

2025 入試対策
2次数学ランダムマーク

図形と計量23題

文系+理系 27か年

1998 - 2024

外林 康治 編著

電送数学舎

図形と計量

【問題一覧】

(注) 問題番号が、対応する解答例へのハイパーリンクになっています。

1 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし、高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C 、底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

- (1) 直円錐の展開図を用いて、 l の長さを求めよ。
- (2) l 上の点 P に対して、線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。 $\angle AOQ = \theta$ とし CP^2 を $\sin \theta$ で表せ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。
- (3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし、 A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。 $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ の範囲で $\frac{OS^2}{OR^2}$ の最大値を求めよ。 [1999 九州大]

2 四面体 $OAPQ$ において、 $|\overrightarrow{OA}|=1$ 、 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP}$ 、 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ 、 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OQ}$ で、 $\angle PAQ = 30^\circ$ である。

- (1) $\triangle APQ$ の面積 S を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{OP}|$ のとりうる範囲を求めよ。
- (3) 四面体 $OAPQ$ の体積 V の最大値を求めよ。 [2001 一橋大・文]

3 原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき、この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。 [2001 岡山大・理]

4 頂点が z 軸上にあり、底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が、原点を中心とする半径 1 の球に接している。

- (1) 円錐の表面積の最小値を求めよ。
- (2) 円錐の体積の最小値を求めよ。 [2002 一橋大・文]

5 四角形 $ABCD$ が、半径 $\frac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で、辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき、残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。 [2006 東京大・文]

〔6〕 1辺の長さが1の正方形ABCDの辺BC, CD, DA, AB上に、それぞれ点P, Q, R, Sを、 $\angle APB = \angle QPC$, $\angle PQC = \angle RQD$, $\angle QRD = \angle SRA$ となるようにとる。ただし、点P, Q, R, Sは、どれも正方形ABCDの頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分BPの長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。
 (2) 直線APと直線RSの交点をTとする。四角形PQRTの面積を線分BPの長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。 $f(t)$ の最大値を求めよ。 [2006 大阪大・理]

〔7〕 方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円Cを考える。

- (1) 点A $(-\sqrt{2}, 0)$ とO $(0, 0)$ を通り中心の座標が $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ および $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2)$ である2つの円は、どちらも円Cに接することを示せ。
 (2) 点Pが円C上を動くとき、 $\cos \angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。

[2007 北海道大・文]

〔8〕 地球上の北緯 60° 東経 135° の地点をA、北緯 60° 東経 75° の地点をBとする。AからBに向かう2種類の飛行経路 R_1, R_2 を考える。 R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。 R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。 R_1 に比べて R_2 は飛行距離が3%以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとす、飛行機は高度0を飛ぶものとする。また必要があれば、三角関数表を用いよ。

注：大円とは、球を球の中心を通る平面で切ったとき、その切り口にできる円のことである。

[2008 京都大・理]

〔9〕 平面上で、鋭角三角形 $\triangle OAB$ を辺OBに関して折り返して得られる三角形を $\triangle OBC$ 、 $\triangle OBC$ を辺OCに関して折り返して得られる三角形を $\triangle OCD$ 、 $\triangle OCD$ を辺ODに関して折り返して得られる三角形を $\triangle ODE$ とする。 $\triangle OAB$ と $\triangle OBE$ の面積比が2:3のとき、 $\sin \angle AOB$ の値を求めよ。

[2009 京都大・文]

10 xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり、線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は $(1, 2)$ で、線分 OA と OD の長さは等しく、四角形 $ABCD$ は円に内接している。 $\angle AOD = \theta$ とおき、点 C の x 座標を a 、四角形 $ABCD$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また、線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。
- (2) S を a と θ を用いた式で表せ。
- (3) $\theta = \frac{\pi}{6}$ とし、 $20 \leq S \leq 40$ とするとき、 a のとりうる値の最大値を求めよ。

[2011 神戸大・文]

11 平面上の 4 点 O, A, B, C が、 $OA = 4$ 、 $OB = 3$ 、 $OC = 2$ 、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$ を満たすとき、 $\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ。

[2013 一橋大・文]

12 鋭角三角形 $\triangle ABC$ について、 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ の大きさを、それぞれ A, B, C とする。 $\triangle ABC$ の重心を G 、外心を O とし、外接円の半径を R とする。

- (1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を、それぞれ AD, OE とする。このとき、 $AD = 2R \sin B \sin C$ 、 $OE = R \cos A$ を証明せよ。
- (2) G と O が一致するならば、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ。
- (3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとし、さらに OG が BC と平行であるとする。このとき、 $AD = 3OE$ 、 $\tan B \tan C = 3$ を証明せよ。

[2014 九州大・文]

13 次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

- (a) 少なくとも 2 つの内角は 90° である。
- (b) 半径 1 の円が内接する。ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。

[2015 京都大]

14 $t > 0$ を実数とする。座標平面において、3 点 $A(-2, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 、 $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

- (1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
- (2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。 t が(1)で求めた範囲を動くとき、三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。

