

2025 入試対策  
2次数学ランドマーク

# 図形と式37題

文系+理系 27か年

1998 - 2024

外林 康治 編著

電送数学舎

---

# 図形と式

## 【問題一覧】

---

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点  $(a, b)$  の集合を式で表し、図示せよ。

$$x - y < 0, \quad x + y < 2, \quad ax + by < 1 \quad [1998 \text{ 北海道大} \cdot \text{理}]$$

2  $c$  を  $c > \frac{1}{4}$  を満たす実数とする。 $xy$  平面上の放物線  $y = x^2$  を  $A$  とし、直線  $y = x - c$  に関して  $A$  と対称な放物線を  $B$  とする。点  $P$  が放物線  $A$  上を動き、点  $Q$  が放物線  $B$  上を動くとき、線分  $PQ$  の長さの最小値を  $c$  を用いて表せ。[1999 東京大・文]

3 曲線  $y = x^2$  の点  $(a, a^2)$  での接線を  $l$  とする。 $l$  上の点で  $x$  座標が  $a - 1$  と  $a + 1$  のものをそれぞれ  $P$  および  $Q$  とする。 $a$  が  $-1 \leq a \leq 1$  の範囲を動くとき線分  $PQ$  の動く範囲の面積を求めよ。[1999 東北大・理]

4  $xy$  平面内の領域  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$  において、 $1 - ax - by - axy$  の最小値が正となるような定数  $a, b$  を座標とする点  $(a, b)$  の範囲を図示せよ。[2000 東京大・文]

5 放物線  $y = x^2$  上に、直線  $y = ax + 1$  に関して対称な位置にある異なる 2 点  $P, Q$  が存在するような  $a$  の範囲を求めよ。[2001 一橋大・文]

6 実数  $t$  に対して、 $xy$  平面上の直線  $(1 - t^2)x - 2ty = 1 + t^2$  は、 $t$  の値によらずある円  $C$  に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円  $C$  の方程式を求めよ。また、接点の座標を求めよ。

(2)  $t$  が  $t \geq 1$  の範囲を動くとき、直線の通過する範囲を図示せよ。[2002 神戸大・文]

7  $a, b$  を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点  $(x, y)$  全体からなる領域を  $D$  とする。

$$x + 3y \geq a, \quad 3x + y \geq b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

領域  $D$  における  $x + y$  の最小値を求めよ。[2003 東京大・文]

8  $xy$  平面の放物線  $y = x^2$  上の 3 点  $P, Q, R$  が次の条件を満たしている。

$\triangle PQR$  は 1 辺の長さ  $a$  の正三角形であり、点  $P, Q$  を通る直線の傾きは  $\sqrt{2}$  である。

このとき、 $a$  の値を求めよ。

[2004 東京大]

9 不等式  $y \leq -(x-1)^2$  の表す領域を  $A_1$ 、不等式  $y \leq -(x+1)^2$  の表す領域を  $A_2$  とする。 $A_1$  と  $A_2$  の和集合  $A_1 \cup A_2$  を  $A$  とする。また、不等式  $y \geq (x-a)^2 + b$  の表す領域を  $B$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $a=0$ 、 $b=-1$  とするとき、 $A$  と  $B$  の共通部分  $A \cap B$  の面積を求めよ。
- (2)  $A_1$  と  $B$  の共通部分  $A_1 \cap B$  が空集合でないための条件を  $a, b$  で表せ。
- (3)  $A$  と  $B$  の共通部分  $A \cap B$  が空集合でないとき点  $(a, b)$  の存在範囲を座標平面に図示せよ。 [2005 金沢大・文]

10  $a$  を定数とし、 $x$  の 2 次関数  $f(x)$ 、 $g(x)$  を次のように定める。

$$f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = -2(x-a)^2 + \frac{a^2}{3}$$

- (1) 2 つの放物線  $y = f(x)$  と  $y = g(x)$  が 2 つの共有点をもつような  $a$  の範囲を求めよ。
- (2) (1) で求めた範囲に属する  $a$  に対して、2 つの放物線によって囲まれる図形を  $C_a$  とする。 $C_a$  の面積を  $a$  で表せ。
- (3)  $a$  が (1) で求めた範囲を動くとき、少なくとも 1 つの  $C_a$  に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。 [2005 一橋大・文]

