２０２５ 入試対策

２次数学ランドマーク

微分と積分35題

文系＋理系 27か年

１９９８ ー ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

微分と積分

【問題一覧】

（注）問題番号が，対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。 [1998 東京大]

2 (1) 曲線 $y=x^3$ と直線 $y=3x+a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2) a が(1)の範囲を動くとき, 3 つの交点を A, B, C とし, 点 $(a,\ 4a)$ を D とする。3 つの線分の長さの積 $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値を求めよ。 [1999 一橋大・文]

3 a を実数とする。x の 2 次方程式 $x^2-ax=2\displaystyle\int_0^1|t^2-at|\,dt$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。 [2000 京都大・文]

4 $f(x)=x^4+x^3-3x^2$ とおく。曲線 $y=f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただ一つ引けるとし, しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの a の値を求めよ。 [2001 大阪大・理]

5 xy 平面上の曲線 $C:y=x^3$ 上の点 P における接線を, P を中心にして反時計回りに $45°$ 回転して得られる直線を L とする。C と L が, 相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。 [2001 京都大・理]

6 a, b, c を実数とする。$y=x^3+3ax^2+3bx$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき $a^2>b$ が成立することを示し, さらにこれらの交点の x 座標のすべては開区間 $(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b})$ に含まれていることを示せ。 [2002 京都大・理]

7 実数 t に対して, u の 3 次方程式 $u^3-3u+2t=0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて, $x=f(t)$, $y=-2t$ （t は実数）と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め, $f(t)$ のグラフをかけ。 [2003 千葉大・理]

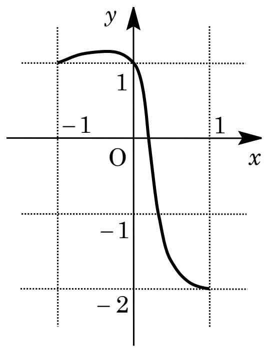
8 放物線 $C:y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし, C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$, 原点を O とする。ただし, $a<b$, $m\neq 0$, $\alpha<\beta$ とする。線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。 [2003 大阪大・文]

9 区間$-1 \leqq x \leqq 1$で定義された関数$f(x)$が，

$$f(-1)=f(0)=1,\ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geqq -1$を示せ。



[2004 京都大・文]

10 関数$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) aを実数とする。$f(x)=a$を満たす実数xの個数を求めよ。

(2) $g(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。 [2004 東京大・文]

11 aを正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $y=\left|x^2-a|x|\right|$のグラフをかけ。

(2) $F(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx$を求めよ。

(3) $F(a)$の最小値を求めよ。 [2005 神戸大・文]

12 $0 \leqq k \leqq 1$ を満たす実数 k に対して，xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域D, E, Fを考える。

Dは連立不等式$y \geqq x^2$，$y \leqq kx$で表される領域

Eは連立不等式$y \leqq x^2$，$y \geqq kx$で表される領域

Fは連立不等式$y \leqq -x^2+2x$，$y \geqq kx$で表される領域

(1) 領域$D \cup (E \cap F)$の面積$m(k)$を求めよ。

(2) (1)で求めた面積$m(k)$を最小にするkの値と，その最小値を求めよ。

[2006 名古屋大・文]

13 (1) 関数$f(x)=2x^3-3x^2+1$のグラフをかけ。

(2) 方程式$f(x)=a$（a は実数）が相異なる 3 つの実数解$\alpha<\beta<\gamma$をもつとする。$l=\gamma-\alpha$をβのみを用いて表せ。

(3) aが(2)の条件のもとで変化するときlの動く範囲を求めよ。 [2007 名古屋大・理]

14 xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1) $-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき, k の満たす条件を求めよ。

(2) k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。 [2007 大阪大・文]

15 放物線 $C: y=x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。 [2008 九州大・文]

16 $f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1) $f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2) α が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3) $f(x)=0$ の解を小さい順に α_1，α_2，α_3 とすれば，

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\ g(\alpha_2)=\alpha_1,\ g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。 [2009 神戸大・理]