[2015 東北大]

15 四面体 $OABC$ が次の条件を満たすならば、それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし、四面体のある頂点の対面とは、その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016 京大・理]

16 α は $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、四角形 $ABCD$ に関する次の 2 つの条件を考える。

(i) 四角形 $ABCD$ は半径 1 の円に内接する。

(ii) $\angle ABC = \angle DAB = \alpha$

条件(i)と(ii)を満たす四角形のなかで、4 辺の長さの積 $k = AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA$ が最大となるものについて、 k の値を求めよ。 [2018 京大・理]

17 三角形 ABC の内接円の半径を r 、外接円の半径を R とし、 $h = \frac{r}{R}$ とする。また、

$\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ とおく。

(1) $h = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ となることを示せ。

(2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。

(3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのような場合か。 [2018 東北大・理]

18 三角形 ABC は $AB + AC = 2BC$ を満たしている。また、角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき、 $AD = 15$ である。さらに、三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \angle BAD$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また、 $A = \angle BAC$ とするとき、 $\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。 [2019 千葉大・理]

- 19 (1) $h > 0$ とする。座標平面上の点 $O(0, 0)$, 点 $P(h, s)$, 点 $Q(h, t)$ に対して、三角形 OPQ の面積を S とする。ただし、 $s < t$ とする。三角形 OPQ の辺 OP , OQ , PQ の長さをそれぞれ p, q, r とするとき、不等式

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成立するときの s, t の値を求めよ。

- (2) 四面体 $ABCD$ の表面積を T , 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし、辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ l, m, n とする。このとき、不等式

$$a^2 + b^2 + c^2 + l^2 + m^2 + n^2 \geq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成立するのは四面体 $ABCD$ がどのような四面体のときか答えよ。

[2019 東京工業大・理]

- 20 平面上の点 P, Q, R が同一直線上にないとき、それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle PQR$ で表す。また、 P, Q, R が同一直線上にあるときは、 $\triangle PQR = 0$ とする。

A, B, C を平面上の 3 点とし、 $\triangle ABC = 1$ とする。この平面上の点 X が

$$2 \leq \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX \leq 3$$

を満たしながら動くとき、 X の動きうる範囲の面積を求めよ。

[2020 東京大・理]

- 21 $0 < x < y$ とする。平行四辺形 $ABCD$ において、辺 AB の長さを x , 辺 BC の長さを y , $\angle ABC = 2\theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。平行四辺形 $ABCD$ の内角 A, B, C, D を二等分する直線をそれぞれ l_A, l_B, l_C, l_D とし、 l_A と l_B の交点を E , l_B と l_C の交点を F , l_C と l_D の交点を G , l_D と l_A の交点を H とする。平行四辺形 $ABCD$ と平行四辺形 $EFGH$ が重なる部分の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $\angle FEH$ を求めよ。
- (2) 線分 AE および線分 AH の長さを求めよ。
- (3) 点 H が平行四辺形 $ABCD$ の外部にあるような x, y の条件を求めよ。
- (4) S を求めよ。

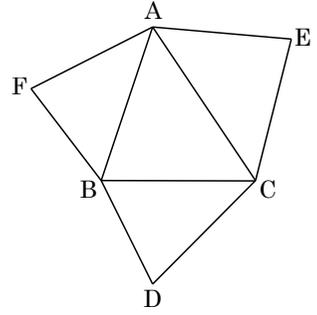
[2023 岡山大・理]

- 22 半径 1 の球面上の相異なる 4 点 A, B, C, D が、 $AB = 1, AC = BC, AD = BD, \cos \angle ACB = \cos \angle ADB = \frac{4}{5}$ を満たしているとする。

- (1) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (2) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

[2023 東京大・文]

23 右の図は、ある四面体 T の展開図である。ここで、 $AB = \sqrt{10}$ 、 $AC = \sqrt{13}$ 、 $BF = \sqrt{5}$ 、 $AF = \sqrt{7}$ 、および $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$ である。このとき、三角形 ABC の面積および四面体 T の体積を求めよ。



[2024 金沢大・理]

図形と計量

【解答例と解説】

(注) 問題番号が、対応する問題ページへのハイパーリンクになっています。

1

[1999 九州大]

- (1) 母線 AC の長さは $\sqrt{1+3} = 2$ となるので、側面の展開図の中心角を φ とすると、

$$2\pi \cdot 1 = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\varphi}{360^\circ} \text{ より, } \varphi = 180^\circ$$

線分 AB は底面の直径なので、 $\angle ACB = 90^\circ$

よって、 l の長さは展開図で $AB = 2\sqrt{2}$ となる。

- (2) 弧 AQ の長さは、底面では $2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\theta}{360^\circ}$ であるが、側面の展

開図では $2\pi \cdot 2 \cdot \frac{\angle ACQ}{360^\circ}$ と表せるので、 $\angle ACQ = \frac{\theta}{2}$