11  $\theta$  を  $0 \leq \theta < 2\pi$  を満たす実数とする。時刻  $t$  における座標が

$$x = t \cos \theta, \quad y = 1 - t^2 + t \sin \theta$$

で与えられるような動点  $P(x, y)$  を考える。 $t$  が実数全体を動くとき、点  $P$  が描く曲線を  $C$  とする。 $C$  が  $x$  軸の  $x \geq 0$  の部分と交わる点を  $Q$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $\theta = \frac{\pi}{4}$  のとき、 $Q$  の  $x$  座標を求めよ。
- (2)  $\theta$  が変化すると曲線  $C$  も変化する。 $\theta$  が  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲を変化するとき、 $C$  が通過する範囲を  $xy$  平面上に図示せよ。
- (3)  $\theta$  が変化すると点  $Q$  も変化する。 $Q$  の  $x$  座標が最大となるような  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) について  $\tan \theta$  の値を求めよ。 [2005 大阪大・理]

**12** 座標平面上に 3 点  $O(0, 0)$ ,  $A(4, 2)$ ,  $B(6, 0)$  を考える。平面上の直線  $l$  に関して点  $A$  と対称な点が線分  $OB$  上にあるとき、直線  $l$  をピッタリ直線と呼ぶことにする。

- (1) 点  $P(p, q)$  を通るピッタリ直線  $l$  があるとし、 $l$  に関して  $A$  と対称な点を  $A'(t, 0)$  ( $0 \leq t \leq 6$ ) とするとき、 $p, q, t$  の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) ピッタリ直線が 2 本通る点  $P(p, q)$  の存在範囲を求め、それを図示せよ。図には三角形  $OAB$  も書いておくこと。
- (3) 点  $P(p, q)$  を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点  $P(p, q)$  の存在範囲を求め、それを図示せよ。 [2006 名古屋大・理]

**13** 座標平面上の 2 点  $P, Q$  が、曲線  $y = x^2$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 上を自由に動くとき、線分  $PQ$  を  $1:2$  に内分する点  $R$  が動く範囲を  $D$  とする。ただし、 $P = Q$  のときは  $R = P$  とする。

- (1)  $a$  を  $-1 \leq a \leq 1$  を満たす実数とすると、点  $(a, b)$  が  $D$  に属するための  $b$  の条件を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $D$  を図示せよ。 [2007 東京大・理]

**14**  $a$  を正の実数とする。点  $(x, y)$  が、不等式  $x^2 \leq y \leq x$  の定める領域を動くとき、つねに  $\frac{1}{2} \leq (x-a)^2 + y \leq 2$  となる。 $a$  の値の範囲を求めよ。 [2008 一橋大・文]

**15** 座標平面上の 3 点  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(x, y)$  を考える。ただし  $y > 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $\triangle ABC$  が二等辺三角形であるとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。
- (2)  $\triangle ABC$  が鋭角三角形であるとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。
- (3) 3 つの角  $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$  をそれぞれ  $\alpha, \beta, \gamma$  とし、不等式

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき  $x, y$  が満たす条件を求め、点  $C$  の存在範囲を図示せよ。

- (4)  $x, y$  が(3)の条件を満たすとき、 $\gamma$  がとりうる値の範囲を求めよ。 [2009 広島大・理]

**16** 実数  $a$  に対し、不等式  $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$  の表す座標平面上の領域を  $D(a)$  とおく。

(1)  $-1 \leq a \leq 2$  を満たすすべての  $a$  に対し  $D(a)$  の点となるような点  $(p, q)$  の範囲を図示せよ。

(2)  $-1 \leq a \leq 2$  を満たすいずれかの  $a$  に対し  $D(a)$  の点となるような点  $(p, q)$  の範囲を図示せよ。 [2011 東北大・理]

