

2024 入試対策
2次数学ランドマーク

曲線17題

理系 26か年

1998 — 2023

外林 康治 編著

電送数学舎

曲 線

【問題一覧】

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 (1) 点 $P(p, q)$ と円 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ($r > 0$) との距離 d とは, P と C 上の点 (x, y) との距離の最小値をいう。 P が C の外部にある場合と内部にある場合に分けて, d を表す式を求めよ。

(2) 2 つの円 $C_1: (x+4)^2 + y^2 = 81$ と $C_2: (x-4)^2 + y^2 = 49$ から等距離にある点 P の軌跡の方程式を求めよ。 [1998 東北大]

2 (1) 平面上に半径が R, r ($R > r$) の 2 円があり, それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ。

(2) 座標平面上で x 軸を準線とし, 定点 $A(0, a)$ を通る放物線について考える。ただし, $a > 0$ とする。

① そのような放物線の焦点 $F(s, t)$ の全体はどのような図形を描くか。

② x 軸上にない点 $P(p, q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。 [1998 九州大]

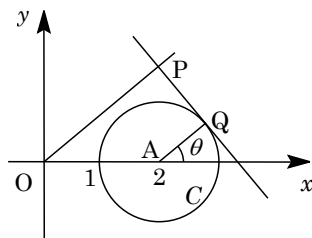
3 平面上に 2 定点 A, B をとる。 c は正の定数として, 平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = c$$

を満たすとき, 点 P の軌跡を求めよ。

[1999 京大]

4 xy 平面上において, 点 $A(2, 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。 C 上の点 Q における C の接線に原点 $O(0, 0)$ から下ろした垂線の足を P とする。図のように x 軸と線分 AQ のなす角を θ とする。ただし, θ は $-\pi < \theta \leq \pi$ を動くものとする。

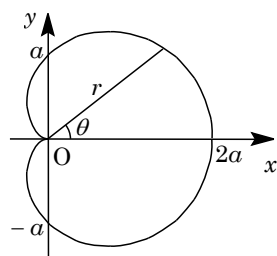


(1) 点 $P(x, y)$ の座標 (x, y) を θ を用いて表せ。

(2) 点 $P(x, y)$ の x 座標が最小になるとき, P の座標 (x, y) を求めよ。

(3) 直線 $x = k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるとき, k のとりうる値の範囲を求めよ。 [1999 筑波大]

5 $a > 0$ を定数として、極方程式 $r = a(1 + \cos \theta)$ により表される曲線 C_a を考える。次の問いに答えよ。



(1) 極座標が $(\frac{a}{2}, 0)$ の点を中心とし半径が $\frac{a}{2}$ である円 S を、

極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $P \neq O$ とを結ぶ直線が円 S と交わ

る点を Q とするとき、線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき、極座標が $(2a, 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。

[2000 神戸大]

6 C を双曲線 $2x^2 - 2y^2 = 1$ とする。 l, m を点 $(1, 0)$ を通り、 x 軸とそれぞれ $\theta, \theta + \frac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\frac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1) 直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2) PQ^2 を、 θ を用いて表せ。

(3) 直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき、 $\frac{1}{PQ^2} + \frac{1}{RS^2}$ は θ によらない定数と

なることを示せ。

[2001 筑波大]

7 C を曲線 $a^2x^2 + y^2 = 1$, l を直線 $y = ax + 2a$ とする。ただし、 a は正の定数である。

(1) C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2) C 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ。

(3) (1)における交点を P, Q とし、点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $R(X, Y)$ とする。 a が(1)の範囲を動くとき、 X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ。

[2002 広島大]

8 θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で、 $a^2 > 4b$ を満たす点 $P(a, b)$ から放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q, R とし、接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1, m_2 とおく。点 P は $\angle QPR = \theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

- (1) $m_1 < 0 < m_2$ のとき、 $\tan \theta$ を m_1 と m_2 で表せ。
- (2) G を数式で表せ。
- (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。

[2003 九州大]

9 楕円 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上の点で、 $x \geq 0$ の範囲にあり、定点 $A(0, -1)$ との距離が最大となる点を P とする。

- (1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。
- (2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする。 $\triangle APQ$ の面積が最大となるとき、点 Q の座標および $\triangle APQ$ の面積を求めよ。

[2004 筑波大]

10 実数 a に対して、曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2 + ay^2 = a^2 + 3a + 1$ によって定める。

- (1) C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し、その 4 定点の座標を求めよ。
- (2) a が正の実数全体を動くとき、 C_a が通過する範囲を図示せよ。

[2005 筑波大]

11 直線 $y = x$ を l で、直線 $y = -x$ を l' で表す。直線 l, l' のどちらの上にもない点 $A(a, b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l, l' とそれぞれ点 P, P' で交わりとする。点 Q を、 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$ を満たすようにとる。ただし、 O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき、点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。