$\triangle APC$ に正弦定理を適用すると、 $\angle CAP = 45^\circ$ から、

$$\frac{CP}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin\left(135^\circ - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$CP = \frac{2 \sin 45^\circ}{\sin\left(135^\circ - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{よって, } CP^2 = \frac{2}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{4}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{4}{1 + \sin \theta}$$

- (3) $\triangle COQ$ について考えると、 $\frac{OR}{OQ} = \frac{CP}{CQ}$ から、

$$OR = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{1 + \sin \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin \theta}} \text{ より, } OR^2 = \frac{1}{1 + \sin \theta}$$

次に底面について、 $OS = OA \cos \theta = \cos \theta$ より $OS^2 = \cos^2 \theta$

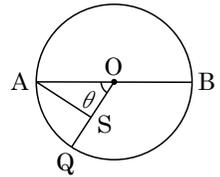
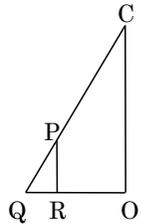
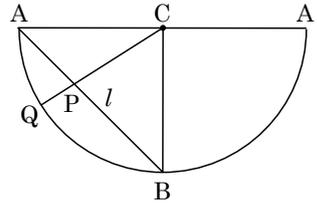
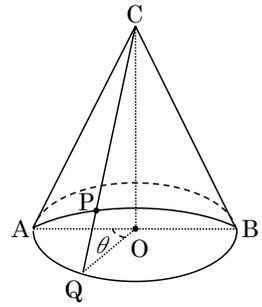
$$\text{よって, } \frac{OS^2}{OR^2} = \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) = (1 - \sin^2 \theta)(1 + \sin \theta)$$

$\sin \theta = t$ とおくと $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ より $0 < t \leq 1$

このとき、 $f(t) = (1 - t^2)(1 + t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2t(1+t) + (1-t^2) \\ &= -(3t-1)(t+1) \end{aligned}$$

$f(t)$ は $t = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{32}{27}$ をとる。すなわち $\frac{OS^2}{OR^2}$ の最大値は $\frac{32}{27}$ である。



t	0	...	$\frac{1}{3}$...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	

[解説]

断面図や展開図を書かないと、位置関係がとらえきれない問題です。

2

[2001 一橋大・文]

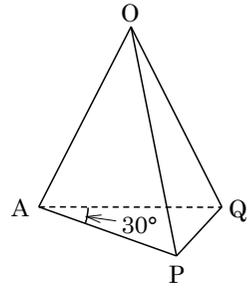
(1) $|\overrightarrow{OP}| = p$, $|\overrightarrow{OQ}| = q$ とおくと、条件より、

$$AP = \sqrt{p^2 + 1}, \quad AQ = \sqrt{q^2 + 1}, \quad PQ = \sqrt{p^2 + q^2}$$

ここで、 $\triangle APQ$ に余弦定理を適用して、

$$p^2 + q^2 = (p^2 + 1) + (q^2 + 1) - 2\sqrt{p^2 + 1}\sqrt{q^2 + 1} \cos 30^\circ$$

$$\sqrt{p^2 + 1}\sqrt{q^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$



$$\textcircled{1} \text{より, } S = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + 1} \sqrt{q^2 + 1} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

(2) $\textcircled{1}$ より、 $(p^2 + 1)(q^2 + 1) = \frac{4}{3}$, $q^2 = \frac{4}{3(p^2 + 1)} - 1 = \frac{1 - 3p^2}{3(p^2 + 1)} \dots\dots\dots \textcircled{2}$

$q > 0$ より $q^2 > 0$ なので、 $1 - 3p^2 > 0$

$p > 0$ と合わせて、 $0 < p < \frac{1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots \textcircled{3}$

(3) $V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot p\right) \cdot q = \frac{1}{6} pq$ となるので、

$$\textcircled{2} \text{より, } p^2 q^2 = \frac{p^2 - 3p^4}{3(p^2 + 1)} = -p^2 + \frac{4}{3} + \frac{-4}{3p^2 + 3} = -\left(p^2 + 1 + \frac{4}{3p^2 + 3}\right) + \frac{7}{3}$$

ここで、相加平均と相乗平均の関係から、

$$p^2 + 1 + \frac{4}{3p^2 + 3} \geq 2\sqrt{(p^2 + 1) \cdot \frac{4}{3p^2 + 3}} = 2\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

等号が成立するのは、 $p^2 + 1 = \frac{4}{3p^2 + 3}$, $(p^2 + 1)^2 = \frac{4}{3}$, すなわち $p^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$ の

ときであるが、この値は $\textcircled{3}$ を満たす。

すると、 $p^2 q^2 \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{7}{3} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{3}$ となり、

$$pq \leq \sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{7 - 2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$

以上より、 V の最大値は $\frac{1}{6} \cdot \frac{2\sqrt{3} - 3}{3} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{18}$ である。

[解 説]

最大・最小問題に分数式が絡んでくると、相加平均・相乗平均の出番です。というのも、微分は範囲外ですので。