**17** 以下の問いに答えよ。

(1)  $t$  を正の実数とすると、 $|x| + |y| = t$  の表す  $xy$  平面上の図形を図示せよ。

(2)  $a$  を  $a \geq 0$  を満たす実数とする。 $x, y$  が連立不等式

$$ax + (2-a)y \geq 2, \quad y \geq 0$$

を満たすとき、 $|x| + |y|$  のとりうる値の最小値  $m$  を、 $a$  を用いた式で表せ。

(3)  $a$  が  $a \geq 0$  の範囲を動くとき、(2)で求めた  $m$  の最大値を求めよ。 [2011 神戸大・理]

**18** 座標平面上に 2 点  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, 0)$  と直線  $l$  があり、 $A$  と  $l$  の距離と  $B$  と  $l$  の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1)  $l$  は  $y$  軸と平行でないことを示せ。

(2)  $l$  が線分  $AB$  と交わる時、 $l$  の傾きを求めよ。

(3)  $l$  が線分  $AB$  と交わらないとき、 $l$  と原点との距離を求めよ。 [2012 神戸大]

**19**  $s, t$  を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)  $x = s + t + 1$ ,  $y = s - t - 1$  とおく。 $s, t$  が  $s \geq 0, t \geq 0$  の範囲を動くとき、点  $(x, y)$  の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2)  $x = st + s - t + 1$ ,  $y = s + t - 1$  とおく。 $s, t$  が実数全体を動くとき、点  $(x, y)$  の動く範囲を座標平面内に図示せよ。 [2012 東北大・理]

**20**  $a, b, c$  は実数とし、 $a < b$  とする。平面上の相異なる 3 点  $A(a, a^2)$ ,  $B(b, b^2)$ ,  $C(c, c^2)$  が、辺  $AB$  を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1)  $a$  を  $b, c$  を用いて表せ。

(2)  $b - a \geq 2$  が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺  $AB$  の長さの最小値と、そのときの  $A, B, C$  の座標をそれぞれ求めよ。

[2013 神戸大・文]

**21** 座標平面上の 2 点  $A(0, 1)$   $B(t, 0)$  を考える。ただし、 $t \geq 0$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分  $AB$  を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について、2 点  $A, B$  以外の頂点の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた 2 点のうち  $x$  座標が小さい方を  $C$  とする。 $t$  を動かすとき、点  $C$  の軌跡を図示せよ。
- (3)  $k$  を定数とする。点  $B$  と直線  $y = kx$  上の点  $P$  をそれぞれうまく選ぶことで 3 点  $A, B, P$  を頂点とする正三角形ができるとき、 $k$  の値の範囲を求めよ。

[2013 広島大・理]

**22** 座標平面の原点を  $O$  で表す。線分  $y = \sqrt{3}x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 上の点  $P$  と、線分  $y = -\sqrt{3}x$  ( $-2 \leq x \leq 0$ ) 上の点  $Q$  が、線分  $OP$  と線分  $OQ$  の長さの和が 6 となるように動く。このとき、線分  $PQ$  の通過する領域を  $D$  とする。

- (1)  $s$  を  $0 \leq s \leq 2$  を満たす実数とすると、点  $(s, t)$  が  $D$  に入るような  $t$  の範囲を求めよ。
- (2)  $D$  を図示せよ。

[2014 東京大・理]

**23** 座標平面上の原点を  $O$  とする。点  $A(a, 0)$ 、点  $B(0, b)$  および点  $C$  が、 $OC = 1$ 、 $AB = BC = CA$  を満たしながら動く。

- (1)  $s = a^2 + b^2$ 、 $t = ab$  とする。 $s$  と  $t$  の関係を表す等式を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  の面積のとりうる値の範囲を求めよ。

[2015 一橋大・文]

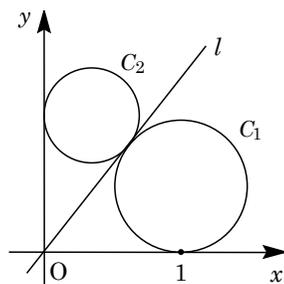
**24**  $l$  を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに以下の 3 条件(i), (ii), (iii) で定まる円  $C_1$ 、 $C_2$  を考える。