[2006 大阪大]

12 d を正の定数とする。2 点 $A(-d, 0), B(d, 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, B, O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。
- (2) $AP^2 + BP^2$ および $AP \cdot BP$ を、 OP と d を用いて表せ。
- (3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき、 $AP^3 + BP^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

[2011 筑波大]

13 2つの双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$, $H: x^2 - y^2 = -1$ を考える。双曲線 H 上の点 $P(s, t)$ に対して、方程式 $sx - ty = 1$ で定まる直線を l とする。

- (1) 直線 l は点 P を通らないことを示せ。
- (2) 直線 l と双曲線 C は異なる2点 Q, R で交わることを示し、 $\triangle PQR$ の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。
- (3) (2)における3点 G, Q, R に対して、 $\triangle GQR$ の面積は点 $P(s, t)$ の位置によらず一定であることを示せ。

[2012 筑波大]

14 楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の、直線 $y = mx$ と平行な2接線を l_1, l_1' とし、 l_1, l_1' に直交する C の2接線を l_2, l_2' とする。

- (1) l_1, l_1' の方程式を m を用いて表せ。
- (2) l_1 と l_1' の距離 d_1 および l_2 と l_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし、平行な2直線 l, l' の距離とは、 l 上の1点と直線 l' の距離である。
- (3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。
- (4) l_1, l_1', l_2, l_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき、 S の最大値を求めよ。

[2013 筑波大]

15 曲線 $C: x^2 + 4y^2 = 4$ 上を動く点 P と、 C 上の定点 $Q(2, 0)$, $R(0, 1)$ がある。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle PQR$ の面積の最大値と、そのときの P の座標を求めよ。
- (2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で2つに分けたとき、直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

[2016 金沢大]

16 3辺の長さの和が2である三角形 ABC において、辺 BC の長さを a 、辺 CA の長さを b で表す。三角形 ABC を辺 BC を軸として1回転させてできる回転体の体積を V とする。以下の問いに答えよ。

- (1) a の値を固定して b の値を変化させたとき、 V が最大になるのは、三角形 ABC が辺 BC を底辺とする二等辺三角形となるときである。これを示せ。
- (2) a, b の値をともに変化させるとき、 V の最大値と、最大値を与える a, b の値をそれぞれ求めよ。

[2020 大阪大]

17 座標平面において、 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $P(3, 0)$ とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする $\triangle OAB$ を考える。ただし、円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

- (1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。
- (2) 円 C の半径を r とするとき、 r のとる値の範囲を求めよ。
- (3) r が(2)の範囲で変化するとき、点 B の軌跡の方程式を求めよ。また、その概形をかけ。

[2021 広島大]

曲 線

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

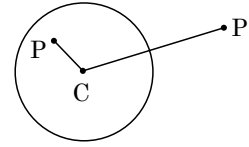
[1998 東北大]

(1) 円 C の中心を $C(a, b)$ とすると、(i) P が円 C の外部にあるとき

$$d = PC - r = \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2} - r$$

(ii) P が円 C の内部にあるとき

$$d = r - PC = r - \sqrt{(p-a)^2 + (q-b)^2}$$

(2) C_1 の中心を $A(-4, 0)$, C_2 の中心を $B(4, 0)$ とし、 C_1 と C_2 の交点を $Q(2, 3\sqrt{5})$, $R(2, -3\sqrt{5})$ とおく。(i) P が円 C_1, C_2 の外部にあるとき

$$PA - 9 = PB - 7 \text{ より } PA - PB = 2$$

 P は 2 点 A, B を焦点とする双曲線の点 B に近い方の枝である。

$$\text{その方程式を } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 + b^2 = c^2) \text{ とすると, } 2a = 2, \quad c = 4$$

$$a = 1, \quad b = \sqrt{15} \text{ から, } x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$$

(ii) P が円 C_1, C_2 の内部にあるとき

$$9 - PA = 7 - PB \text{ より } PA - PB = 2 \text{ なので, (i) と同じく } x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$$

(iii) P が円 C_1 の外部, 円 C_2 の内部にあるとき $PA - 9 = 7 - PB$ より $PA + PB = 16$ で、 P は 2 点 A, B を焦点とする楕円である。

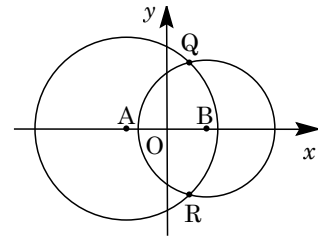
$$\text{その方程式を } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 - b^2 = c^2) \text{ とすると, } 2a = 16, \quad c = 4$$

$$a = 8, \quad b = 4\sqrt{3} \text{ から, } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