17 k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C: y=kx^2\ (x\geqq 0)$ と 2 つの直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha-\beta$ の値を求めよ。

(2) $\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ。

(3) 曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。 [2010 広島大・文]

18 3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1) V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき, V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2010 東京大・理]

19 xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。 [2011 京都大・理]

20 関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<q$)。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 $p,\ q$ もそれぞれ求めよ。 [2012 九州大・文]

21 a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。 [2012 名古屋大・理]

22 c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。 [2013 神戸大・理]

$\boxed{23}$ 原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。 ［2013 一橋大・文］

$\boxed{24}$ $a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1) $M(a)$ を求めよ。

(2) 実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3) a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。 ［2015 東北大・文］

$\boxed{25}$ 実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を a, b を用いて表せ。

(2) $b\geqq 0$ のとき，M を a, b を用いて表せ。

(3) a, b が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。

［2015 東京医科歯科大・医］

$\boxed{26}$ 座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，$a,\ b$ は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。 ［2016 九州大・文］

27 a, b, c を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta$, $-\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。 [2017 筑波大・理]

28 $a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t\geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2) (1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

[2017 広島大・理]

29 a を正の定数とする。2 次関数 $f(x)=ax^2$ と 3 次関数 $g(x)=x(x-4)^2$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=g(x)$ について，極値を求め，そのグラフを描け。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。

(3) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき，2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。

[2017 名古屋大・文]

30 実数 a, b, c に対し，関数 $f(x)=x^3-3ax^2+bx+c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり，$f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は，すべての x に対し等式 $f(x)=f'(x)g(x)-6x$ を満たしているとする。

(1) b と c を a で表せ。

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 3 個の実数解をもつように，a の値の範囲を定めよ。

[2019 北海道大・文]

31 s を実数とする。等式 $f(x)=|x^2-x|-s-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\{f(t)-|t|\}dt$ を満たす関数 $f(x)$ が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 3 点で交わる s の値の範囲を求めよ。

(3) s が(2)で求めた範囲にあるとする。$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積 $A(s)$ を求めよ。

(4) (3)における $A(s)$ の最小値を与える s を求めよ。 [2020 岡山大・文]

32 a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y=ax^3-2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

[2021 東京大・文]

33 座標平面上の曲線 $y=x^3+x^2$ を C とする。また，a を実数とし，L_a を点 $(-1,\ 0)$ を通る傾き a の直線とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C と L_a がちょうど 2 つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ。

(2) a が(1)の条件を満たすそれぞれの場合について，C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) C と L_a がちょうど 3 つの共有点をもち，さらに C と L_a で囲まれた 2 つの部分の面積の差の絶対値が $\dfrac{3}{2}$ となるとき，a の値を求めよ。 [2022 広島大・理]

34 a を実数とし，2 つの関数 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+(a-2)x+2a+1$ と $g(x)=-x^2+1$ を考える。

(1) $f(x)-g(x)$ を因数分解せよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点が 2 個であるような a を求めよ。

(3) a は(2)の条件を満たし，さらに $f(x)$ の極大値は 1 よりも大きいとする。$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフを同じ座標平面に図示せよ。 [2023 名古屋大・文]

$\boxed{35}$ 次の問いに答えよ。

(1) α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=\alpha\,,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(2) 関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots$を次の関係式で定める。

$$f_1(x)=3x\,,\ f_{n+1}(x)=(n+2)x^{n+1}+\left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。 ［2024 北海道大・理］

微分と積分

【解答例と解説】

（注）問題番号が，対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1 ［1998 東京大］

$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$より，

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

$f'(0)=-4<0$から，$f'(x)=0$は 2 つの実数解をもち，これを$x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$とおくと，

$$\alpha=\frac{a-\frac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3},\quad \beta=\frac{a-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3}$$

極大値と極小値の差を$g(a)$とすると，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned}g(a)&=f(\alpha)-f(\beta)\\&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\&=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=9\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{3}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}\right\}^3\\&=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$g(a)$は$a-\dfrac{1}{a}=0$，すなわち$a=\pm1$のとき最小になる。