(i) 円  $C_1$ 、 $C_2$  は 2 つの不等式  $x \geq 0$ 、 $y \geq 0$  で定まる領域に含まれる。

(ii) 円  $C_1$ 、 $C_2$  は直線  $l$  と同一点で接する。

(iii) 円  $C_1$  は  $x$  軸と点  $(1, 0)$  で接し、円  $C_2$  は  $y$  軸と接する。

円  $C_1$  の半径を  $r_1$ 、円  $C_2$  の半径を  $r_2$  とする。 $8r_1 + 9r_2$  が最小となるような直線  $l$  の方程式と、その最小値を求めよ。



[2015 東京大・文]

**25** 座標平面上の2点  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, -1)$  を考える。また、 $P$  を座標平面上の点とし、その  $x$  座標の絶対値は1以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点  $P$  の範囲を図示し、その面積を求めよ。

(i) 頂点の  $x$  座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで、点  $A$ ,  $P$ ,  $B$  をすべて通るものがある。

(ii) 点  $A$ ,  $P$ ,  $B$  は同一直線上にある。 [2015 東京大・文]

**26** 座標平面上の3点  $P(x, y)$ ,  $Q(-x, -y)$ ,  $R(1, 0)$  が鋭角三角形をなすための  $(x, y)$  についての条件を求めよ。また、その条件を満たす点  $P(x, y)$  の範囲を図示せよ。 [2016 東京大・文]

**27**  $a, b$  を実数とする。 $y = |x^2 - 4|$  で表される曲線を  $C$  とし、 $y = ax + b$  で表される直線を  $l$  とする。

(1)  $l$  が点  $(-2, 0)$  を通り、 $l$  と  $C$  がちょうど3つの共有点をもつような  $a, b$  の条件を求めよ。

(2)  $l$  と  $C$  がちょうど3つの共有点をもつような点  $(a, b)$  の軌跡を  $ab$  平面上に図示せよ。 [2017 東北大・理]

**28** 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(A)を満たす座標平面上の点  $(u, v)$  の存在範囲を図示せよ。

(A) 2次式  $t^2 - ut + v$  は、 $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$  を満たす実数  $x, y$  を用いて  $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$  と因数分解される。

(2) 次の条件(B)を満たす座標平面上の点  $(u, v)$  の存在範囲を図示せよ。

(B) 2次式  $t^2 - ut + v$  は、 $0 \leq x \leq 1$ ,  $1 \leq y \leq 2$  を満たす実数  $x, y$  を用いて  $t^2 - ut + v = (t-x)(t-y)$  と因数分解される。

(3) 座標平面上の点  $(x, y)$  が4点  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(0, 2)$  を頂点とする長方形の周および内部を動くとき、点  $(x+y, xy)$  の動く範囲の面積を求めよ。

[2018 広島大・理]

**29**  $xy$  平面における2つの放物線  $C: y = (x-a)^2 + b$ ,  $D: y = -x^2$  を考える。

(1)  $C$  と  $D$  が異なる2点で交わり、その2交点の  $x$  座標の差が1となるように実数  $a, b$  が動くとき、 $C$  の頂点  $(a, b)$  の軌跡を図示せよ。

(2) 実数  $a, b$  が(1)の条件を満たしながら動くとき、 $C$  と  $D$  の2交点を結ぶ直線が通過する範囲を求め、図示せよ。 [2018 東北大・理]

**30**  $\theta$  が  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき、座標平面上の直線  $y = (\sin \theta)x + \cos \theta$  上の点  $(x, y)$  について、不等式  $-|x| \leq y \leq \sqrt{x^2 + 1}$  が成り立つことを示せ。

[2018 信州大・医]

**31** 放物線  $y = x^2$  のうち  $-1 \leq x \leq 1$  を満たす部分を  $C$  とする。座標平面上の原点  $O$  と点  $A(1, 0)$  を考える。

(1) 点  $P$  が  $C$  上を動くとき、 $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OP}$  を満たす点  $Q$  の軌跡を求めよ。

