm 120^\circ)+i\sin(\pm 120^\circ)$$

$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角 θ は $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より，$\theta=120^\circ$，240°

(2) $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|=1$ より，$\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}=1$，$|\alpha|=|\beta|$

すると，4 点 0，α，$\alpha+\beta$，β を結ぶ四角形はひし形となり，しかも(1)より，3 点 0，α，$\alpha+\beta$ を結ぶ三角形は正三角形となる。



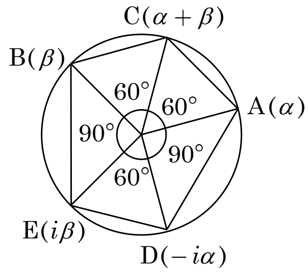
条件より $|\alpha+\beta|=3$ なので，$|\alpha|=|\beta|=3$

(3) 点 $-i\alpha$ は点 α を原点まわりに -90° 回転した点，点 $i\beta$ は点 β を原点まわりに 90° 回転した点である。

(i) $\theta=120^\circ$ のとき

5 点 α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{BOE}=\angle\mathrm{AOD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EOD}=60^\circ$ より，五角形 ACBED の面積は,

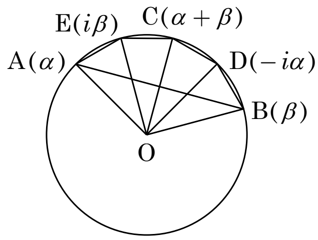
$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 60^\circ\right)\times 3+\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\right)\times 2=9+\frac{27}{4}\sqrt{3}$$



(ii) $\theta=240^\circ$ のとき

5 点 α，β，$\alpha+\beta$，$-i\alpha$，$i\beta$ は右図のような位置関係にあり，$\angle\mathrm{AOE}=\angle\mathrm{COE}=\angle\mathrm{COD}=\angle\mathrm{BOD}=30^\circ$ より，五角形 ABDCE の面積は,

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 30^\circ\right)\times 4-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\sin 120^\circ=9-\frac{9}{4}\sqrt{3}$$



［解 説］

複素数と図形に関する頻出問題です。(3)において, 位置関係の異なる 2 つの五角形を考えるのがポイントです。