［解 説］

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題で，上のような特殊な解法があります。ただし本問では，$f'(x)=0$の解が$x=\dfrac{2}{3}a$，$-\dfrac{2}{3a}$となりますので，a の正負で場合分けをして，直接$g(a)$を求めても，計算量がやや増える程度ですみます。

$\boxed{2}$ ［1999 一橋大・文］

(1) $y = x^3$ ………①，$y = 3x + a$ ………②

①②より，$x^3 - 3x = a$ ………③

①と②が異なる 3 点で交わる条件は，曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = a$ が異なる 3 点で交わる条件と同値である。

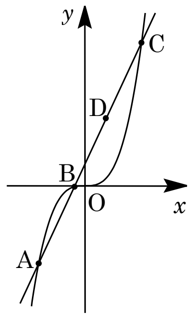
ここで，$f(x) = x^3 - 3x$ とおくと，

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右表より，求める条件は $-2 < a < 2$

(2) ③の解を $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma$ （$\alpha < \beta < \gamma$）として，$\mathrm{A}(\alpha,\ 3\alpha + a)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 3\beta + a)$，$\mathrm{C}(\gamma,\ 3\gamma + a)$ とおく。



このとき，③を $x^3 - 3x - a = 0$ と変形すると，

$$x^3 - 3x - a = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots\cdots\cdots ④$$

このとき，$\mathrm{DA} = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (3\alpha + a - 4a)^2}$

$$= \sqrt{10(\alpha - a)^2} = \sqrt{10}\,|\alpha - a|$$

同様にして，$\mathrm{DB} = \sqrt{10}\,|\beta - a|$，$\mathrm{DC} = \sqrt{10}\,|\gamma - a|$

$$\begin{aligned}\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC} &= 10\sqrt{10}\,|\alpha - a||\beta - a||\gamma - a| \\ &= 10\sqrt{10}\,|(a - \alpha)(a - \beta)(a - \gamma)| \\ &= 10\sqrt{10}\,|a^3 - 3a - a| \quad (④より) \\ &= 10\sqrt{10}\,|a^3 - 4a|\end{aligned}$$

ここで，$g(a) = a^3 - 4a$ とおくと，$g'(a) = 3a^2 - 4 = (\sqrt{3}a + 2)(\sqrt{3}a - 2)$

a	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

右表より，$|g(a)|$ は $a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$ をとる。よって，$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値は

$10\sqrt{10}\cdot\dfrac{16}{9}\sqrt{3} = \dfrac{160}{9}\sqrt{30}$ となる。

［解 説］

微分法の応用に関する問題です。本問のポイントは，強いて言えば，(2)で④式に注目することです。

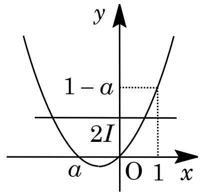
$\boxed{3}$ ［2000 京都大・文］

$I=\int_0^1 |t^2-at|dt$ とおくと, $x^2-ax=2I$ の解の個数は, $y=x^2-ax$ と $y=2I$ のグラフの共有点の個数と一致する。

(i) $a<0$ のとき

$$I=\int_0^1(t^2-at)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}$$

$$2I-(1-a)=\frac{2}{3}-a-1+a=-\frac{1}{3}<0$$



よって, $0<2I<1-a$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

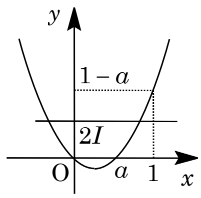
(ii) $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$I=\int_0^a -(t^2-at)dt+\int_a^1(t^2-at)dt=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_0^a+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{a}{2}t^2\right]_a^1$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$$

$$2I-(1-a)=\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}-1+a=\frac{1}{3}(2a^3-1)$$

(ii-i) $2I\leqq 1-a\left(0\leqq a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ のとき