(2) 点  $P$  が  $C$  上を動き、点  $R$  が線分  $OA$  上を動くとき、 $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$  を満たす点  $S$  が動く領域を座標平面上に図示し、その面積を求めよ。 [2018 東京大・文]

**32** 座標平面上の直線  $l$  を  $y = ax - a - 2$ 、直線  $m$  を  $y = bx + 3b$  とおく。直線  $l$  と直線  $m$  は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし、 $a, b$  は  $l$  と  $m$  の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線  $l$  と直線  $m$  の交点  $P$  の軌跡を求めよ。

(2) 点  $A(1, -2)$ 、点  $B(-3, 0)$  に対して、線分  $AP$  および線分  $BP$  の長さを  $a$  を用いて表せ。

(3)  $\triangle APB$  の面積が最大となるときの  $a$  の値を求めよ。 [2019 熊本大・医]

**33**  $x$  の 2 次関数で、そのグラフが  $y = x^2$  のグラフと 2 点で直交するようなものをすべて求めよ。ただし、2 つの関数のグラフがある点で直交するとは、その点が 2 つのグラフの共有点であり、かつ接線どうしが直交することをいう。 [2020 京都大・文]

**34**  $a, b$  を実数とする。座標平面上の放物線  $C: y = x^2 + ax + b$  は放物線  $y = -x^2$  と 2 つの共有点を持ち、一方の共有点の  $x$  座標は  $-1 < x < 0$  を満たし、他方の共有点の  $x$  座標は  $0 < x < 1$  を満たす。

(1) 点  $(a, b)$  のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。

(2) 放物線  $C$  の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。 [2021 東京大]

**35**  $\alpha$  は  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  を満たす実数とする。  $\angle A = \alpha$  および  $\angle P = \frac{\pi}{2}$  を満たす直角三角形 APB が、次の 2 つの条件(a), (b)を満たしながら、時刻  $t = 0$  から時刻  $t = \frac{\pi}{2}$  まで  $xy$  平面上を動くとする。

(a) 時刻  $t$  での点 A, B の座標は、それぞれ  $A(\sin t, 0)$ ,  $B(0, \cos t)$  である。

(b) 点 P は第 1 象限内にある。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 P はある直線上を動くことを示し、その直線の方程式を  $\alpha$  を用いて表せ。

(2) 時刻  $t = 0$  から時刻  $t = \frac{\pi}{2}$  までの間に点 P が動く道のりを  $\alpha$  を用いて表せ。

(3)  $xy$  平面内において、連立不等式  $x^2 - x + y^2 < 0$ ,  $x^2 + y^2 - y < 0$  により定まる領域を  $D$  とする。このとき、点 P は領域  $D$  には入らないことを示せ。

[2022 東京工業大・理]

**36** 関数  $f(x)$  に対して、座標平面上の 2 つの点  $P(x, f(x))$ ,  $Q(x+1, f(x)+1)$  を考える。実数  $x$  が  $0 \leq x \leq 2$  の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形の面積を  $S$  とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 関数  $f(x) = -2|x-1|+2$  に対して、 $S$  の値を求めよ。

(2) 関数  $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$  に対して、曲線  $y = f(x)$  の接線で、傾きが 1 のものの方程式を求めよ。

(3) 設問(2)の関数  $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2$  に対して、 $S$  の値を求めよ。 [2023 東北大・文]

**37**  $a$  と  $r$  を正の実数とする。座標平面上の放物線  $y = x^2$  と、中心  $(0, a)$ 、半径  $r$  の円  $C$  を考える。次の問いに答えよ。

(1)  $a = r$  とする。このとき、放物線  $y = x^2$  と円  $C$  との共有点が 1 つのみになるような  $r$  の値の範囲を求めよ。

(2) 円  $C$  が不等式  $y > 0$  を表す領域に含まれるための必要十分条件を  $a$  と  $r$  を用いて表せ。

(3)  $a$  と  $r$  は(2)で求めた条件を満たすとする。このとき、放物線  $y = x^2$  と円  $C$  との共有点がちょうど 2 つになるような  $(r, a)$  の範囲を  $ra$  平面に図示せよ。