(iv) P が円 C_1 の内部, 円 C_2 の外部にあるとき

$$9 - PA = PB - 7 \text{ より } PA + PB = 16 \text{ なので, (iii) と同じく } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$

$$\text{以上より, } P \text{ の軌跡の方程式は, } x^2 - \frac{y^2}{15} = 1 \quad (1 \leq x), \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$$



[解 説]

今年、頻出の 2 次曲線の定義を利用する問題の 1 つです。おもしろい設定ですので、丁寧に書いてみました。なお、2 交点 Q, R に点 P が一致したときも条件をみやすのは明らかですので、軌跡は曲線全体になります。

2

[1998 九州大]

(1) 2円が共有点をもつ条件は、中心間距離が半径の差以上、半径の和以下より、

$$R - r \leq l \leq R + r$$

(2) 放物線は、準線が x 軸で y 軸と正の部分で交わることでより x 軸の上方にあり、焦点 $F(s, t)$ から頂点 $(s, \frac{t}{2})$ で、頂点と焦点の距離が $\frac{t}{2}$ から、その方程式は、

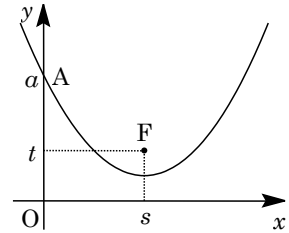
$$(x - s)^2 = 4 \cdot \frac{t}{2} \left(y - \frac{t}{2} \right) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点 $A(0, a)$ を通るので、 $s^2 = 2t \left(a - \frac{t}{2} \right)$

$$s^2 + t^2 - 2at = 0$$

$$s^2 + (t - a)^2 = a^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

よって②から、点 F は中心 $(0, a)$ 、半径 a の円を描く。



ただし、 $t > 0$ より原点を除く。

さて、①が点 $P(p, q)$ ($q > 0$) を通るとき、 $(p - s)^2 = 4 \cdot \frac{t}{2} \left(q - \frac{t}{2} \right)$ から、

$$(s - p)^2 + (t - q)^2 = q^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②は、 $s^2 + (t - a)^2 = a^2$ ($t \neq 0$) $\cdots \cdots \textcircled{4}$

ここで、③と④をとともにみたす (s, t) が存在する p, q の関係が求める条件なので、

(1)の結果から、

(i) $p \neq 0$ のとき

$$|q - a| \leq \sqrt{p^2 + (q - a)^2} \leq q + a \text{ より、} (q - a)^2 \leq p^2 + (q - a)^2 \leq (q + a)^2$$

左側の不等式はつねに成立するので、右側の不等式を変形して、

$$p^2 - 4aq \leq 0, \quad q \geq \frac{1}{4a} p^2$$

(ii) $p = 0$ のとき

③は $s^2 + (t - q)^2 = q^2$ となり、求める条件は $q = a$

(i)(ii)より、 $q \geq \frac{1}{4a} p^2$ ($p \neq 0$)、 $q = a$ ($p = 0$)

[解説]

(2)の設問は、一見(1)とは無関係と見えるものの、解のネックとなる部分で(1)の結果を利用します。

3

[1999 京都大]

△ABP に余弦定理を適用して、

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - 2\overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - |\overline{AB}|^2}{2} \dots\dots\dots ①$$

なお、①は3点P, A, Bが同一直線上にあるときも成立する。

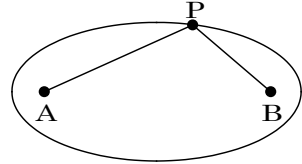
条件より、 $|\overline{PA}| \parallel |\overline{PB}| + \overline{PA} \cdot \overline{PB} = c \dots\dots\dots ②$

①を②に代入して、

$$|\overline{PA}| \parallel |\overline{PB}| + \frac{|\overline{PA}|^2 + |\overline{PB}|^2 - |\overline{AB}|^2}{2} = c$$

$$\left(|\overline{PA}| + |\overline{PB}| \right)^2 = 2c + |\overline{AB}|^2$$

$$|\overline{PA}| + |\overline{PB}| = \sqrt{2c + |\overline{AB}|^2} \dots\dots\dots ③$$



$\sqrt{2c + |\overline{AB}|^2}$ は定数なので、③より点Pは2点A, Bを焦点とする楕円を描く。

長軸の長さは $\sqrt{2c + |\overline{AB}|^2}$ 、短軸の長さは $2\sqrt{\frac{1}{4}(2c + |\overline{AB}|^2) - \frac{1}{4}|\overline{AB}|^2} = \sqrt{2c}$ と

なる。

[解 説]

2点A, Bの中点を原点として座標設定しようかと思いましたが、条件式②の形に注目して、ベクトルの大きさと内積を余弦定理で関連づけてみました。すると、楕円の定義式が導けました。