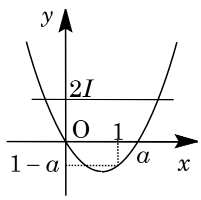


$0<2I\leqq 1-a$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii-ii) $2I>1-a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a\leqq 1\right)$ のとき

$0<1-a<2I$ となるので, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解はない。

(iii) $1<a$ のとき



$0<2I$ となるので, 右図より, $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に解はない。

(i)～(iii)より, 求める解の個数は,

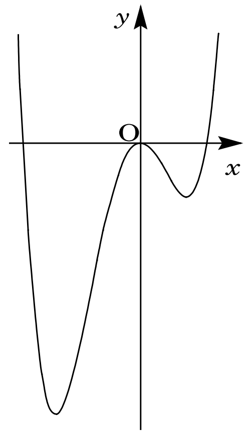
$$a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ のとき 1 個},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}<a \text{ のとき 0 個}$$

［解 説］

当然ですが, $I>0$ です。これが場合分けを少なくし, 議論をスッキリさせるポイントです。

4 ［2001 大阪大・理］

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より，$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$



接点を$(t,\ t^4+t^3-3t^2)$とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^4+t^3-3t^2)=(4t^3+3t^2-6t)(x-t)$$

$$y=(4t^3+3t^2-6t)x-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots①$$

①が点$(0,\ a)$を通るので，

$$a=-3t^4-2t^3+3t^2\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$g(t)=-3t^4-2t^3+3t^2$ とおくと，

$$g'(t)=-12t^3-6t^2+6t$$

$$=-6t(2t-1)(t+1)$$

点$(0,\ a)$を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は，②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

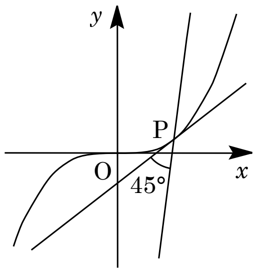
すると，右表において $2>\frac{5}{16}$ なので，$a=2$ のときである。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	2	↘	0	↗	$\frac{5}{16}$	↘

［解 説］

問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは，4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。

5 [2001 京都大・理]



$C: y = x^3$ より $y' = 3x^2$ となるので，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における接線の傾きは $3t^2$ となる。この接線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta = 3t^2$ である。

また，この接線を P のまわりに $45°$ 回転して得られる直線 L と，x 軸の正の向きとのなす角を φ とすると，

$$\tan\varphi = \tan(\theta + 45°) = \frac{\tan\theta + \tan 45°}{1 - \tan\theta\tan 45°} = \frac{3t^2 + 1}{1 - 3t^2}$$

よって，$t \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，直線 $L: y - t^3 = \frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x - t)$

なお，$t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，直線 L は $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ となり，条件を満たさない。

すると，C と L の共有点は，$x^3 = \frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t) + t^3$ より，

$$x^3 - t^3 - \frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t) = 0,\ (x-t)\left(x^2 + tx + t^2 + \frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right) = 0$$

よって，$x = t$ または $x^2 + tx + t^2 + \frac{3t^2+1}{3t^2-1} = 0$ ………①

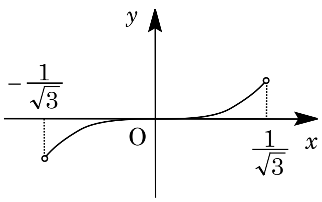
求める条件は，①が $x \neq t$ の異なる 2 実数解をもつことより，

$$t^2 + t^2 + t^2 + \frac{3t^2+1}{3t^2-1} \neq 0 \cdots\cdots②,\ D = t^2 - 4\left(t^2 + \frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right) > 0 \cdots\cdots③$$

②は $\frac{9t^4+1}{3t^2-1} \neq 0$ となるので，つねに成立する。

③より，$\frac{9t^4+9t^2+4}{3t^2-1} < 0$，$3t^2 - 1 < 0$

よって，$-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ より，点 P の範囲を図示すると右図のようになる。



［解 説］

方針に迷いが生ずることはなく，どんどん計算を進めていくことができます。