(4) 正の実数  $s$  に対し、中心  $(0, a + r + s)$ 、半径  $s$  の円を  $C'$  とする。円  $C$  と円  $C'$  は次の条件(i)と(ii)を満たすとする。

(i) 円  $C$  は不等式  $y > 0$  の表す領域に含まれ、さらに放物線  $y = x^2$  と円  $C$  との共有点はちょうど 2 つである。

(ii) 放物線  $y = x^2$  と円  $C'$  との共有点はちょうど 2 つである。

このとき、 $s$  を  $r$  を用いて表せ。

[2024 広島大・文]

---

# 図形と式

## 【解答例と解説】

---

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1998 北海道大・理]

条件より、 $x - y < 0$  ……①,  $x + y < 2$  ……②

$$ax + by < 1 \text{ ……③}$$

①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③に $(x, y) = (0, 0)$ を代入すると、つねに成立することより、③の表す領域は、直線 $ax + by = 1$  ……④を境界とし、原点を含む側である。

ここで、直線 $x - y = 0$ と④との交点は、

$$(a + b)x = 1, \quad x = \frac{1}{a + b} \quad (a \neq -b)$$

また、直線 $x + y = 2$ と④との交点は、

$$ax + b(2 - x) = 1, \quad x = \frac{1 - 2b}{a - b} \quad (a \neq b)$$

以上より、①②③が三角形の内部を表す条件は、

$$\frac{1}{a + b} < 0 \text{ ……⑤} \text{ かつ } \frac{1 - 2b}{a - b} < 1 \text{ ……⑥}$$

⑤より、 $a + b < 0, \quad b < -a$  ……⑦

⑥より、 $(1 - 2b)(a - b) < (a - b)^2$  となり、

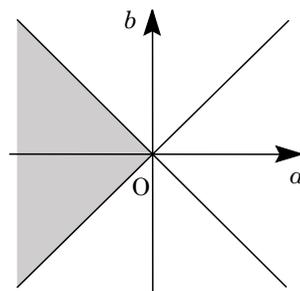
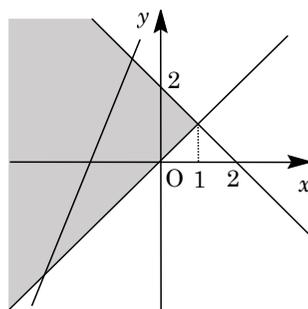
$$(a - b)(a - b - 1 + 2b) > 0$$

$$(a - b)(a + b - 1) > 0$$

⑦から $a + b - 1 < 0$ なので、 $a - b < 0, \quad b > a$  ……⑧

⑥⑧より、 $a < b < -a$

点 $(a, b)$ の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし、境界線は含まない。



### [解説]

③の領域については、直線④を境界とし、原点を含むか否かで決定しました。また、直線④と直線 $y = x$ および $y = -x + 2$ との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。

2

[1999 東京大・文]

放物線  $A$  と、 $A$  と線対称な放物線  $B$  に、対称軸  $y = x - c$  に平行な直線を引き、放物線  $A$  との接点を  $P_0$ 、放物線  $B$  との接点を  $Q_0$  としたとき、線分  $P_0Q_0$  は対称軸と直交する。

すると、線分  $PQ$  の長さの最小値は線分  $P_0Q_0$  の長さとなる。

ここで、放物線  $A: y = x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$  と対称軸に平行な直線  $y = x + k \cdots \cdots \textcircled{2}$  が接するとき、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$  より、

$$x^2 - x - k = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

判別式  $D = 1 + 4k = 0$  より、 $k = -\frac{1}{4}$

このとき、接点は $\textcircled{3}$ から  $x = \frac{1}{2}$ 、 $\textcircled{1}$ から  $y = \frac{1}{4}$

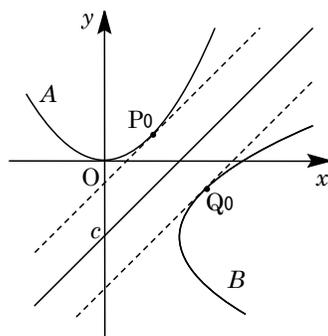
よって、 $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

点  $P_0$  と点  $Q_0$  は対称軸  $y = x - c$  に関して対称なので、線分  $PQ$  の長さの最小値  $P_0Q_0$  は点  $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  と対称軸  $x - y - c = 0$  との距離の 2 倍となるので、

$$P_0Q_0 = 2 \cdot \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - c\right|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \left|\frac{1}{4} - c\right| = \sqrt{2} \left(c - \frac{1}{4}\right)$$

### [解 説]

本問は求値問題ですので、直観に依存した解で記述しています。



3

[1999 東北大・理]

$y = x^2$  より,  $y' = 2x$

点  $(a, a^2)$  での接線は,  $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$

よって, 線分 PQ は,  $y = 2ax - a^2$  ( $a - 1 \leq x \leq a + 1$ ) ……①

$a$  が  $-1 \leq a \leq 1$  の範囲を動くとき, 線分 PQ の通過領域は, 明らかに  $y$  軸対称となる。

さて, ①において  $x = t$  ( $t \geq 0$ ) 上での通過領域を考えると,

$$y = 2at - a^2 = -(a - t)^2 + t^2 \quad (t - 1 \leq a \leq t + 1) \dots\dots\dots ②$$

そこで, ②式を  $y = f(a)$  とおき,  $a$  が  $-1 \leq a \leq 1$  と  $t - 1 \leq a \leq t + 1$  との共通範囲を動かすとき,  $y$  の値のとりうる範囲を求める。

ここで,  $y = f(a)$  のグラフの軸が  $a = t$  なので,  $t$  の値で場合分けをする。

(i)  $t > 2$  のとき

$-1 \leq a \leq 1$  と  $t - 1 \leq a \leq t + 1$  との共通範囲は存在しない。

(ii)  $1 < t \leq 2$  のとき

$-1 \leq a \leq 1$  と  $t - 1 \leq a \leq t + 1$  との共通範囲は  $t - 1 \leq a \leq 1$  となる。この範囲には,  $y = f(a)$  の軸は存在しないので,  $f(a)$  は単調増加となる。

$$f(t - 1) \leq y \leq f(1) \text{ より, } t^2 - 1 \leq y \leq 2t - 1$$

(iii)  $0 \leq t \leq 1$  のとき

$-1 \leq a \leq 1$  と  $t - 1 \leq a \leq t + 1$  との共通範囲は  $t - 1 \leq a \leq 1$  となる。この範囲に  $y = f(a)$  の軸は存在し, しかも  $t - 1 < \frac{(t - 1) + 1}{2} \leq t \leq 1$  なので,

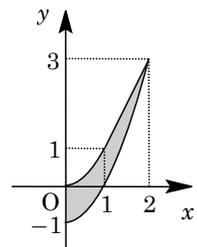
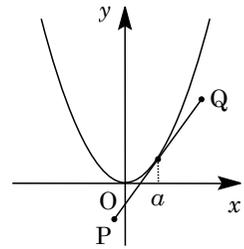
$$f(t - 1) \leq y \leq f(t) \text{ より, } t^2 - 1 \leq y \leq t^2$$

(i)~(iii)より,  $x \geq 0$  で線分 PQ の通過領域は, 右図のようになる。

求める面積を  $S$  とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^1 \{x^2 - (x^2 - 1)\} dx + \int_1^2 \{2x - 1 - (x^2 - 1)\} dx \\ &= \int_0^1 dx + \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

よって,  $S = \frac{10}{3}$



[解 説]

$x$  を固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし, 本問では 2 点 P, Q だけの軌跡を求めて, 直観的に考えることも可能です。

4

[2000 東京大・文]

$P = 1 - ax - by - axy$  とおき、まず  $y$  の値を固定し、 $y = t$  ( $-1 \leq t \leq 1$ ) において、 $P$  の最小値を求める。

$$P = 1 - ax - bt - axt = -a(1+t)x + 1 - bt$$

$-1 \leq t \leq 1$  のとき、 $1+t \geq 0$  となるので、

(i)  $-a \geq 0$  ( $a \leq 0$ ) のとき  $x = -1$  で  $P$  は最小となる。

$$\text{このとき、} P = a(1+t) + 1 - bt = (a-b)t + a + 1$$

(i-i)  $a - b \geq 0$  ( $b \leq a$ ) のとき

$$t = -1 \text{ で最小値 } P = -(a-b) + a + 1 = b + 1 \text{ をとり、条件より、} b + 1 > 0$$

(i-ii)  $a - b < 0$  ( $b > a$ ) のとき

$$t = 1 \text{ で最小値 } P = (a-b) + a + 1 = 2a - b + 1 \text{ をとり、条件より、} 2a - b + 1 > 0$$

(ii)  $-a < 0$  ( $a > 0$ ) のとき  $x = 1$  で  $P$  は最小となる。

$$\text{このとき、} P = -a(1+t) + 1 - bt = -(a+b)t - a + 1$$

(ii-i)  $a + b \geq 0$  ( $b \geq -a$ ) のとき

$$t = 1 \text{ で最小値 } P = -(a+b) - a + 1 = -2a - b + 1 \text{ をとり、条件より、} -2a - b + 1 > 0$$

(ii-ii)  $a + b < 0$  ( $b < -a$ ) のとき

$$t = -1 \text{ で最小値 } P = (a+b) - a + 1 = b + 1 \text{ をとり、条件より、} b + 1 > 0$$

(i)(ii)をまとめると、

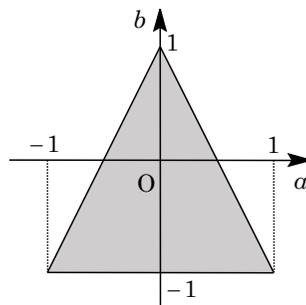
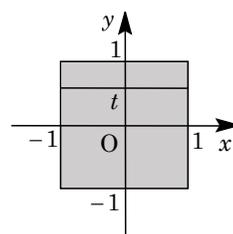
$$a \leq 0 \text{ かつ } b \leq a \text{ のとき、} b > -1$$

$$a \leq 0 \text{ かつ } b > a \text{ のとき、} b < 2a + 1$$

$$a > 0 \text{ かつ } b \geq -a \text{ のとき、} b < -2a + 1$$

$$a > 0 \text{ かつ } b < -a \text{ のとき、} b > -1$$

この条件を満たす点  $(a, b)$  の範囲は右図の網点部になる。ただし、境界は含まない。



### [解説]

今年もまた出ましたという感のある 1 文字固定の最大・最小問題です。しかし、対象が 1 次関数のため、そんなに複雑ではありません。

5

[2001 一橋大・文]

$p \neq q$  として、 $P(p, p^2)$ 、 $Q(q, q^2)$  とおくと、線分  $PQ$  と直線  $y = ax + 1$  が直交することより、

$$\frac{p^2 - q^2}{p - q} \cdot a = -1, \quad p + q = -\frac{1}{a} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

また、 $PQ$  の中点  $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{p^2+q^2}{2}\right)$  が、直線  $y = ax + 1$  上にあることより、

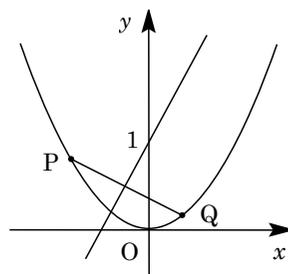
$$\frac{p^2+q^2}{2} = a \cdot \frac{p+q}{2} + 1, \quad p^2 + q^2 = a(p+q) + 2 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{を}\textcircled{2} \text{に代入すると、} p^2 + q^2 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}\textcircled{3}$  を満たす異なる  $p, q$  が存在する条件は、直線 $\textcircled{1}$ と円 $\textcircled{3}$ が2つの共有点を持つ条件に等しいので、

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}} < 1, \quad 1 < \sqrt{2}|a|$$

$$\text{よって、} a < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < a$$



### [解 説]

線対称移動を題材にした問題です。後半の  $a$  の範囲を求めるところは、図をイメージしています。